

МЕТОД РАСЧЕТА УДАРНОГО РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД

А.Б. Жабин¹, И.М. Лавит¹, Ан.В. Поляков², Ал.В. Поляков²

¹ Тульский государственный университет, Тула, Россия, e-mail: zhabin.tula@mail.ru

² ООО «Единый консалтинговый холдинг», Москва, Россия

Аннотация: Для создания ударных инструментов с рациональными параметрами необходим метод расчета показателей разрушения, основанный на исследовании динамики рабочего процесса с использованием математических моделей, учитывающих взаимодействие бойка с инструментом и изменение напряженного состояния горного массива во времени. Такой метод представлен в настоящей работе. Показано его практическое применение, заключающееся в расчете показателей процесса ударного разрушения в зависимости от различных факторов. Установлена нагрузка ударного инструмента в зависимости от его упругих свойств, геометрических параметров и скорости удара. Найдены зависимости нагрузки от времени. Показано, что эти зависимости имеют ступенчатый характер, обусловленный распространением упругих волн вдоль стержней. Приведен пример расчета параметров разрушения горного массива ударным инструментом, при этом объем разрушенного материала определялся на основе прочностного критерия Морозова–Петрова. Установлены зависимости объема разрушения массива ударным инструментом от прочности пород на сжатие, высоты и ширины скола и угла приложения нагрузки. Таким образом, разработанный метод ударного разрушения горных пород позволяет рассчитывать кинетику процессов динамического нагружения и разрушения горного массива и определять при этом величины, необходимые для оценки эффективности.

Ключевые слова: ударный инструмент, нагрузка, сила давления инструмента, геометрия бойка и инструмента, горный массив, упругие и прочностные свойства, объем разрушения, угол установки инструмента, высота и ширина скола.

Для цитирования: Жабин А. Б., Лавит И. М., Поляков Ан. В., Поляков Ал. В. Метод расчета ударного разрушения горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2026. – № 7. – С. 5–19. DOI: 10.25018/0236_1493_2026_7_0_5.

Calculation method for rock fracture under impacts

A.B. Zhabin¹, I.M. Lavit¹, An.V. Polyakov², Al.V. Polyakov²

¹ Tula State University, Tula, Russia, e-mail: zhabin.tula@mail.ru

² United Consulting Holding LLC, Moscow, Russia

Abstract: Designing of impact tools with rational parameters requires calculating indicators of a destruction process based on the analysis of the process dynamics using mathematical models which take into account the piston–tool interaction and the change in the stress state of rocks in time. This article presents such method. In actual practice, the method consists in calculation of indicators of rock fracture under impact loads depending on various factors. The load of an impact tool depending on its elastic properties, geometrical parameters and impact velocity is

found. The time-load relationships are determined. It is shown that these relationships demonstrate a step-wise behavior governed by propagation of elastic waves along a rod. A case-study of calculation of rock fracture parameters under impacts is presented, and the volume of a broken material is determined using the Morozov-Petrov strength criterion. The volume of rock destruction by an impact tool is correlated with the compressive strength of rocks, the height and width of chips, and the load angle. To sum up, the calculation method developed for rock fracture parameters under impacts enables determination of kinetics of dynamic loading and destruction of rock mass, and provides the values required for the efficiency evaluation.

Key words: impact tool, load, tool-induced pressure, piston and tool geometry, rock mass, elasticity and strength, volume of destruction, tool angle, width and height of chip.

For citation: Zhabin A. B., Lavit I. M., Polyakov An. V., Polyakov Al. V. Calculation method for rock fracture under impacts. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2026;(7):5-19. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2026_7_0_5.

Введение

Существующие теории ударного разрушения основаны на рассмотрении уступной схемы разрушения, удара как волнового процесса [1, 2] и допущении, что реализуется плоское деформированное состояние [2, 3]. Одно из направлений исследований основано на введении понятия ядра сжатия [4, 5], приводятся формулы для расчета напряжений [6, 7]. Однако при этом не решаются дифференциальные уравнения движения массива [8, 9] и не рассматриваются граничные условия [10, 11]. Также не ясно, как использовать найденные значения напряжений для оценки прочности массива [12, 13] и определения объема разрушенного материала [14, 15]. Другой подход, основанный на решении задачи динамической теории упругости для определения поля напряжений, излагается ниже. Некоторые аспекты этого подхода обсуждались в работах [16, 17].

Для создания ударных инструментов с рациональными параметрами необходим метод расчета показателей разрушения, основанный на исследовании динамики рабочего процесса с использованием математических моделей, учитывающих взаимодействие бойка с инструментом и напряженное состояние горного массива во времени.

В связи с этим разработана теория [18, 19], суть которой сводится к следующему.

1. Математическое моделирование процесса разрушения горных пород ударным инструментом представляет собой задачу динамической теории упругости, которая рассматривается в вариационной постановке, решается с использованием метода конечных элементов и метода прямых и основывается на сочетании двух процессов: во-первых, моделирования взаимодействия бойка и инструмента и, во-вторых, описания напряженного состояния массива в зависимости от времени.

2. При математическом моделировании взаимодействия бойка и инструмента необходимо рассматривать как продольно нагруженные стержни, характеризующиеся длиной, площадью поперечного сечения, плотностью, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона при неподвижной рабочей поверхности инструмента, что позволяет определять усилие, с которым инструмент действует на массив, как функцию времени.

3. Действие ударного инструмента при математическом моделировании разрушения массива рассматривается как сосредоточенная нагрузка, массив — как упругая среда, характеризующаяся мо-

дулем Юнга, коэффициентом Пуассона и плотностью, а описание напряженно-го состояния массива в зависимости от времени с учетом критериев прочности Кулона–Мора и Морозова–Петрова позволяет найти объем разрушенного материала.

В статье в соответствии с этой теорией представлены результаты исследований ударного разрушения горных пород, которые, во-первых, накапливают и расширяют наши знания об этом процессе и, во-вторых, позволяют в дальнейшем проводить весь спектр широкомаштабных теоретических исследований на практике.

В случае проведения стендовых исследований [20, 21] придется столкнуться со значительными материальными и временными затратами, учитывая многофакторность ударного процесса [22, 23].

Результаты исследований и обсуждение

Определение нагрузки при ударе по инструменту

Максимальная нагрузка (сила давления) инструмента на породный массив P_{\max} представляется функцией двух групп следующих параметров.

К первой группе отнесем параметры бойка. Его геометрические параметры: l_1 — длина и d_1 — диаметр, а механическими параметрами будут являться плотность ρ_1 ; модуль Юнга E_1 ; коэффициент Пуассона ν_1 и скорость удара ϑ .

