



unesco

Центр  
под эгидой ЮНЕСКО



Международный центр компетенций  
в горнотехническом образовании  
под эгидой ЮНЕСКО

Статья подготовлена при содействии  
АНО «Международный центр  
компетенций в горнотехническом  
образовании» под эгидой ЮНЕСКО

ГИАБ. Горный информационно-аналитический бюллетень /  
МИАВ. Mining Informational and Analytical Bulletin, 2026;(5):155-172  
ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ / ORIGINAL PAPER

УДК 622.363 + 622.834

DOI: 10.25018/0236\_1493\_2026\_5\_0\_155

# ОБОСНОВАНИЕ ВЕЛИЧИН УГЛОВ СДВИЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОТРАБОТКИ ЗАПАСОВ ВЕРХНЕКАМСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ КАЛИЙНО-МАГНИЕВЫХ СОЛЕЙ

**Часть 2. Определение углов сдвижения в условиях  
полной подработки земной поверхности на основании эмпирического  
подхода. Сравнительное сопоставление полученных результатов.  
Углы сдвижения при неполной подработке**

**Ю.С. Щегольков**

ПАО «Уралкалий», Березники, Россия, e-mail: rabota.shegolkov@mail.ru

**Аннотация:** В дополнение к первой части настоящего исследования (см. ГИАБ, 2026, № 2-1, с. 61–84) рассмотрен эмпирический подход к расчету углов сдвижения при полной подработке земной поверхности в условиях Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей (ВМКМС). Установлена эмпирическая модель, позволяющая произвести вычисление угла сдвижения на заданный момент времени. При сравнении полученных систем уравнений с применяемыми в настоящее время фиксированными величинами граничных углов, а также с ранее применяемой на практике методикой определения угла сдвижения, предложенной М.П. Нестеровым, в качестве наиболее приемлемой и удобной для практического использования выбрана эмпирическая зависимость. Для условий неполной подработки земной поверхности, вследствие малочисленности подходящих для анализа наблюдательных станций, предложена комбинированная зависимость, в основе которой лежит эмпирический учет вертикальных деформаций и теоретико-эмпирический учет горизонтальной деформации. Полученные результаты исследования могут быть полезными для совершенствования нормативной базы по рассматриваемой тематике, а также при инженерных расчетах, связанных с определением необходимых размеров предохранительных целиков под объекты на земной поверхности и с оценкой безопасности зданий и сооружений, находящихся в непосредственной близости от границ ведения горных работ в условиях ВМКМС.

**Ключевые слова:** сдвижение, углы сдвижения, оседания, мульда сдвижения, Верхнекамское месторождение калийно-магниевых солей, предохранительные целики, безопасность подрабатываемых объектов, деформации земной поверхности.

**Для цитирования:** Щегольков Ю. С. Обоснование величин углов сдвижения в условиях отработки запасов Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей. Часть 2. Определение углов сдвижения в условиях полной подработки земной поверхности на

© Ю.С. Щегольков. 2026.

---

## Justification of the values of shifting angles in the conditions of mining the reserves of the Verkhnekamskoe deposit of potassium-magnesium salts

### Part 2. Determination of shift angles under conditions of complete undermining of the earth's surface based on an empirical approach. Comparative comparison of the obtained results. Shift angles under incomplete undermining

Y.S. Shchegolkov

PJSC «Uralkali», Berezniki, Russia, e-mail: rabota.shchegolkov@mail.ru

---

**Abstract:** In addition to the first part of this study (*MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2026;(2-1): 61–84), an empirical approach to calculating the displacement angles during complete undermining of the earth's surface under the conditions of the Verkhnekamskoye potassium-magnesium salt deposit (VPMSD) is considered. An empirical model is established that allows the calculation of the displacement angle at a given point in time. When comparing the resulting systems of equations with currently used fixed values of boundary angles, as well as with the previously used method for determining the displacement angle proposed by M.P. Nesterov, the empirical dependence was selected as the most acceptable and convenient for practical use. For conditions of incomplete undermining of the earth's surface, due to the small number of observation stations suitable for analysis, a combined dependence is proposed, which is based on the empirical accounting of vertical deformations and the theoretical-empirical accounting of horizontal deformation. The obtained results of the study can be useful for improving the regulatory framework for the topic under consideration, as well as in engineering calculations related to determining the required sizes of safety pillars for objects on the earth's surface and with assessing the safety of buildings and structures located in the immediate vicinity of the boundaries of mining operations under the VPMSD conditions.

**Key words:** displacement, angles of displacement, subsidence, displacement trough, Verkhnekamskoye potassium-magnesium salt deposit, safety pillars, safety of undermining objects, deformations of the earth's surface.

**For citation:** Shchegolkov Y. S. Justification of the values of shifting angles in the conditions of mining the reserves of the Verkhnekamskoe deposit of potassium-magnesium salts. Part 2. Determination of shift angles under conditions of complete undermining of the earth's surface based on an empirical approach. Comparative comparison of the obtained results. Shift angles under incomplete undermining. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2026;(5):155–172. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2026\_5\_0\_155.

---

## Введение

Как установлено в первой части исследования, оценка величин углов сдвижения  $\delta_i$  на заданный момент времени лежит в основе стремления к балансу между безопасностью подрабатываемых поверхностных объектов и минимизации потерь полезного ископаемого,

оставляемого в предохранительных целиках.

Разработанная в первой части исследования для условий полной подработки земной поверхности на ВМКМС теоретико-эмпирическая модель характеризуется приемлемой точностью определения границы зоны опасных сдвижений

(ЗОС), однако выявленные недостатки, связанные с ошибочными установлениями отсутствия ЗОС при фактическом ее наличии, сформировали необходимость рассмотрения альтернативного подхода, позволяющего находить углы  $\delta_i$  с большей достоверностью. Сказанное будет реализовано в рамках настоящей части исследования на основании эмпирического подхода.

Отсутствие ранее разработанной для условия неполной подработки земной поверхности в условиях ВМКМС методики определения углов сдвига  $\delta_i$  на заданный момент времени, определяет высокую актуальность и целесообразность рассмотрения этой задачи в рамках настоящей части исследования.

### Материалы и методы исследования

В качестве исходных материалов для проведения исследования послужили нормативные документы, посвященные теме исследования, результаты инструментальных наблюдений за процессом сдвига земной поверхности на ВМКМС, информация о результатах физико-механического опробования пород, слагающих подрабатываемую по-

родную толщу, геологическая информация о последней, сформированная на основании данных геологической разведки, планы шахтных полей с параметрами отработки запасов.

В качестве методов исследования, использованных в рамках настоящей работы, послужили анализ литературных источников и нормативной документации по рассматриваемой проблеме, отбор, обработка и анализ геологических данных и результатов опробования на физико-механические свойства пород, результатов инструментальных наблюдений за сдвижением земной поверхности, регрессионный анализ, эмпирические и теоретико-эмпирические методы исследования.