Во вторую группу поместим параметры ударного инструмента. Геометрия инструмента включает в себя длину l_2 и диаметр d_2 , а механические параметры — модуль Юнга E_2 ; коэффициент Пуассона ν_2 и плотность ρ_2 .

Тогда

$$P_{\max} = P_{\max}(l_1, d_1, \rho_1, \nu_1, \vartheta, l_2, d_2, \rho_2, E_2, \nu_2)$$

Сделаем важное упрощающее допущение. Будем считать, что боек и инструмент изготовлены из одинакового материала (обычно из стали). Это допущение охватывает все встречающиеся на практике случаи.

Таким образом, получаем

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho; E_1 = E_2 = E; \nu_1 = \nu_2 = \nu.$$

Следовательно, имеем

$$P_{\max} = P_{\max}(l_1, d_1, l_2, d_2, \rho, E, \nu, \vartheta).$$

Соударение бойка и инструмента рассматривается как соударение стержней. Это значит, что коэффициент Пуассона в расчетные формулы не входит и, следовательно, на результаты расчетов не влияет.

Тогда получаем

$$P_{\max} = P_{\max}(l_1, d_1, l_2, d_2, \rho, E, \vartheta).$$

Используя методы теории подобия и размерностей [24], можно уменьшить число аргументов функции P_{\max} . Приходим к зависимости

$$P_* = F\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, \frac{l_2^2}{S_2}, \vartheta_*\right),$$

где P_* — безразмерная сила давления инструмента на массив; S_1 и S_2 — площади сечения бойка и инструмента, соответственно;

$$P_* = \frac{P_{\max}}{E \cdot S_2}. \quad (1)$$

Безразмерное время τ определяется по формулам

$$\tau = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{t}{d_2} \quad \text{или} \quad \tau = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{\pi}{S_2}} \cdot t. \quad (2)$$

Безразмерная скорость удара вычисляется по формуле

$$\vartheta_* = \frac{\vartheta}{c}, \quad (3)$$

где c — скорость звука в металле.

Таблица 1

Результаты расчетов максимальной силы давления инструмента на породный массив для безразмерной скорости удара
Calculation results of the maximum tool pressure force on the rock massif for a dimensionless impact velocity

$l_1/l_2 \backslash S_1/S_2$	0,5	1,0	2,5	5,0	7,5	10,0
0,5	0,168	0,252	0,358	0,464	0,612	0,676
1,0	0,168	0,263	0,358	0,557	0,676	0,766
2,0	0,167	0,279	0,514	0,742	0,935	1,081

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

При расчетах выбираем приращение времени $\Delta\tau = 0,003$. Результаты расчетов безразмерной максимальной силы давления инструмента (нагрузки) на породный массив $P_* \cdot 10^5$ представлены в табл. 1 для безразмерной скорости удара $\vartheta_* = 2,5 \cdot 10^{-4}$. Расчеты приведены при $l_2^2/S_2 = 100$.

Анализ результатов, представленных в табл. 1, показывает, что с увеличением безразмерной величины S_1/S_2 значения нагрузки возрастают по линейной зависимости для всех значений безразмерного параметра l_1/l_2 . При этом с увели-

чением значений l_1/l_2 значения усилия P_* также повышаются для всех соотношений S_1/S_2 .

В качестве примера приведем несколько вариантов расчета максимального усилия давления инструмента на массив от времени в виде графических зависимостей, представленных на рис. 1–3 (в безразмерных параметрах). Для этого выберем следующие три варианта: $l_1/l_2 = S_1/S_2 = 0,5$; $l_1/l_2 = 1,0$ и $S_1/S_2 = 2,5$; $l_1/l_2 = 2,0$ и $S_1/S_2 = 7,5$ из табл. 1.

Анализ графика, представленного на рис. 1, показывает следующее: через $\tau = 130,0$ инструмент отскакивает от массива. Это и есть безразмерное время удара. Отскок бойка произошел через

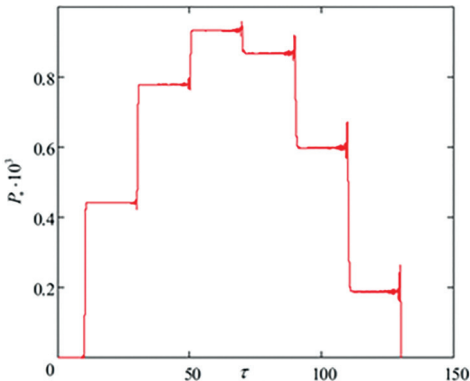


Рис. 1. Зависимость безразмерной силы, действующей на массив P_* , от безразмерного времени τ при $l_1/l_2 = 2,0$ и $S_1/S_2 = 7,5$

Fig. 1. Dependence of the dimensionless force acting on the rock mass P_* on the dimensionless time τ at $l_1/l_2 = 2,0$ and $S_1/S_2 = 7,5$

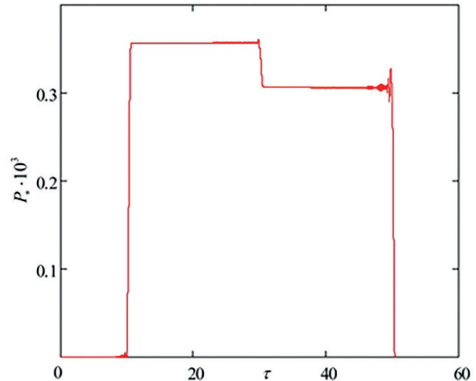


Рис. 2. Зависимость безразмерной силы, действующей на массив P_* , от безразмерного времени τ при $l_1/l_2 = 1,0$ и $S_1/S_2 = 2,5$

Fig. 2. Dependence of the dimensionless force acting on the rock mass P_* on the dimensionless time τ at $l_1/l_2 = 1,0$ and $S_1/S_2 = 2,5$

120,5. Максимальное значение (безразмерное) силы давления инструмента на массив в данном случае равно $0,935 \cdot 10^{-3}$.

Обратимся к рис. 2. Здесь безразмерная нагрузка увеличивается до $0,358 \cdot 10^{-3}$. Через $\tau = 51,0$ инструмент отскакивает от массива — это и есть безразмерное время удара.

На рис. 3 при безразмерном времени, равном 10, нагрузка возрастает до максимального значения $0,168 \cdot 10^{-3}$, после чего инструмент под нагрузкой в течение $\tau = 10,0$ находится прижатым к массиву, то есть его воздействие на массив продолжается, и далее инструмент отскакивает от массива и воздействие его на массив прекращается. Таким образом, безразмерное время удара составляет чуть более 20. При этом отскок бойка от инструмента происходит при $\tau = 10,38$.

Ступенчатый характер всех зависимостей, представленных на рис. 1–3, обусловлен распространением упругих волн вдоль стержней. В целом анализ этих графиков показывает, что с увеличением безразмерных геометрических параметров бойка и инструмента безразмерное время и максимальное усилие давления инструмента на массив возрастают. Количество волн также увеличивается.

Что касается скорости удара ϑ_* , то расчеты показывают, что с ее повышением нагрузка P_* также увеличивается. Так, например, при $\vartheta_* = 2,5 \cdot 10^{-4}$ и $S_1/S_2 = 7,5$ и $l_1/l_2 = 1$ значение усилия давления составляет 0,676 (см. табл. 1), а при $\vartheta_* = 7,5 \cdot 10^{-4}$ и тех же самых значениях S_1/S_2 и l_1/l_2 значение P_* составляет $2,028 \cdot 10^{-3}$, то есть возрастает в 3 раза. При скорости $\vartheta_* = 5,0 \cdot 10^{-4}$ для тех же условий нагрузка увеличивается в 2 раза — $1,352 \cdot 10^{-3}$. Это происходит потому, что с увеличением скорости возрастает кинетическая энергия удара.

Таким образом, расчеты показывают, что увеличение P_* прямо пропорцио-

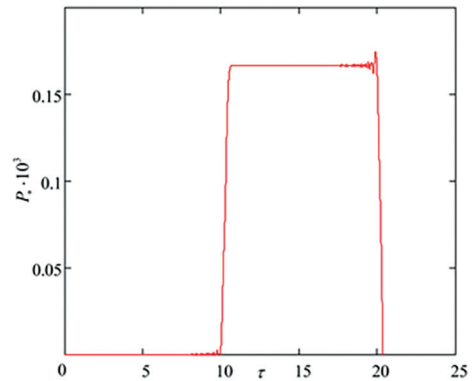


Рис. 3. Зависимость безразмерной силы, действующей на массив P_* , от безразмерного времени τ при $l_1/l_2 = S_1/S_2 = 0,5$

Fig. 3. Dependence of the dimensionless force acting on the rock mass P_* on the dimensionless time τ at $l_1/l_2 = S_1/S_2 = 0,5$

нально скорости ϑ_* . Поэтому можно представить усилие давления P_* в следующем виде:

$$P_* = \vartheta_* \cdot \Phi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, \frac{l_2^2}{S_2} \right). \quad (4)$$

Легко видеть, что функция Φ зависит только от геометрических параметров бойка и инструмента.

Обработку результатов вычислительных экспериментов, представленных в табл. 1, можно осуществить и с применением методов множественной регрессии.

Исходной является функция

$\Phi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, \frac{l_2^2}{S_2} \right)$ из выражения (4). Так как последний параметр этой функции был принят равным 100, то

$\Phi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100 \right)$. Введем упрощающие обозначения:

$$x = \frac{l_1}{l_2}; y = \frac{S_1}{S_2}. \quad (5)$$

Функция задается табл. 1. Обозначим заданные значения Φ как $\Phi(x_i, y_j) = \varphi_{ij}$; $i = 1 \dots 3$; $j = 1 \dots 6$.

Аппроксимируем функцию линейной зависимостью

$$\Phi = a + bx + cy,$$

где a, b, c – искомые коэффициенты. Найдем их, используя метод наименьших квадратов. Суммарное квадратичное отклонение аппроксимации от заданных значений выражается формулой

$$S = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (a + bx_i + cy_j - \varphi_{ij})^2. \quad (6)$$

Минимум функции S достигается при выполнении следующих условий:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0.$$

Из выражения (6) следует:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (a + bx_i + cy_j - \varphi_{ij});$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (a + bx_i + cy_j - \varphi_{ij}) x_i;$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (a + bx_i + cy_j - \varphi_{ij}) y_j.$$

Введем обозначения

$$\sum_{i=1}^M x_i = e_1; \quad \sum_{j=1}^N y_j = e_2;$$

$$\sum_{i=1}^M (x_i)^2 = e_3; \quad \sum_{j=1}^N (y_j)^2 = e_4$$

Приходим к системе уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} M \cdot N \cdot a + e_1 \cdot N \cdot b + e_2 \cdot M \cdot c &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \\ e_1 \cdot N \cdot a + e_3 \cdot N \cdot b + e_1 \cdot e_2 \cdot c &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \cdot x_i \\ M \cdot e_2 \cdot a + e_1 \cdot e_2 \cdot b + e_4 \cdot M \cdot c &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \cdot y_j \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Система (7) решается при значениях $M = 3; N = 6$. В результате расчета получено: $a = 0,151; b = 0,542; c = 0,277$.

Таким образом, функция Φ примет следующий вид:

$$\Phi = 0,151 + 0,542 \frac{l_1}{l_2} + 0,277 \frac{S_1}{S_2}$$

и окончательно

$$P_* = \vartheta_* \left(0,151 + 0,542 \frac{l_1}{l_2} + 0,277 \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (8)$$

Переход от безразмерной зависимости к размерным параметрам

Исходной является зависимость (4). Функцию Φ можно получить, используя табл. 1 для $\vartheta_* = 2,5 \cdot 10^{-4}$, с учетом того, что с увеличением скорости удара пропорционально увеличиваются нагрузки, действующие на инструмент.

Пусть $\varphi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2} \right)$ – значения, приведенные в табл. 1. Это значит, что

$$P_* \cdot 10^3 = \varphi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2} \right) \Rightarrow \quad (9)$$

$$\Rightarrow P_* = \varphi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2} \right) \cdot 10^{-3}$$

Следовательно, с другой стороны, справедлива и формула (9). Тогда получим при $l_2^2/S_2 = 100$:

$$\vartheta_* \cdot \Phi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100 \right) = \varphi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2} \right) \cdot 10^{-3}.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100 \right) = \frac{10^{-3}}{\vartheta_*} \varphi \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2} \right). \quad (10)$$

Для примера воспользуемся табл. 1, в которой представлены безразмерные усилия для безразмерной скорости $\vartheta_* = 2,5 \cdot 10^{-4}$.