### Результаты исследования и их обсуждение

#### Определение углов сдвига $\delta_i$ в условиях полной подработки земной поверхности на основании эмпирического подхода

В основе рассматриваемого подхода лежит локальное изучение (на интересующем участке сдвига) базовых безразмерных распределений  $S(z)$  и  $F(z)$  для последующего их дифференциро-

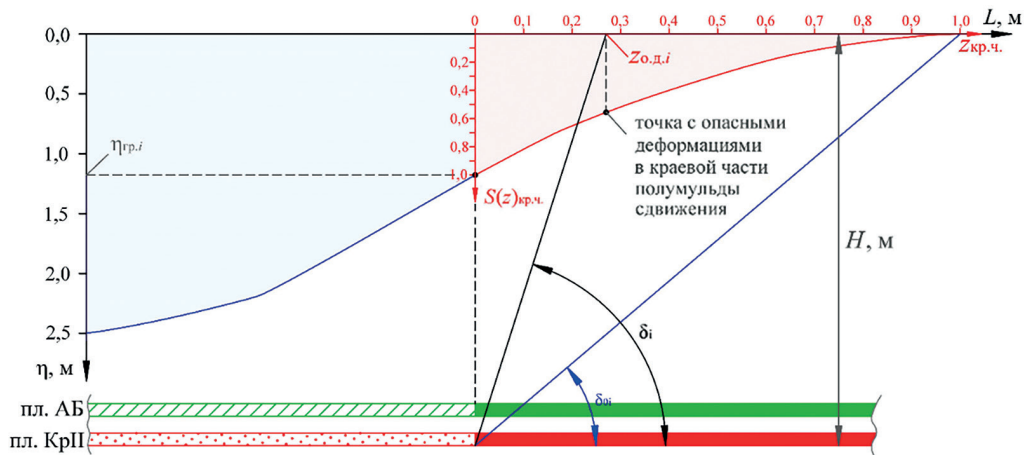


Рис. 1. Схематическое пояснение к определению угла сдвига  $\delta_i$  на основании эмпирического подхода  
 Fig. 1. Schematic explanation of the determination of the shift angle  $\delta_i$  based on the empirical approach

вания с целью определения функций  $S(z)'$ ,  $S(z)''$  и  $F(z)'$ . Использование последних в сочетании с критериями  $i = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  и  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  [1] позволит установить безразмерную абсциссу точки  $z_{\text{о.д.}i}$ , характеризующую опасными деформациями. На основании отметки  $z_{\text{о.д.}i}$  и значения угла полных сдвижений  $\delta_{0i}$  можно рассчитать угол сдвижения  $\delta_i$  на заданный момент времени. Сказанное, более подробно, удобно рассмотреть на примере рис. 1.

Из рис. 1 видно, что угол сдвижения  $\delta_i$  может быть определен из следующей зависимости:

$$\delta_i = \text{arcctg}(z_{\text{о.д.}i} \text{ctg} \delta_{0i}) \quad (1)$$

где  $z_{\text{о.д.}i}$  — безразмерная абсцисса ближайшей к границе мульды сдвижения точки, определенная на заданный период времени на основании соответствия каждой из фактических или расчетных величин деформаций  $i(z)_{\text{кр.ч.}}$ ,  $K(z)_{\text{кр.ч.}}$ ,  $\varepsilon(z)_{\text{кр.ч.}}$  критериальным значениям  $i = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  и  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ ;  $\delta_{0i}$  — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.

Для определения параметра  $z_{\text{о.д.}}$  удобно принять за основу базовые выражения для определения расчетных величин наклонов  $i(z)$ , кривизны  $K(z)$  и горизонтальных деформаций  $\varepsilon(z)$  [Указания по защите рудников от затопления и охране объектов на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей. СПб.–Пермь, 2014; Указания (мероприятия) по защите рудников ПАО «Уралкалий» от затопления и охране объектов на земной поверхности от вредного влияния подземных разработок на ВКМКС. Часть 1. Основные положения. Часть 2. Методические рекомендации. Пермь: ГИ УрО РАН, 2022] которые, применительно к условиям рассматриваемой задачи, можно записать следующим образом:

$$i(z)_{\text{кр.ч.}} = \frac{\eta_{\text{гр.}i} S(z)'_{\text{кр.ч.}}}{H \text{ctg} \delta_{0i}} \quad (2)$$

$$K(z)_{\text{кр.ч.}} = \frac{\eta_{\text{гр.}i} S(z)''_{\text{кр.ч.}}}{H^2 \text{ctg}^2 \delta_{0i}} \quad (3)$$

$$\varepsilon(z)_{\text{кр.ч.}} = \frac{\xi_{\text{гр.}i} F(z)'_{\text{кр.ч.}}}{H \text{ctg} \delta_{0i}} \quad (4)$$

[Прямое использование безразмерных распределений горизонтальных деформаций  $F(z)'$  довольно редко встречается на практике вследствие малочисленности проводимых инструментальных наблюдений за горизонтальным смещением  $\xi$  точек полумульды сдвижения. Довольно часто используют методы аналогии кривых  $S(z)'$  и  $F(z)$  или  $S(z)''$  и  $F(z)'$ , что также отмечалось ранее. Сказанное определяет возможность последующего видоизменения отмеченного выражения], где  $\eta_{\text{гр.}i}$  — фактическая или расчетная величина оседания, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива, м;  $S(z)'_{\text{кр.ч.}}$ ,  $S(z)''_{\text{кр.ч.}}$ ,  $F(z)'_{\text{кр.ч.}}$  — локальные безразмерные функции распределения наклонов  $i$ , кривизны  $K$  и горизонтальных деформаций  $\varepsilon$  в краевой части полумульды сдвижения над нетронутым массивом;  $H$  — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м;  $\delta_{0i}$  — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.;  $\xi_{\text{гр.}i}$  — фактическая или расчетная величина горизонтального смещения земной поверхности, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива, м.

Из уравнений (2), (3), (4) видно, что получение выражений, описывающих изменение параметра  $z_{\text{о.д.}}$  сопряжено с необходимостью установления зависимостей, описывающих изменение параметров  $\eta_{\text{гр.}i}$  и  $\xi_{\text{гр.}i}$  и функций локальных безразмерных распределений оседаний  $S(z)_{\text{кр.ч.}}$  и горизонтальных смещений  $F(z)_{\text{кр.ч.}}$ , являющихся основой для после-

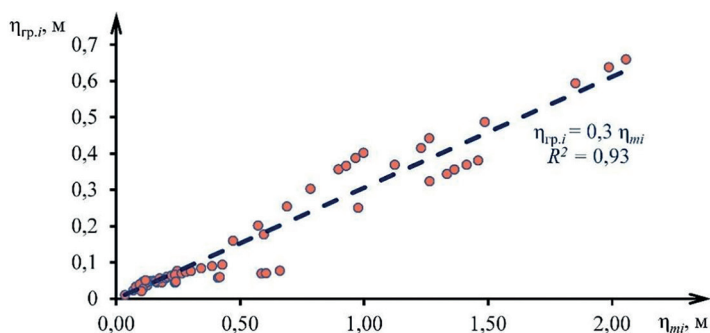


Рис. 2. Корреляционное поле значений достигнутых оседаний над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива  $\eta_{гр,i}$  и величин достигнутых максимальных оседаний  $\eta_{mi}$  в полумульде сдвижения

Fig. 2. Correlation field of the values of the achieved subsidences above the boundary of the considered area of reserves development and the intact massif  $\eta_{гр,i}$  and the values of the achieved maximum subsidences  $\eta_{mi}$  in the displacement half-trough

дующего определения кривых  $S(z)'_{кр.ч.}$ ,  $S(z)''_{кр.ч.}$ ,  $F(z)'_{кр.ч.}$ .

В рассматриваемой ситуации важно заметить, что косвенная оценка параметра  $\eta_{гр,i}$  уже выполнялась ранее при определении эмпирического коэффициента  $k_{\eta_i}$ , что отражено на рис. 7 первой части исследования. Принимая за основу использованные данные по 9-ти отобранным наблюдательным станциям, на рис. 2 оценим распределение величин  $\eta_{гр,i}$  относительно значений  $\eta_{mi}$ . Из рис. 2 видно, что распределение величин  $\eta_{гр,i}$  относительно значений  $\eta_{mi}$  имеет вид, близкий к линейному и хорошо описывается зависимостью  $\eta_{гр,i} = 0,3 \eta_{mi}$  с высоким коэффициентом детерминации  $R^2 = 0,93$ . Полученное выражение пригодно для дальнейшего использования.

Для обоснования величин  $\xi_{гр,i}$  целесообразно воспользоваться рис. 5, представленном в первой части исследования. Представленные на нем графики безразмерных кривых  $T(z)$  наглядно демонстрируют, что точки, характеризующие паритетом между достигнутыми оседаниями и горизонтальными смещениями, находятся над нетронутом массивом с небольшой дислокацией от границы выработанного пространства в сторону границы мульды сдвижения.

Непосредственно над самой границей выработанного пространства и нетронутого массива средняя величина  $T(z)_{гр.сп.}$  составляет 0,85, что близко к 1. В рассматриваемом случае, учитывая малую размерность исходного массива данных, в качестве величины  $T(z)_{гр.сп.}$  уместно принять 1, тогда справедливо следующее выражение:

$$\eta_{гр,i} \approx \xi_{гр,i} \approx 0,3 \eta_{mi} \quad (5)$$

где  $\eta_{mi}$  — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м. Исследование локальных функций  $S(z)_{кр.ч.}$  и  $F(z)_{кр.ч.}$  уместно начать с установления фактических величин их абсцисс и ординат на различные даты инструментальных наблюдений по отобранным профильным линиям грунтовых реперов. Для этого можно воспользоваться следующими зависимостями:

$$z_i = 1 - \frac{l_{ni}}{l_i}, \quad z_i \in [0; 1] \quad (6)$$

$$S(z_i)_{кр.ч.i} = \frac{\eta_{ni}}{\eta_{гр,i}}, \quad S(z_i)_{кр.ч.i} \in [0; 1] \quad (7)$$

$$F(z_i)_{кр.ч.i} = \frac{\xi_{ni}}{\xi_{гр,i}}, \quad F(z_i)_{кр.ч.i} \in [0; 1] \quad (8)$$

где  $l_{ni}$  — расстояние в плане от границы выработанного пространства до  $n$ -го

репера профильной линии (в области нетронутого массива) на рассматриваемую дату инструментальных наблюдений, м;  $l_i$  — расстояние в плане от границы выработанного пространства до границы мульды сдвижения на рассматриваемую дату инструментальных наблюдений, м;  $\eta_{ni}$  — фактическая величина оседания  $n$ -го репера профильной линии (в области нетронутого массива) на рассматриваемую дату инструментальных наблюдений, м;  $\eta_{гр.i}$  — фактическая величина оседания, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива, м;  $\xi_{ni}$  — фактическая величина горизонтального сдвижения  $n$ -го репера профильной линии (в области нетронутого массива) на рассматриваемую дату инструментальных наблюдений, м;  $\xi_{гр.i}$  — фактическая величина горизонтального смещения земной поверхности, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива, м.

Принимая во внимание, что на границе мульды сдвижения оседания и горизонтальные смещения фактически не являются нулевыми, следовательно, минимальные значения функций  $S(z)_{кр.ч.i}$  и  $F(z)_{кр.ч.i}$  будут отличаться от 0 тем сильнее, чем меньше величины  $\eta_{гр.i}$  и  $\xi_{гр.i}$  соответственно. Сказанное определяет необходимость последующего трансформирования рассчитанных фактических локальных кривых оседаний и горизонтальных смещений земной поверхности с целью приведения к 0 их ординат в точках с абсциссой  $z_i = 1$ . Для этого удобно воспользоваться зависимостями:

$$S(z_i)_{кр.ч.тр.i} = \frac{S(z_i)_{кр.ч.i} - S(z_i = 1)_{кр.ч.i}}{1 - S(z_i = 1)_{кр.ч.i}},$$

$$S(z_i)_{кр.ч.тр.i} \in [0; 1] \quad (9)$$

$$F(z_i)_{кр.ч.тр.i} = \frac{F(z_i)_{кр.ч.i} - F(z_i = 1)_{кр.ч.i}}{1 - F(z_i = 1)_{кр.ч.i}},$$

$$F(z_i)_{кр.ч.тр.i} \in [0; 1] \quad (10)$$

где  $S(z)_{кр.ч.i}$  и  $F(z)_{кр.ч.i}$  — ординаты фактических локальных кривых оседаний и горизонтальных смещений земной поверхности, рассчитываемые на рассматриваемую дату инструментальных наблюдений из выражений (7) и (8) соответственно;  $S(z = 1)_{кр.ч.i}$  и  $F(z = 1)_{кр.ч.i}$  — ординаты фактических локальных кривых оседаний и горизонтальных смещений земной поверхности, рассчитываемые на рассматриваемую дату инструментальных наблюдений в точках с абсциссой  $z_i = 1$  из выражений (7) и (8) соответственно.

Учитывая, что на начальном этапе развития процесса сдвижения локальные функции  $S(z)_{кр.ч.i}$  и  $F(z)_{кр.ч.i}$  характеризуются наибольшими погрешностями определения их ординат важно исключить из рассмотрения некоторые принимаемые во внимание наблюдения для повышения достоверности итогового результата исследования. Сделать это для функции  $S(z)_{кр.ч.}$  довольно просто путем использования метода «расчет на худшие условия» при исследовании распределений наибольших фактических величин вертикальных деформаций  $i$  и  $K$  в полумульде сдвижения. Произведенный на основании обработки данных по 10 отобраным наблюдательным станциям анализ, позволил установить выраженные сгруппированности величин наибольших достигнутых наклонов  $i_{maxi}$  с параметрами наибольшей достигнутой кривизны  $K_{maxi}$  и достигнутыми оседаниями  $\eta(t)$  над центральными частями выемочных зон, непосредственно примыкающих к границе выработанного пространства, что наглядно отражено на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что нижняя граница области значений пары параметров

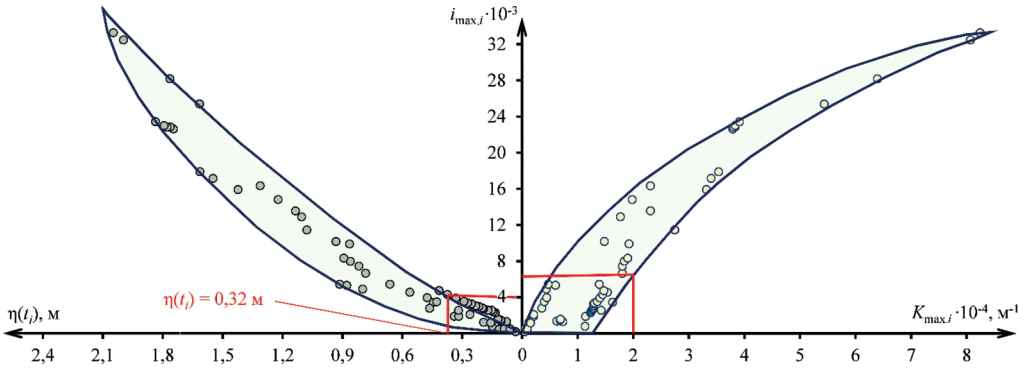


Рис. 3. Корреляционные поля пар значений параметров  $i_{\max i} - \eta(t_i)$  и  $i_{\max i} - K_{\max i}$   
 Fig. 3. Correlation fields of pairs of parameter values  $i_{\max i} - \eta(t_i)$  and  $i_{\max i} - K_{\max i}$

$i_{\max i}$  и  $K_{\max i}$  определяет величину ординаты около  $6,5 \cdot 10^{-3}$  при соответствии отметке абсциссы критерию  $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ . Так как значение  $6,5 \cdot 10^{-3}$  превышает критериальное  $i = 4 \cdot 10^{-3}$ , в качестве определяющего использовано последнее. Ординате  $i_{\max i} = 4 \cdot 10^{-3}$  соответствует минимально возможная величина абсциссы  $\eta(t_i) = 0,32 \text{ м} \approx 0,3 \text{ м}$ , следовательно, дальнейшему рассмотрению с целью определения геометрии кривой  $S(z)_{\text{кр.ч.}}$  подлежат наблюдения соответствующие условию  $\eta(t_i) > 0,3 \text{ м}$ . Рассматривая локальные безразмерные распределения горизонтальных сдвижений  $F(z)_{\text{кр.ч.}}$  уместно заметить, что наибольшие значения функций  $F(z)_{\text{кр.ч.}}$  на рис. 5 первой части исследования не превышают 6, тогда наибольшие горизонтальные сдвижения  $\xi_{\text{mi}}$ , с учетом аналогии

выражению (4) и соответствия величине  $\varepsilon(z)$  критериального значения  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ , могут быть охарактеризованы зависимостью:

$$\xi_{\text{mi},i} = 3,3 \cdot 10^{-4} H L_i, \quad (11)$$

где  $H$  — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м;  $L_i$  — фактическая длина полумульды сдвижения на рассматриваемую дату наблюдений, м.