Таблица 2

Результаты расчетов значений функции Φ
Calculation results of the values of the Φ function

$l_1/l_2 \backslash S_1/S_2$	0,5	1,0	2,5	5,0	7,5	10,0
0,5	0,672	1,01	1,43	1,86	2,45	2,70
1,0	0,672	1,05	1,43	2,23	2,70	3,06
2,0	0,668	1,12	2,06	2,97	3,74	4,32

Тогда получаем из формулы (10)

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100\right) &= \\ &= \frac{10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-4}} \varphi\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100\right) = \\ &= \frac{10}{2,5} \varphi\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100\right) = \\ &= 4\varphi\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100\right) \end{aligned}$$

Следовательно, значения функции $\Phi\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, 100\right)$ будут такими, какими они представлены в табл. 2.

Эти значения получаются умножением соответствующих значений из табл. 1 на множитель 4. Если мы для примера будем использовать значения нагрузки для других скоростей удара, то получим те же самые значения функции Φ , которые приведены в табл. 2. Другими словами, значения функции Φ универсальны и не зависят от скорости удара.

Вернемся к формуле (4). Согласно формулам (1) и (3) соответственно,

$$P_* = \frac{P_{\max}}{E \cdot S_2}; \vartheta_* = \frac{\vartheta}{c}$$

Подстановка этих формул в выражение (4) дает

$$P_{\max} = \frac{E \cdot S_2 \cdot \vartheta}{c} \Phi\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{S_1}{S_2}, \frac{l_2^2}{S_2}\right). \quad (11)$$

Переход от безразмерного времени (см. формулу (2)) к размерному производится по следующим формулам;

$$t = \frac{2\tau}{c} \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} \quad \text{или} \quad t = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot d_2 \cdot \tau. \quad (12)$$

Разрушение горных пород ударным инструментом (определение объема разрушенной породы)

Выполним пример расчета для следующих исходных данных. Предел прочности породы на сжатие $\sigma_{\text{сж}} = 100 \cdot 10^6$ Н/м²; предел прочности породы на растяжение $\sigma_p = 10 \cdot 10^6$ Н/м²; глубина (толщина) скальываемого слоя $h = 0,1$ м; шаг приложения ударной нагрузки $b = 0,1$ м; угол наклона нагрузки $\alpha = 0^\circ$; модуль Юнга инструмента и бойка $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²; плотность инструмента и бойка $\rho = 7800$ кг/м³; длина инструмента и бойка $l_1 = l_2 = 1,0$ м; диаметр инструмента и бойка $d_1 = d_2 = 0,15$ м; площадь их поперечного сечения

$$S_1 = S_2 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi d_2^2}{4} = 0,0177 \text{ м}^2.$$

Скорость бойка в момент удара $\vartheta = 5,0$ м/с; модуль Юнга горного массива $E = 0,657 \cdot 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0,14$; плотность горного массива $\rho = 2570$ кг/м³; инкубационное время $\tau = 10^{-3} = 1,0$ мс; число ударов инструмента в одну и ту же точку массива $N = 10$.

Результаты расчетов представлены на рис. 4 и 5. На рис. 4 показана зависимость силы давления инструмента на

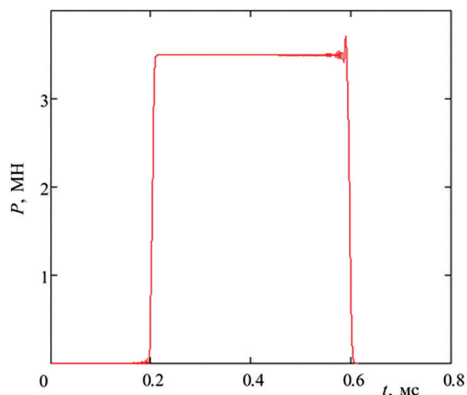


Рис. 4. Зависимость силы давления, действующей на массив P_* , от времени t

Fig. 4. Dependence of the pressure force acting on the rock mass P_* on time t

массив от времени. В результате расчетов получается безразмерное время τ . Такие типовые графики приведены на

рис. 1–3. Безразмерное время связано с размерным временем t формулами (2), а размерное время — с безразмерным формулами (12).

Поэтому на рис. 4 показано уже размерное время t . При этом все размерные величины должны быть выражены в какой-то одной системе единиц измерения. Например, в системе СИ размерность плотности $[\rho] = \text{кг/м}^3$, размерность модуля Юнга $[E] = \text{Н/м}^2$, размерность диаметра инструмента $[d_2] = \text{м}$. При этом размерность времени t будет равна $[t] = \text{с}$ (секунда).

На графиках (см. рис. 1–3) отложены значения силы $P_* \cdot 10^3$. Чтобы получить безразмерную силу, нужно эти значения умножить на 10^{-3} (поделить на 1000). Величина P_* связана с размерной силой давления зависимостью (1).

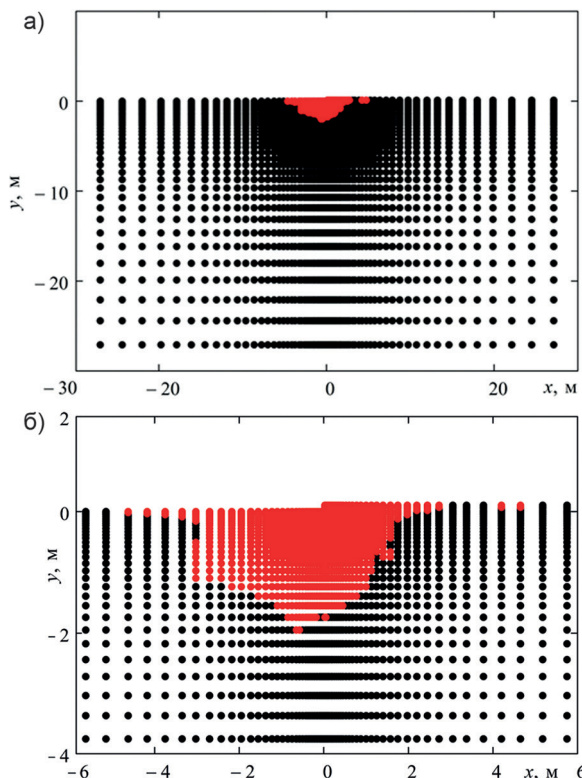


Рис. 5. Расчетная область (а) и ее фрагмент (б)

Fig. 5. The calculated area (a) and its fragment (b)

Из этого выражения следует, что

$$P_{\max} = E \cdot S_2 \cdot P. \quad (13)$$

В системе СИ результат расчета по этой формуле получится в ньютонах. На рис. 4 отложено уже размерное значение усилия давления инструмента на массив. В результате расчета получено время удара $0,614 \text{ мс} = 0,614 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. К этому времени боек от инструмента уже отскакивает. Максимальное значение силы давления на инструмент

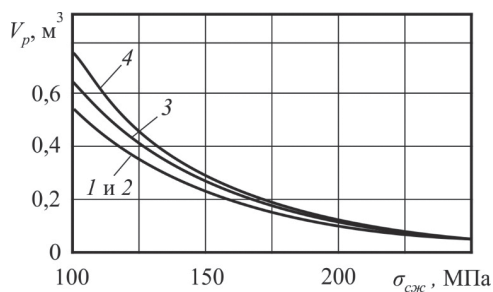
$$P_{\max} = 3,71 \text{ МН} = 3,71 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

На рис. 5 представлена расчетная область (рис. 5, а) и ее увеличенный фрагмент (рис. 5, б). Кружками выделены узлы конечно-элементной сетки.

Узлы, в которых материал разрушен

$$\left(\text{выполнен критерий } \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \chi(S) dS \geq 1 \right)$$

Морозова–Петрова [25]), выделены красным цветом. Площадь разрушенной области легко считается: суммируются площади конечных элементов во всех узлах, в которых материал разрушен. Площадь разрушенной части массива $S_* = 6,19 \text{ м}^2$, а объем разрушенной породы $V_p = 0,619 \text{ м}^3$.



1 – при 0° ; 2 – при 30° ; 3 – при 60° ; 4 – при 90°

Рис. 6. Влияние прочности горных пород на объем разрушения при глубине $h = 0,1 \text{ м}$ и ширине $b = 0,1 \text{ м}$ скальвания

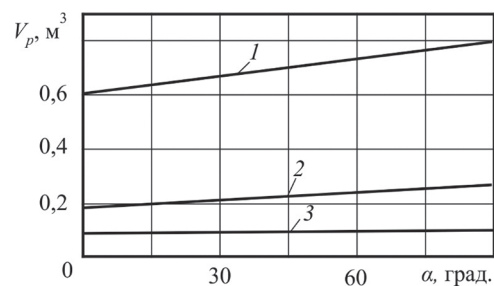
Fig. 6. The effect of rock strength on the volume of fracture at a depth of cleavage $h = 0.1 \text{ m}$ and a width of cleavage $b = 0.1 \text{ m}$

Зависимость объема разрушенной породы от ее прочности, угла приложения нагрузки, высоты и ширины скальваемого уступа

Результаты вычислительных экспериментов по установлению влияния прочности горных пород и угла приложения ударной нагрузки на объем разрушения при высоте скальваемого уступа $h = 0,1 \text{ м}$ и его ширине $b = 0,1 \text{ м}$ представлены в табл. 3.

По результатам исследований, приведенным в табл. 3, построены графики зависимостей объема разрушенной породы от ее прочности и угла приложения ударной нагрузки, показанные соответственно на рис. 6 и 7.

Анализ графиков, представленных на рис. 6, показывает, что объем разрушенной породы уменьшается по экспоненте с возрастанием предела ее прочности на сжатие независимо от угла приложения ударной нагрузки. Такой характер данных зависимостей не требует особых объяснений, поскольку известно, что с увеличением прочности горных пород для их разрушения необходимо прикладывать и большие механические усилия, причем независимо от способа разрушения. При этом из рис. 6



1 – при 100 МПа; 2 – при 150 МПа; 3 – при 200 МПа

Рис. 7. Влияние угла приложения ударной нагрузки на объем разрушения при глубине $h = 0,1 \text{ м}$ и ширине $b = 0,1 \text{ м}$ скальвания:

Fig. 7. The effect of the angle of application of the impact load on the volume of fracture at a depth of cleavage $h = 0.1 \text{ m}$ and a width of cleavage $b = 0.1 \text{ m}$

Таблица 3

Результаты расчетов влияния прочности горных пород и угла приложения ударной нагрузки на объем разрушения
Calculation results of the effect of rock strength and the angle of impact load on the fracture volume

$\sigma_{сж}$, МПа α , град.	100	150	200	250
0°	0,619	0,199	0,0879	0,0472
30°	0,625	0,189	0,0912	0,0457
60°	0,735	0,239	0,0918	0,0514
90°	0,799	0,271	0,1013	0,0463

видно, что в интервале пород с прочностью от 200 до 250 МПа угол приложения нагрузки практически не влияет на объем разрушения.

Обратимся к рис. 7, на котором приведены зависимости объема разрушения от угла приложения ударной нагрузки. Анализ графиков, представленных на этом рисунке, свидетельствует об увеличении объема разрушенной породы с повышением угла приложения ударной нагрузки. При этом наблюдается различная интенсивность возрастания объема разрушения. Для $\sigma_{сж} = 100$ МПа она выше по сравнению с $\sigma_{сж} = 150$ МПа, а для $\sigma_{сж} = 200$ МПа объем разрушения практически не увеличивается, что характеризует предел разрушающей нагрузки для конкретного инструмента, которая недостаточна для дальнейшего разрушения породы с таким пределом прочности на сжатие. Поэтому для предела прочности в 250 МПа не удалось

получить удовлетворительную зависимость объема разрушения от угла приложения ударной нагрузки, что также показывает недостаточность усилия, с которым инструмент действует на массив.

Об этом, кстати, свидетельствует и рис. 6, на котором на участке от $\sigma_{сж} = 200$ до 250 МПа кривые объема разрушения практически сливаются и наступает предел возрастания объема разрушения.

Теперь приведем результаты аналогичных экспериментов при глубине $h = 0,2$ м и ширине $b = 0,2$ м скальвания. В табл. 4 представлены значения объема разрушенной породы в зависимости от угла приложения ударной нагрузки и предела прочности горных пород на сжатие.

По этим данным построены графики соответствующих зависимостей, которые представлены на рис. 8 и 9. На рис. 8 приведены зависимости объема

Таблица 4

Результаты расчетов значения объема разрушенной породы в зависимости от угла приложения ударной нагрузки и предела прочности горных пород на сжатие
Calculation results of the volume of the destroyed rock depending on the angle of application of the shock load and the ultimate compressive strength of rocks

$\sigma_{сж}$, МПа α , град.	100	150	200	250
0	0,157	0,0464	0,0184	0,00962
30	0,162	0,0431	0,0170	0,00853
60	0,176	0,0406	0,0146	0,00610
90	0,207	0,0490	0,0166	0,00849

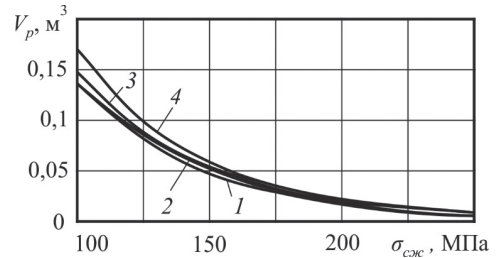
разрушенной породы от предела прочности горных пород на сжатие при различных углах приложения ударной нагрузки.