Вводя упрощающее допущение о соответствии величин  $\xi_{\text{mi}}$  и  $\xi_{\text{гр},i}$ , на основании зависимости (11) можно сделать вывод, что дальнейшему рассмотрению с целью определения геометрии кривой  $F(z)_{\text{кр.ч.}}$  подлежат наблюдения соответствующие условию  $\xi_{\text{mi}} > 3,3 \cdot 10^{-4} H L_i$ .

При анализе результатов выполненной обработки данных натурных инструментальных наблюдений было заме-

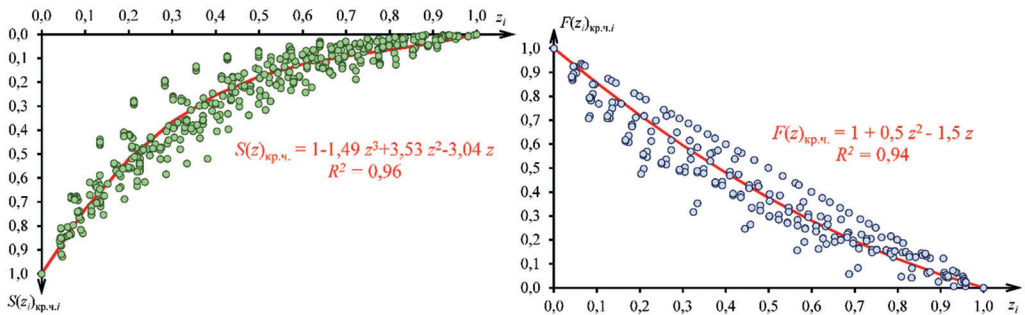


Рис. 4. Обобщенные распределения значений функций  $S(z)_{\text{кр.ч.}}$  и  $F(z)_{\text{кр.ч.}}$  относительно их аргументов  $z_i$   
 Fig. 4. Generalized distributions of the values of the functions  $S(z)_{\text{кр.ч.}}$ ,  $F(z)_{\text{кр.ч.}}$  with respect to their arguments  $z_i$

Таблица 1

**Определение значений локальных функций  $S(z)_{кр.ч.}$ ,  $S'(z)_{кр.ч.}$ ,  $S''(z)_{кр.ч.}$ ,  $F(z)_{кр.ч.}$ ,  $F'(z)_{кр.ч.}$ ,  $F''(z)_{кр.ч.}$  для условий полной подработки земной поверхности**  
**Determination of the values of local functions  $S(z)_{кр.ч.}$ ,  $S'(z)_{кр.ч.}$ ,  $S''(z)_{кр.ч.}$ ,  $F(z)_{кр.ч.}$ ,  $F'(z)_{кр.ч.}$ ,  $F''(z)_{кр.ч.}$  for conditions of complete undermining of the earth's surface**

$z$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$S(z)_{кр.ч.}$	1	0,73	0,52	0,37	0,25	0,18	0,12	0,09	0,06	0,04	0
$F(z)_{кр.ч.}$	1	0,86	0,72	0,6	0,48	0,38	0,28	0,2	0,12	0,05	0
$S'(z)_{кр.ч.}$	3,04	2,39	1,82	1,34	0,95	0,64	0,43	0,28	0,14	0,07	0
$S''(z)_{кр.ч.}$	7,42	6,9	6,1	4,6	3,5	2,5	1,75	1,25	0,8	0,37	0
$F'(z)_{кр.ч.}$	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1	0,87	0,68	0,48	0,27	0

чено, что геометрия кривых  $S(z)_{кр.ч.i}$  и  $F(z)_{кр.ч.i}$  не склонна к значительным изменениям во времени на каждой из рассмотренных наблюдательных станций. Полученные обобщенные данные о распределении вычисленных значений безразмерных функций  $S(z)_{кр.ч.i}$  и  $F(z)_{кр.ч.i}$  относительно их аргументов  $z_i$  представлены на рис. 4.

Из рис. 4 можно заметить, что полученные данные хорошо аппроксимируются полиномиальными функциями с высокими коэффициентами детерминации  $R^2$ , при этом последующее прямое дифференцирование таких функций с целью определения кривых  $S(z)_{кр.ч.}$ ,  $S(z)''_{кр.ч.}$ ,  $F(z)_{кр.ч.}$  не уместно [2–4]. В этом легко убедиться если принять во внимание, что второй производной от кубического полинома является линейная функция, тогда кривая  $S(z)''_{кр.ч.}$  будет являться линейным распределением, а это не согласуется с видом краевой части функций  $S(z)''$ , отраженным на рис. 5, представленном в первой части исследования. Применительно к рассматриваемым условиям наиболее оптимальным решением будет являться табличное выражение базовых функций  $S(z)_{кр.ч.}$  и  $F(z)_{кр.ч.}$  с последующим кусочно-линейным их дифференцированием и сглаживанием полученных кривых, что отражено в табл. 1.

Анализируя полученные в табл. 1 безразмерные локальные распределения,

можно заметить низкую значимость полученных функций кривизны  $S(z)''_{кр.ч.}$  для определения углов сдвижения  $\delta$ . Доказать сказанное наиболее просто если из зависимостей (2)–(3) выразить параметр  $S(z)'_{кр.ч.}$  через  $S(z)'_{кр.ч.}$ , учитывая при этом соответствие величинам  $i(z)_{кр.ч.}$  и  $K(z)_{кр.ч.}$  критериальных значений  $i = 4 \cdot 10^{-3}$  и  $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ :

$$S(z)''_{кр.ч.} = 0,05S(z)'_{кр.ч.} Hctg\delta_{0i} \quad (12)$$

где  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $S(z)''_{кр.ч.}$  – величины локальных безразмерных функций распределения наклонов  $i$  и кривизны  $K$  соответствующих критериальным значениям  $i = 4 \cdot 10^{-3}$  и  $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ ;  $H$  – глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м;  $\delta_{0i}$  – величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.

При минимальной глубине разработки  $H = 200$  м и наибольшем значении  $\delta_{0i} = 58,1^\circ$  (принято на основании работы [5] с учетом вышеопределенной величины учитываемых оседаний  $\eta(t_i) = 0,3$  м) выражение 12 примет вид:  $S(z)''_{кр.ч.} = 6,22 S(z)'_{кр.ч.}$ . Применяя последнее к данным табл. 1 наглядно видно, что абсциссы  $z_i$  для любых значений функций  $S(z)'_{кр.ч.}$  будут всегда больше абсцисс  $z_k$  для соответствующих вычисленных значений функций  $S(z)''_{кр.ч.}$ , следовательно, углы сдвижения  $\delta_{ij}$ , определенные по критерию наклона  $i = 4 \cdot 10^{-3}$ , будут всегда меньше углов сдвижения

$\delta_{ик}$ , определенных по критерию кривизны  $K = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ . Сказанное позволяет исключить из последующего рассмотрения функции  $S(z)''_{кр.ч.}$ .