Анализ этих графиков показывает, что характер изменения объема разрушения от прочности пород аналогичен характеру его изменения при глубине и ширине скола 0,1 м. Однако значения объемов разрушения пород в этом случае получились значительно меньшими. Причем на участке от 150 до 250 МПа эти значения практически сливаются между собой. Это объясняется тем, что сила давления инструмента на массив, рассчитанная по формуле (13), осталась такой же, как и в предыдущей серии вычислительных экспериментов при $h = 0,1$ м и $b = 0,1$ м. Такой результат не противоречит физике процесса и его можно было ожидать.

На рис. 9 приведены зависимости объема разрушенной породы от угла приложения ударной нагрузки при $h = 0,2$ м и $b = 0,2$ м. Здесь также характер зависимостей объема разрушенной породы от угла приложения ударной нагрузки при различной прочности пород аналогичен зависимостям, представленным на рис. 7. Видно, что при прочности пород 100 МПа с увеличением угла α от 0 до 90° объем разрушения увеличивается по линейной зависимости. Этого нельзя сказать о зависимостях 2–4, из которых следует, что объем разрушения практически не возрастает при всех значениях угла приложения ударной нагрузки. Это свидетельствует о недостаточной силе давления инструмента на массив (см. формулу (13)) при параметрах разрушения $h = 0,2$ м и $b = 0,2$ м.

Выводы

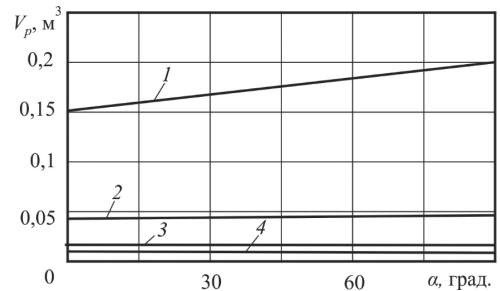
1. С увеличением безразмерной величины S_1/S_2 значения нагрузки возрастают по линейной зависимости для всех значений безразмерного параметра



1 – при 0°; 2 – при 30°; 3 – при 60°; 4 – при 90°

Рис. 8. Влияние прочности горных пород на объем разрушения при глубине $h = 0,2$ м и ширине $b = 0,2$ м скалывания

Fig. 8. The effect of rock strength on the volume of fracture at a depth of cleavage $h = 0.2$ m and a width of cleavage $b = 0.2$ m



1 – при 100 МПа; 2 – при 150 МПа;
3 – при 200 МПа; 4 – при 250 МПа

Рис. 9. Влияние угла приложения ударной нагрузки на объем разрушения при глубине $h = 0,2$ м и ширине $b = 0,2$ м скалывания

Fig. 9. The effect of the angle of application of the impact load on the volume of fracture at a depth of cleavage $h = 0.2$ m and a width of cleavage $b = 0.2$ m

l_1/l_2 . При этом с повышением значений l_1/l_2 величина усилия P_* также возрастает для всех соотношений S_1/S_2 .

2. На примерах в виде графических зависимостей в безразмерных параметрах показано, что они имеют ступенчатый характер, обусловленный распространением упругих волн вдоль стержней, и с увеличением безразмерных геометрических параметров бойка и инструмента безразмерное время и максимальное усилие давления инструмента на массив возрастают. Количество волн также увеличивается.

3. С повышением скорости удара сила давления инструмента на массив прямо пропорционально возрастает, поэтому функция Φ зависит только от геометрических параметров бойка и инструмента. С применением методов множественной регрессии для нее получена расчетная формула в безразмерных параметрах. С учетом этого показан переход от безразмерного усилия давления на инструмент к размерной зависимости.

4. Представлен пример расчета параметров разрушения горного массива ударным инструментом в размерных параметрах, заключающийся в представлении расчетной области с отражением контура разрушенного материала, и приведены значения площади и объема разрушения с соблюдением критерия Морозова–Петрова.

5. Установлены зависимости объема разрушенного материала от предела прочности горных пород на сжатие и угла приложения ударной нагрузки. Показано, что с увеличением прочности пород объем разрушения уменьшается по экспоненциальной зависимости для всех значений угла приложения ударной нагрузки. При этом чем больше значения прочности пород, тем меньше влияние

угла приложения нагрузки на объем разрушения.

6. С повышением глубины скалывания и шага приложения нагрузки объем разрушения понижается, независимо от прочности пород и угла приложения ударной нагрузки.

7. Для конкретных параметров инструмента, принятых к исследованию, при разрушении пород прочностью от 150 до 250 МПа и увеличении параметров разрушения в 2 раза происходит резкое падение его эффективности.

8. Таким образом, разработанный метод ударного разрушения горных пород позволяет определять объем разрушенного материала в зависимости от длины, площади поперечного сечения, плотности, модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала бойка и инструмента, скорости ударов и их количества, глубины и ширины скола, угла установки инструмента, а также упругих и прочностных свойств пород.

9. В качестве направлений дальнейших исследований можно указать следующие:

- решение рассматриваемой задачи в трехмерной постановке;
- учет неоднородности, анизотропии и трещиноватости горного массива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков И. П., Веттегрень В. И., Мамалимов Р. И. Механизм разрушения горных пород под действием ударных волн // Физика Земли. — 2020. — № 5. — С. 23–35. DOI: 10.31857/S0002333720050099.

2. Ушаков Л. С., Котылев Ю. Е., Кравченко В. А. Гидравлические машины ударного действия. — М.: Машиностроение, 2000. — 416 с.

3. Каманин Ю. Н., Ределин Р. А., Кравченко В. А. Моделирование разрушения скальных пород гидравлическим устройством ударного действия // Горное оборудование и электромеханика. — 2017. — № 2 (129). — С. 30–34.

4. Жорник А. И., Киричек В. А. Динамическая задача о полубесконечной трещине, движущейся в упругом пространстве // Прикладная механика и техническая физика. — 2018. — № 2. — С. 209–217. DOI: 10.15372/PMTF20180221.

5. Атагелдиев К. Т., Бахтыбаев Н. Б., Абиль О. А. Динамическое разрушение горных пород: экспериментальные и численные методы // Горный журнал Казахстана. — 2025. — № 1. — С. 12–16. DOI: 10.48498/minmag.2025.237.1.008.

6. Жуков И. А., Тимофеев Е. Г. Математическое и компьютерное моделирование ударных процессов в стержневой системе машин ударного действия // Современные наукоемкие технологии. — 2020. — № 12 (1). — С. 43–49. DOI: 10.17513/snt.38409.
7. Ляпцев С. А., Степанова Н. Р. Параметры многомассового ударного механизма для разрушения горных пород // Фундаментальные исследования. — 2014. — № 12 (8). — С. 1649–1651.
8. Klishin V. I., Opruk G. Y., Pavlova L. D. Active prefracture methods in top coal caving technologies for thick and gently dipping seams // Journal of Mining Science. 2020, vol. 56, pp. 395–403. DOI: 10.1134/S1062739120036689.
9. Li T., Marigo J. J., Guilbaud D. Numerical investigation of dynamic brittle fracture via gradient damage models // Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences. 2016, vol. 3, article 26. DOI: 10.1186/s40323-016-0080-x.
10. Nhon Nguyen-Thanh, Hung Nguyen-Xuan, Weidong Li Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture in rock-like materials and polycrystalline materials // Computers & Structures. 2024, vol. 296, article 107325. DOI: 10.1016/j.compstruc.2024.107325.
11. Гаранин В. Н., Юницкий А. Э., Артюшевский С. В., Овсянко В. А., Пронкевич С. А. Разработка компьютерной модели разрушения неоднородного материала // Труды БГТУ. Сер. 3. Физико-математические науки и информатика. — 2022. — № 1 (254). — С. 28–37.
12. Ming Zhou, Lan Qiao, Qingwen Li, Shuang Yang and Zhenping Huang Research on the conversion relationship between dynamic point load strength and dynamic compressive strength based on energy system // Shock and Vibration. 2022, vol. 2, p. 10.
13. Kozyrev A., Kasparyan E., Fedotova Iu., Kuznetsov N. The specificities of deformations and failures of highly stressed hard rock massifs // E3S Web of Conference. 2019, vol. 129, article 01010. DOI: 10.1051/e3sconf/201912901010.
14. Laura De Lorenzis, Alexander Düster Modeling in engineering using innovative numerical methods for solids and fluids // CISM International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. 2020, vol. 599, 220 p. DOI: 10.1007/978-3-030-37518-8.
15. Gerasimov T., Römer U., Vondřejc J., Matthies H. G., De Lorenzis L. Stochastic phase-field modeling of brittle fracture: Computing multiple crack patterns and their probabilities // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020, vol. 372, article 113353. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113353.
16. Shi H., Chen W., Zhang H., Song L., Li M., Wang M., Lu P. Dynamic strength characteristics of fractured rock mass // Engineering Fracture Mechanics. 2023, vol. 292, no. 15, article 109678. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109678.
17. Zhang L., Wang E., Liu Y., Yue W., Chen D. Experimental research into the dynamic damage characteristics and failure behavior of rock subjected to incremental repeated impact loads // Engineering Geology. 2024, vol. 331, article 107435. DOI: 10.2495/SUS1140311.
18. Жабин А. Б., Лавит И. М., Поляков А. В., Керимов З. Э. Математическая модель взаимодействия бойка и инструмента при ударном разрушении горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2020. — № 7. — С. 94–103. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-7-0-94-103.
19. Жабин А. Б., Лавит И. М., Поляков А. В., Керимов З. Э. Математическая модель разрушения горных пород ударным инструментом // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2020. — № 11. — С. 140–150. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-11-0-140-150.
20. Mohammadnejad M., Liu H., Chan A., Dehkhoda S., Fukuda D. An overview on advances in computational fracture mechanics of rock // Geosystem Engineering. 2021, vol. 24, pp. 206–229. DOI: 10.1080/12269328.2018.1448006.
21. Геллер Ю. А. Факторы, влияющие на процесс разрушения грунтового и горного массива // Вестник Забайкальского государственного университета. — 2021. — Т. 27. — № 5. — С. 17–25. DOI: 10.21209/2227-9245-2021-27-5-17-25.
22. Азимов А. М., Жуков И. А. Повышение энергоэффективности гидромолотов, применяемых при разрушении негабаритов горных пород, на основе эффекта влияния геометрии элементов ударного узла // Горная промышленность. — 2025. — № 3. — С. 71–79. DOI: 10.30686/1609-9192-2025-3-71-79.
23. Линник Ю. Н., Линник В. Ю. Анализ способов оценки сопротивляемости горных пород разрушению при динамическом приложении нагрузки // Горное оборудование и электромеханика. — 2025. — № 1 (177). — С. 39–46. DOI: 10.26730/181-4528-2025-1-39-46.

24. Крамаренко Н. В. Методы подобия в механике. Анализ размерностей. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2020. — 212 с.

25. Морозов Н. Ф., Петров Ю. В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. — СПб.: СПбГУ, 1997. — 132 с. **МИАБ**

REFERENCES

1. Shcherbakov I. P., Vettegren V. I., Mamalimov R. I. Fracture mechanism of the rock under the action of shock waves. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2020, no. 5, pp. 23–35. [In Russ]. DOI: 10.31857/S0002333720050099.

2. Ushakov L. S., Kotylev Yu. E., Kravchenko V. A. *Gidravlicheskie mashiny udarnogo deystviya* [Hydraulic impact machines], Moscow, Mashinostroenie, 2000, 416 p.

3. Kamanin Yu. N., Redelin R. A., Kravchenko V. A. Simulation of fracture rock hydraulic equipment of percussion. *Mining Equipment and Electromechanics*. 2017, no. 2 (129), pp. 30–34. [In Russ].

4. Zhornik A. I., Kirichek V. A. The dynamic problem of a semi-infinite crack moving in elastic space. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2018, no. 2, pp. 209–217. [In Russ]. DOI: 10.15372/PMTF20180221.

5. Atageldiev K. T., Bahtybaev N. B., Abil' O. A. Dynamic destruction of rocks: experimental and numerical methods. *Mining Magazine of Kazakhstan*. 2025, no. 1, pp. 12–16. [In Russ]. DOI: 10.48498/minmag.2025.237.1.008.

6. Zhukov I. A., Timofeev E. G. Mathematical and computer simulation of impact processes in rod system of impact machines. *Modern High Technologies*. 2020, no. 12 (1), pp. 43–49. [In Russ]. DOI: 10.17513/snt.38409.

7. Lyaptsev S. A., Stepanova N. R. Parameters multimass shock mechanism for the destruction of rocks. *Fundamental research*. 2014, no. 12 (8), pp. 1649–1651. [In Russ].