При использовании принимаемых для дальнейшего рассмотрения табличных распределений  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $F(z)'_{кр.ч.}$  необходимо понимать, что они являются отражением осредненных по рассмотренным наблюдательным станциям данных и полученные на основании их значений максимальные расчетные деформации могут отличаться от фактических. Особую значимость в описанной ситуации имеют отличия в меньшую сторону, поскольку они определяют увеличение расчетных углов сдвига  $\delta$ , что, в свою очередь, создает предпосылки для возникновения негативного воздействия на поверхностные объекты.

С целью обеспечения наиболее полного учета фактических максимальных деформаций на рассматриваемом участке полумульды сдвига имеется целесообразность корректировки полученных табличных значений функций  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $F(z)'_{кр.ч.}$  путем умножения их на поправочные коэффициенты  $k_i$  и  $k_\varepsilon$ , являющиеся некими аналогами коэффициентов перегрузки. Расчет  $k_i$  и  $k_\varepsilon$  удобнее всего выполнить на основании следующих зависимостей:

$$k_i = \frac{i_{кр.ч.макс} l_i}{3,04 \eta_{гр.i}}, \quad (13)$$

$$k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{кр.ч.макс} l_i}{1,50 \xi_{гр.i}}, \quad (14)$$

где  $i_{кр.ч.макс}$  — фактическая величина максимального наклона, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива;  $l_i$  — расстояние в плане от границы выработанного пространства до границы мульды сдвига на рассматриваемую дату ин-

струментальных наблюдений, м;  $\eta_{гр.i}$  — фактическая величина оседания, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива, м;  $\varepsilon_{кр.ч.макс}$  — фактическая величина горизонтальной деформации, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива;  $\xi_{гр.i}$  — фактическая величина горизонтального смещения земной поверхности, определенная на заданный период времени над границей рассматриваемого участка отработки запасов и нетронутого массива, м.

Вычисленные на основании зависимостей (13) и (14) (в области учитываемых фактических деформаций  $i_{кр.ч.макс} \geq 4 \cdot 10^{-3}$  и  $\varepsilon_{кр.ч.макс} \geq 2 \cdot 10^{-3}$ ) коэффициенты  $k_i$  и  $k_\varepsilon$  лежат соответственно в диапазонах значений от 0,82 до 1,62 (среднее значение 1,07) и от 1,18 до 1,94 (среднее значение 1,63). Учитывая малую размерность сформированных массивов данных, для дальнейших расчетов целесообразно принять  $k_i \approx 2,00$  и  $k_\varepsilon \approx 2,00$ .

Принимая во внимание, что последующее использование табличных распределений  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $F(z)'_{кр.ч.}$  будет не удобно с практической точки зрения, формируется необходимость их представления в аналитическом виде. С позиции оптимального описания исходных данных и удобства последующего выражения аргумента  $z$ , приемлемы следующие уравнения, полученные с учетом корректирующих коэффициентов  $k_i$  и  $k_\varepsilon$ :

$$S(z)'_{кр.ч.} = 6,08 - 12,08z + 6,00z^2 \quad (15)$$

$$F(z)'_{кр.ч.} = 3,00 - 0,70z - 2,30z^2 \quad (16)$$

где  $S(z)'_{кр.ч.}$ ,  $F(z)'_{кр.ч.}$  — локальные упрощенные безразмерные функции распределения наклонов  $i$  и горизонтальных деформаций  $\varepsilon$  в краевой части полумульды сдвига над нетронутом мас-

сивом в условиях полной подработки земной поверхности;  $z$  — безразмерная абсцисса.

Далее, подставляя уравнения (15), (16) и (5) в зависимости (2) и (4) и выражая аргумент  $z$  (приравнивая при этом параметры  $i(z)_{кр.ч.}$  и  $\varepsilon(z)_{кр.ч.}$  к соответствующим критериальным значениям  $i = 4 \cdot 10^{-3}$  и  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ ), определяем зависимости для нахождения абсцисс  $z_{о.д.}$ . Подставляя последние в выражение (1) и производя некоторые математические преобразования получим итоговую систему уравнений для определения величины граничного угла  $\delta_i$  на заданный момент времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } s = \frac{Hctg\delta_{0i}}{\eta_{mi}} \geq 452,1 \Rightarrow \text{зона опасных сдвижений отсутствует,} \\ \text{иначе } \delta_i = \min(\delta_{ii}, \delta_{ei}) \\ \delta_{ii} = \begin{cases} 89,9^\circ \text{ при } s \geq 472,6 \\ \text{arcctg}\left(\left[1 - 0,046\sqrt{s}\right]ctg\delta_{0i}\right) \text{ при } s < 472,6 \end{cases} \\ \delta_{ei} = \begin{cases} 89,9^\circ \text{ при } s \geq 452,1 \\ \text{arcctg}\left(\left[-0,15 + \sqrt{1,32 - 2,87 \cdot 10^{-3}s}\right]ctg\delta_{0i}\right) \text{ при } s < 452,1 \end{cases} \end{array} \right. \quad (17)$$

где  $s$  — вспомогательный коэффициент, применяемый для упрощения записи итогового результата;  $H$  — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м;  $\delta_{0i}$  — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.;  $\eta_{mi}$  — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м.

*Сравнительное сопоставление фактических углов сдвижения  $\delta_i$  с результатами их определения на основании вышерассмотренных подходов применительно к условиям полной подработки земной поверхности*

На основе анализа результатов инструментальных наблюдений по 10 ранее рассмотренным наблюдательным станциям было замечено, что большая часть принятых во внимание наблюдений характеризуется отсутствием ЗОС (критерий  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  учитывался только при наличии своевременных измерений длин интервалов между грунтовыми реперами). Вычисленные фактические величины углов  $\delta_{fi}$  близки между собой, среднее их значение  $\delta_{ф.ср.}$  составляет  $84,4^\circ$ , а максимальная относительная ошибка  $\varepsilon_{max}$  отклонения  $\delta_{ф.ср.}$  от  $\delta_{fi}$  достигает 9,6%.

Величины углов  $\delta_i$ , полученные из выражения (19) первой части исследования при фактических величинах параметров  $\eta_{mi}, \gamma_{ср.}, H, \delta_{0i}, E_{ср.}, m_q, \psi$  лежат в диапазоне от  $73,5^\circ$  до  $85,9^\circ$  и составляют в среднем  $78,1^\circ$ . Можно отметить довольно хорошую согласованность вычисленных значений  $\delta_i$  с фактическими  $\delta_{fi}$  (средняя разница составляет всего  $3,1^\circ$ ), что характеризует рассмотренный подход с положительной стороны. Справедливо также отметить и наличие существенных недостатков, к которым относятся наличие ложных определений углов  $\delta_i$  при фактическом отсутствии ЗОС, а также присутствие ошибочных определений ЗОС при фактическом ее наличии. Последнее обстоятельство, с позиции надежности определения рассматриваемых углов, не позволяет использовать на практике полученную в первой части исследования теоретико-эмпирическую зависимость (19).

Углы  $\delta_i$ , полученные из выражения (17) при фактических величинах параметров  $H$ ,  $\delta_{0i}$  и  $\eta_{mi}$ , лежат в диапазоне от  $58,4^\circ$  до  $86,2^\circ$  и составляют в среднем  $67,2^\circ$ . Полученные значения  $\delta_i$  в среднем меньше фактических  $\delta_{fi}$  на  $19,7^\circ$ , что формирует значительный запас надежности определения местоположения точки с опасными деформациями земной поверхности. В рассматриваемом эмпирическом подходе, как и в предыдущем теоретико-эмпирическом, присутствуют ложные определения углов  $\delta_i$  при фактическом отсутствии ЗОС. Учитывая возможность уточнения полученного эмпирического выражения (17) путем последующих корректировок вида функций  $S(z)'_{кр.ч.}$ ,  $F(z)'_{кр.ч.}$  и значений коэффициентов  $k_i$  и  $k_\varepsilon$  после накопления новых данных результатов инструментальных наблюдений, уместно сделать вывод о пригодности его практического использования и наличии потенциала для последующего совершенствования.

Определение углов  $\delta_i$  по методике М.П. Нестерова [6] характеризуется гораздо большей трудоемкостью относительно расчетов с использованием зависимостей (19) (первой части исследования) и (17). Сказанное объясняется многообразием типовых функций распределения относительных деформаций  $S(z)'$  и  $S(z)''$  и табличным видом задания их значений. Углы  $\delta_i$ , полученные на основании уравнения (1) при фактических величинах угла  $\delta_{0i}$  и длинах полумульд сдвига  $L_i$  с использованием типовых функций  $S(z)'$  и  $S(z)''$  из «Указаний» 1994–2004 гг., лежат в диапазоне от  $55,2^\circ$  до  $73,8^\circ$  и составляют в среднем  $63,7^\circ$ . В целом, наблюдается схожесть рассчитанных величин  $\delta_i$  с аналогичными значениями, полученными из зависимости (17) (разница в среднем составляет около  $5^\circ$ ). Расчетные величины углов  $\delta_i$ , как и в предыдущем случае, меньше  $\delta_{fi}$  в среднем на  $19,7^\circ$ . Коли-

чество ложных определений угла  $\delta_i$  при фактическом отсутствии ЗОС значительно выше, чем в двух вышерассмотренных подходах. Изложенное характеризует рассматриваемый подход как возможный для практического использования, однако выбор его менее приоритетен относительно зависимости (17).

Принимая во внимание фиксированные величины граничных углов ( $\delta_0 = 55^\circ$  для построения постоянных предохранительных целиков и  $\delta_0 = 65^\circ$  для временных предохранительных целиков), регламентированными последней версией «Указаний» и используемых в качестве альтернативы углов сдвига  $\delta$ , справедливо заметить, что все вышерассмотренные способы определения расчетных углов  $\delta_i$  характеризуются средними значениями  $\delta_{cp.}$ , превышающими  $\delta_0$ . Сказанное, с позиции стремления к балансу между безопасностью подрабатываемых объектов и минимизации потерь полезного ископаемого, позволяет сделать вывод о наличии выраженных преимуществ использования аналитических выражений по определению угла сдвига  $\delta_i$  на заданный период времени относительно фиксированных углов  $\delta_0$ .

На основании вышеизложенного можно заключить, что для практического использования наиболее приемлема эмпирическая зависимость (17), при этом, она нуждается в последующих корректировках после накопления новых данных результатов инструментальных наблюдений путем изменения вида функций  $S(z)'_{кр.ч.}$ ,  $F(z)'_{кр.ч.}$  и уточнения значений корректирующих коэффициентов  $k_i$  и  $k_\varepsilon$ .

#### *Определение углов сдвига $\delta_i$ в условиях неполной подработки земной поверхности*

На основании анализа «Указаний» различных лет можно сделать вывод о том, что до 2008 г. основное внимание

уделялось полной подработке земной поверхности, как наиболее распространенной на ВМКМС. К настоящему моменту времени для рассматриваемых условий нет какой-либо разработанной методики для определения угла сдвига  $\delta_i$  на заданный период времени.

Принимая во внимание малочисленность наблюдательных станций, пригодных для анализа вертикальной составляющей процесса сдвига в краевой части мульды (удалось отобрать лишь две) и отсутствие своевременно заложенных профильных линий с наблюдениями длин интервалов между парами реперов, несложно прийти к выводу о возможности получения в рамках настоящей работы лишь приблизительной зависимости для определения угла  $\delta_i$ .

Поиск упомянутой зависимости целесообразно начать с исследования механизма формирования мульды сдвига при неполной подработке земной поверхности, теоретическая модель которого, на основании анализа работ [7–20 и др.], применительно к пологому залеганию свиты обрабатываемых пластов имеет вид, представленный на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что сдвигение массива на интервале от границы зоны об-

рушения до условно выделенного  $k$ -го горизонта принципиально не отличается от представленного на рис. 3 первой части исследования для условий полной подработки земной поверхности. Начиная с глубины  $H_k$  происходит слияние внутренних поверхностей характерных смещений слоев массива (определяемых линиями углов полных сдвигов  $\psi$ ) в общую смежную поверхность, граница которой близка к линии, образуемой при построении угла максимальных оседаний  $\theta$ . Отмеченный интервал сдвига слоев массива является наиболее значимым для формирования отличительных особенностей образования краевой части полумульды сдвига в условиях неполной подработки земной поверхности.

Искомая зависимость для определения угла  $\delta_i$  в рассматриваемых условиях, не может быть полноценно определена на основании вышерассмотренных подходов. Основным препятствием для ее получения является отсутствие достаточного количества натуральных данных, необходимых как для калибровки теоретической модели, так и для получения полноценного эмпирического выражения. В этом случае возможно использо-

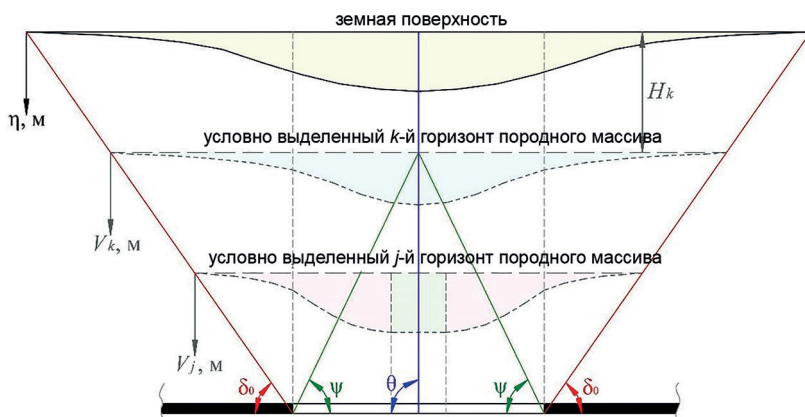


Рис. 5. Модель формирования краевой части мульды сдвига при неполной подработке земной поверхности

Fig. 5. Model of formation of the marginal part of the displacement trough during incomplete undermining of the earth's surface

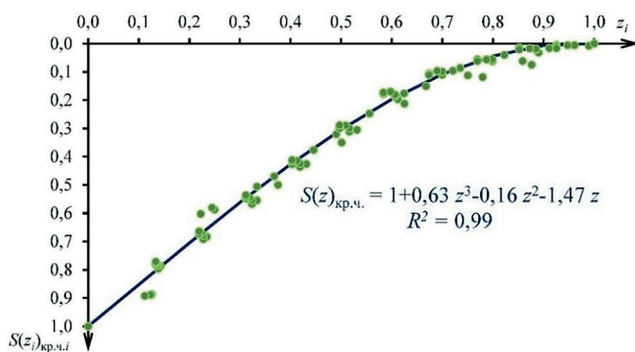


Рис. 6. Обобщенное распределение значений функции  $S(z)_{кр.ч.i}$  относительно аргументов  $z_i$   
 Fig. 6. Generalized distribution of the values of the function  $S(z)_{кр.ч.i}$  with respect to arguments  $z_i$

вание комбинированного подхода, в основе которого лежит эмпирический учет вертикальной составляющей и теоретико-эмпирический учет горизонтальной составляющей процесса сдвигения земной поверхности.

С целью получения эмпирических уравнений, позволяющих определить угол  $\delta_i$  на основании критериев наклона  $i$  и кривизны  $K$  произведена обработка натуральных данных способом, аналогичным вышерассмотренному для полной подработки земной поверхности. В результате получено представленное на рис. 6 обобщенное распределение значений функции  $S(z)_{кр.ч.i}$  относительно аргументов  $z_i$ .