8. Klishin V. I., Opruk G. Y., Pavlova L. D. Active prefracture methods in top coal caving technologies for thick and gently dipping seams. *Journal of Mining Science*. 2020, vol. 56, pp. 395–403. DOI: 10.1134/S1062739120036689.

9. Li T., Marigo J. J., Guilbaud D. Numerical investigation of dynamic brittle fracture via gradient damage models. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*. 2016, vol. 3, article 26. DOI: 10.1186/s40323-016-0080-x.

10. Nhon Nguyen-Thanh, Hung Nguyen-Xuan, Weidong Li Phase-field modeling of anisotropic brittle fracture in rock-like materials and polycrystalline materials. *Computers & Structures*. 2024, vol. 296, article 107325. DOI: 10.1016/j.compstruc.2024.107325.

11. Garanin V. N., Unitsky A. E., Artyushevsky S. V., Ovsyanko V. A., Pronkevich S. A. Development of a computer model of destruction heterogeneous material. *Proceedings of BSTU. Series 3, Physical and mathematical sciences and Computer science*. 2022, no. 1 (254), pp. 28–37. [In Russ].

12. Ming Zhou, Lan Qiao, Qingwen Li, Shuang Yang and Zhenping Huang Research on the conversion relationship between dynamic point load strength and dynamic compressive strength based on energy system. *Shock and Vibration*. 2022, vol. 2, p. 10.

13. Kozyrev A., Kasparyan E., Fedotova Iu., Kuznetsov N. The specificities of deformations and failures of highly stressed hard rock massifs. *E3S Web of Conference*. 2019, vol. 129, article 01010. DOI: 10.1051/e3sconf/201912901010.

14. Laura De Lorenzis, Alexander Düster Modeling in engineering using innovative numerical methods for solids and fluids. *CISM International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures*. 2020, vol. 599, 220 p. DOI: 10.1007/978-3-030-37518-8.

15. Gerasimov T., Römer U., Vondřejc J., Matthies H. G., De Lorenzis L. Stochastic phase-field modeling of brittle fracture: Computing multiple crack patterns and their probabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020, vol. 372, article 113353. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113353.

16. Shi H., Chen W., Zhang H., Song L., Li M., Wang M., Lu P. Dynamic strength characteristics of fractured rock mass. *Engineering Fracture Mechanics*. 2023, vol. 292, no. 15, article 109678. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2023.109678.

17. Zhang L., Wang E., Liu Y., Yue W., Chen D. Experimental research into the dynamic damage characteristics and failure behavior of rock subjected to incremental repeated impact loads. *Engineering Geology*. 2024, vol. 331, article 107435. DOI: 10.2495/SUSI140311.

18. Zhabin A. B., Lavit I. M., Polyakov A. V., Kerimov Z. E. Mathematical model of piston-tool interaction in rock fracture by impact. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020, no. 7, pp. 94–103. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-7-0-94-103.

19. Zhabin A. B., Lavit I. M., Polyakov A. V., Kerimov Z. E. Mathematical model of piston/bit interaction in percussive destruction of rocks. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020, no. 11, pp. 140–150. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-11-0-140-150.

20. Mohammadnejad M., Liu H., Chan A., Dehkhoda S., Fukuda D. An overview on advances in computational fracture mechanics of rock. *Geosystem Engineering*, 2021, vol. 24, pp. 206–229. DOI: 10.1080/12269328.2018.1448006.

21. Geller Yu. Factors affecting the process of soil and rock massif destruction. *Transbaikal State University Journal*. 2021, vol. 27, no. 5, pp. 17–25. [In Russ]. DOI: 10.21209/2227-9245-2021-27-5-17-25.

22. Azimov A. M., Zhukov I. A. Increasing energy efficiency of hydraulic hammers used for secondary breaking based on the geometry effect of the impactor parts. *Russian Mining Industry Journal*. 2025, no. 3, pp. 71–79. [In Russ]. DOI: 10.30686/1609-9192-2025-3-71-79.

23. Linnik Yu. N., Linnik V. Yu. Analysis of methods for assessing rock fracture resistance under dynamic load application. *Mining Equipment and Electromechanics*. 2025, no. 1 (177), pp. 39–46. [In Russ]. DOI: 10.26730/181-4528-2025-1-39-46.

24. Kramarenko N. V. *Metody podobiya v mekhanike. Analiz razmernostey* [Similarity methods in mechanics. Dimensional analysis], Novosibirsk, 2020, 212 p.

25. Morozov N. F., Petrov Yu. V. *Problemy dinamiki razrusheniya tverdykh tel* [Problems of dynamics of destruction of solids], Saint-Petersburg, 1997, 132 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Жабин Александр Борисович¹ — д-р техн. наук, профессор, e-mail: zhabin.tula@mail.ru,

ORCID ID: 0000-0001-5305-4908,

Лавит Игорь Михайлович¹ — д-р физ.-мат. наук,

профессор, e-mail: IgorLavit@yandex.ru,

ORCID ID: 0000-0002-8683-5943,

Поляков Андрей Вячеславович² — д-р техн. наук,

доцент, эксперт, e-mail: polyakoff-an@mail.ru,

ORCID ID: 0000-0002-0067-6954,

Поляков Алексей Вячеславович² — канд. техн. наук,

эксперт, e-mail: polyakoff-al@mail.ru,

ORCID ID: 0009-0006-6076-6958,

¹ Тульский государственный университет,

² ООО «Единый консалтинговый холдинг».

Для контактов: Жабин А.Б., e-mail: zhabin.tula@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

A.B. Zhabin¹, Dr. Sci. (Eng.), Professor, e-mail: zhabin.tula@mail.ru, ORCID ID: 0000-0001-5305-4908,

I.M. Lavit¹, Dr. Sci. (Phys. Mathem.), Professor, e-mail: IgorLavit@yandex.ru, ORCID ID: 0000-0002-8683-5943,

An.V. Polyakov², Dr. Sci. (Eng.), Assistant Professor, Expert, e-mail: polyakoff-an@mail.ru, ORCID ID: 0000-0002-0067-6954,

Al.V. Polyakov², Cand. Sci. (Eng.), Expert, e-mail: polyakoff-al@mail.ru, ORCID ID: 0009-0006-6076-6958,

¹ Tula State University, Tula, Russia,

² United Consulting Holding LLC, Moscow, Russia.

Corresponding author: A.B. Zhabin, e-mail: zhabin.tula@mail.ru.

Получена редакцией 15.09.2025; получена после рецензии 23.10.2025; принята к печати 10.06.2026.

Received by the editors 15.09.2025; received after the review 23.10.2025; accepted for printing 10.06.2026.