Из рис. 6 видно, что полученные данные, как и в вышерассмотренной ситуации, хорошо аппроксимируются полиномиальной функцией с высоким коэффициентом детерминации  $R^2$ . Определение вида кривых  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $S(z)''_{кр.ч.}$  выполнено на основании табличного

выражение функции  $S(z)_{кр.ч.}$  с последующим кусочно-линейным ее дифференцированием и сглаживанием полученных кривых, что отражено в табл. 2.

Применяя для рассматриваемых условий ранее полученное выражение  $S(z)''_{кр.ч.} = 6,22 S(z)'_{кр.ч.}$ , из табл. 2 становится видно, что в краевой части интервала абсцисс  $z$  от 0,8 до 1,0 наблюдается преобладание значимости кривой  $S(z)''_{кр.ч.}$  над кривой  $S(z)'_{кр.ч.}$ .

Сказанное определяет необходимость последующего учета обеих безразмерных кривых  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $S(z)''_{кр.ч.}$ . Учитывая, что принятые во внимание данные инструментальных наблюдений характеризуются фактическим отсутствием ЗОС, что определяет невозможность вычисления корректирующих коэффициентов  $k_i$  и  $k_k$ , с целью формирования запаса надежности определения угла  $\delta_i$  в текущих условиях целесообразно принять минимум двукратные значения ординат полученных табличных функ-

Таблица 2

**Определение значений локальных функций  $S(z)_{кр.ч.}$ ,  $S'(z)_{кр.ч.}$  и  $S''(z)_{кр.ч.}$  для условий неполной подработки земной поверхности**

**Determination of the values of local functions  $S(z)_{кр.ч.}$ ,  $S'(z)_{кр.ч.}$  and  $S''(z)_{кр.ч.}$  for conditions of incomplete undermining of the earth's surface**

$z$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$S(z)_{кр.ч.}$	1,00	0,85	0,70	0,56	0,43	0,30	0,20	0,11	0,04	0,01	0,00
$S'(z)_{кр.ч.}$	1,50	1,48	1,45	1,39	1,29	1,15	0,98	0,76	0,49	0,22	0,00
$S''(z)_{кр.ч.}$	0,00	0,25	0,45	0,80	1,20	1,55	1,95	2,45	2,70	2,00	0,00

ций  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $S(z)''_{кр.ч.}$ . После преобразования последних в упрощенный аналитический вид получены следующие уравнения:

$$S(z)'_{кр.ч.} = 3,0 + 0,2z - 3,2z^2 \quad (18)$$

$$S(z)''_{кр.ч.} = -77,0 + 207,0z - 130,0z^2, \quad z_i \in [0,8; 1,0] \quad (19)$$

где  $S(z)'_{кр.ч.}$  и  $S(z)''_{кр.ч.}$  — локальные упрощенные безразмерные функции распределения наклонов  $i$  и кривизны  $K$  в краевой части полумульды сдвижения над нетронутым массивом в условиях неполной подработки земной поверхности;  $z$  — безразмерная абсцисса.

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае фактические отношения величин  $\eta_{гр.i}$  и  $\eta_{mi}$  лежат в диапазоне значений 0,27 до 0,40 и составляют в среднем 0,35, можно записать следующее выражение:

$$\eta_{гр.i} \approx 0,35 \eta_{mi} \quad (20)$$

где  $\eta_{mi}$  — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м.

Далее, подставляя уравнения (18), (19), (20) в формулы (2), (3) и выражая аргумент  $z$  (приравнивая при этом параметры  $i(z)_{кр.ч.}$  и  $\varepsilon(z)_{кр.ч.}$  к соответствующим критериальным значениям  $i = 4 \cdot 10^{-3}$  и  $K = 2 \cdot 10^{-4}$ ), определяем зависимости для нахождения абсцисс  $z_{од.}$ . Подставляя последние в выражение (1) и производя некоторые математические преобразования получим итоговую систему уравнений для определения величины граничного угла  $\delta_i$  на заданный момент времени на основании учета критериев наклона и кривизны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если} \left\{ v_i = \frac{H \text{ctg} \delta_{0i}}{\eta_{mi}} \geq 260,5 \right\} \wedge \left\{ v_k = \frac{H^2 \text{ctg}^2 \delta_{0i}}{\eta_{mi}} \geq 9432,6 \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{зона опасных сдвижений отсутствует, иначе } \delta_i = \min(\delta_{ii}, \delta_{ki}) \\ \delta_{ii} = \begin{cases} 89,9^\circ \text{ при } v_i \geq 260,5 \\ \text{arcctg} \left( \left[ 0,03 + \sqrt{0,93 - 3,57 \cdot 10^{-3} v_i} \right] \text{ctg} \delta_{0i} \right) \text{ при } v_i < 260,5 \end{cases} \\ \delta_{ki} = \begin{cases} 89,9^\circ \text{ при } v_k \geq 9432,6 \\ \text{arcctg} \left( \left[ 0,79 + \sqrt{0,04 - 4,23 \cdot 10^{-6} v_k} \right] \text{ctg} \delta_{0i} \right) \text{ при } v_k < 9432,6 \end{cases} \end{array} \right. \quad (21)$$

где  $v_i$  и  $v_k$  — вспомогательные коэффициенты, применяемые для упрощения записи итогового результата;  $H$  — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м;  $\delta_{0i}$  — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.;  $\eta_{mi}$  — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м.

Дополнить полученную систему уравнений (21) можно учетом угла сдвижения  $\delta_{ei}$ , определенного на основании аналогии с вышеописанным теоретико-эмпирическим подходом для условий полной подработки земной поверхности. В рассматриваемой ситуации зависимость для расчета горизонтальных деформаций по длине краевой части полумульды сдвижения не будет принципиально отличаться от выражения (18), представленного в первой части исследования. Тогда, с учетом небольшого завышения ранее определенного эмпирического коэффициента  $k_\xi$  до 3,0, можно записать:

$$\varepsilon_i(l_0) = 48 \frac{\eta_{mi} m_q (H \operatorname{ctg} \delta_{0i} - l_0)}{D^2 H \operatorname{ctg} \delta_{0i}} \quad (22)$$

где  $\eta_{mi}$  — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м;  $m_q$  — фактическая мощность верхнего слоя (наносов) на рассматриваемом участке отработки запасов, м;  $H$  — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м;  $\delta_{0i}$  — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.;  $l_0$  — расстояние в плане от произвольной точки рассматриваемой области массива до постоянной границы выработанного пространства ( $0 \leq l_0 \leq H \operatorname{ctg} \delta_{0i}$ ), м;  $D$  — ширина выработанного пространства, м. Приравнявая величину  $\varepsilon_i(l_0)$  в формуле (22) к критериальному значению  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  и выражая параметр  $l_0$ , определим зависимость для расчета угла сдвижения  $\delta_{\varepsilon i}$ . Подставляя последнюю в выражение (21), получим итоговую систему уравнений для определения угла сдвижения  $\delta_i$  на рассматриваемый период времени в условиях неполной подработки земной поверхности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } \left\{ v_i = \frac{H \operatorname{ctg} \delta_{0i}}{\eta_{mi}} \geq 260,5 \right\} \wedge \left\{ v_k = \frac{H^2 \operatorname{ctg}^2 \delta_{0i}}{\eta_{mi}} \geq 9432,6 \right\} \wedge \\ \wedge \left\{ v_\varepsilon = \frac{24000 \eta_{mi} m_q}{D^2} \leq 1 \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{зона опасных сдвижений отсутствует, иначе } \delta_i = \min(\delta_{ii}, \delta_{ki}, \delta_{\varepsilon i}) \\ \delta_{ii} = \begin{cases} 89,9^\circ \text{ при } v_i \geq 260,5 \\ \operatorname{arcctg} \left( \left[ 0,03 + \sqrt{0,93 - 3,57 \cdot 10^{-3} v_i} \right] \operatorname{ctg} \delta_{0i} \right) \text{ при } v_i < 260,5 \end{cases} \\ \delta_{ki} = \begin{cases} 89,9^\circ \text{ при } v_k \geq 9432,6 \\ \operatorname{arcctg} \left( \left[ 0,79 + \sqrt{0,04 - 4,23 \cdot 10^{-6} v_k} \right] \operatorname{ctg} \delta_{0i} \right) \text{ при } v_k < 9432,6 \end{cases} \\ \delta_{\varepsilon i} = \begin{cases} 89,9^\circ \text{ при } v_\varepsilon \leq 1 \\ \operatorname{arcctg} \left( \frac{\eta_{mi} m_q \operatorname{tg} \delta_{0i}}{\eta_{mi} m_q - 4,17 \cdot 10^{-5} D^2} \right) \text{ при } v_\varepsilon > 1 \end{cases} \end{array} \right. \quad (23)$$

где  $v_i$ ,  $v_k$  и  $v_\varepsilon$  — вспомогательные коэффициенты, применяемые для упрощения записи итогового результата;  $H$  — глубина до подошвы нижнего пласта над границей отработки запасов, м;  $\delta_{0i}$  — величина граничного угла на рассматриваемый момент времени, град.;  $\eta_{mi}$  — фактическое или прогнозное максимальное оседание в полумульде сдвижения на заданный момент времени, м;  $m_q$  — фактическая мощность верхнего слоя (наносов) на рассматриваемом участке отработки запасов, м;  $D$  — ширина выработанного пространства, м.

Полученная итоговая система уравнений (23) нуждается в последующем рассмотрении после накопления натуральных данных инструментальных наблюдений над участками отработки запасов с размерами выработанного пространства, обеспечивающими неполную подработку земной поверхности.

## Выводы

1. В ходе выполненного исследования получены теоретико-эмпирическая и эмпирическая зависимости, позволяющие выполнить расчет углов сдвига  $\delta_i$  на заданный момент времени в условиях полной подработки земной поверхности. При сравнении полученных систем уравнений с применяемыми в настоящее время фиксированными величинами граничных углов, а также с ранее применяемой на практике методикой определения угла сдвига  $\delta(t)$ , предложенной М.П. Нестеровым, в качестве наиболее приемлемой и удобной для практического использования выбрана эмпирическая система уравнений (17). Последняя нуждается в последующих корректировках после накопления новых данных результатов инструментальных наблюдений путем изменения вида функций  $S(z)'_{кр.ч.}$ ,  $F(z)'_{кр.ч.}$  и уточнения значений корректирующих коэффициентов  $k_i$  и  $k_\epsilon$ ;

2. Поиск выражения для определения угла  $\delta_i$  в условиях неполной подработки осложнен малочисленностью натуральных данных инструментальных наблюдений над соответствующими участками отработки запасов. Для получения приблизительной зависимости, позволяющей оценить величину угла  $\delta_i$  в рассматриваемых условиях использован комбини-


рованный подход, в основе которого лежал эмпирический учет вертикальной составляющей и теоретико-эмпирический учет горизонтальной составляющей процесса сдвига земной поверхности. В результате получена система уравнений (23), которая нуждается в последующем пересмотре после накопления новых данных инструментальных наблюдений;

3. К целям последующих исследований, проведение которых целесообразно после накопления новых данных инструментальных наблюдений, можно отнести усложнение полученных моделей путем выявления и учета значимых факторов. Среди последних особенно выделяются такие как скорости оседания в полумульде сдвига, определяемые параметром  $C_m$ , и особенности рельефа местности. Возможно также и последующее совершенствование теоретико-эмпирических зависимостей путем усложнения принятой во внимание модели сдвига массива и валидации на основе новых результатов инструментальных наблюдений.

Автор выражает глубокую признательность академику РАН, д-р техн. наук А.А. Баряху и канд. техн. наук Л.О. Тенисон за ценные советы и рекомендации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щегольков Ю. С. Обоснование критериев основных угловых параметров процесса сдвига для условий отработки запасов Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей // Маркшейдерия и недропользование. — 2024. — № 3. — С. 42–54. DOI: 10.56195/20793332\_2024\_3\_42\_54.
2. Медянцева А. Н. Сдвигение горных пород и земной поверхности под влиянием горных выработок. — Новочеркасск: НПИ, 1976. — 84 с.
3. Посыльный Ю. В., Вяльцев А. В., Попов В. В., Ягодкин Ф. И. Применение функции Гаусса при аппроксимации кривых оседаний земной поверхности // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2017. — № 8. — С. 187–194. DOI: 10.25018/0236-1493-2017-8-0-187-194.
4. Кулибаба С. Б., Федоров Е. В. Математическое описание типовых кривых оседания в полумульде сдвига / Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр: Материалы 6 конференции Международной научной школы академика РАН К.Н. Трубецкого, посвященная 300-летию Российской академии наук. — М.: ИПКОН РАН, 2024. — С. 42–45.

5. Щегольков Ю. С. Определение граничных углов процесса сдвижения земной поверхности при отработке запасов Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей // *Маркшейдерия и недропользование*. — 2024. — № 6. — С. 25 — 32. DOI: 10.56195/20793332\_2024\_6\_25\_32.
6. Нестеров М. П. Метод определения углов сдвижения земной поверхности на заданный период времени при отработке калийных месторождений / *Механика горных пород при разработке месторождений природных солей: труды ВНИИГ*. Вып. 67. — Л., 1974. — С. 69—74.
7. Нестеров М. П., Львова А. В., Аникин Н. Ф. Основные особенности закономерностей деформаций земной поверхности на калийных рудниках // *Строительные конструкции: сборник научных трудов НИИСК*. Вып. 23. — Киев: Будивельник, 1974.
8. Нестеров М. П., Аникин Н. Ф. Основные закономерности деформирования земной поверхности на Верхнекамском калийном месторождении и методы его предрасчета / *Механика горных пород при разработке месторождений природных солей: труды ВНИИГ*. Вып. 67. — Л., 1974. — С. 3—21.
9. Аникин Н. Ф., Львова А. В., Бешенцева Э. Ф. Особенности формирования краевых частей мульды сдвижения в условиях Верхнекамского месторождения / *Контроль, прогнозирование и управление состоянием пород в калийных рудниках: сборник научных трудов*. — Л.: ВНИИГ, 1985. — С. 152—160.
10. Кузнецов М. А., Акимов Л. Г., Кузьмин В. И., Пантелеев М. Г., Чернышев М. Ф. Сдвигение горных пород на рудных месторождениях. — М.: Недра, 1971. — 224 с.
11. Казаковский Д. А. Сдвигение земной поверхности под влиянием горных разработок. Москва-Харьков: Углетехиздат, 1953. 228 с.
12. Букринский В. А., Орлов Г. В. Сдвигение горных пород и земной поверхности при подземных разработках. — М.: Недра, 1984. — 247 с.
13. Викторов С. Д., Гончаров С. А., Иофис М. А., Закалинский В. М. Механика сдвижения и разрушения горных пород. — М.: РАН, 2019. — 360 с.
14. Посыльный Ю. В. Геометрия мульды сдвижения земной поверхности над горными выработками угольных шахт. — Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2012. — 216 с.
15. Кратч Г. Сдвигение горных пород и защита подрабатываемых сооружений. — М.: Недра, 1978. — 496 с.
16. Борисов А. А. Механика горных пород и массивов. — М.: Недра, 1980. — 360 с.
17. Литвинский Г. Г. К теории сдвижения подработанного породного массива // *Наукоёмкие технологии и оборудование в промышленности и строительстве*. — 2024. — № 5(79). — С. 5—20.
18. Jahanmiri S., Noorian-Bidgoli M. Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques // *Environmental Science and Pollution Research*. 2024, vol. 31, no. 22, pp. 31942—31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2.
19. Zhang L. Surface subsidence monitoring of mining areas in hunan province based on Sentinel-1A and DS-InSAR // *Sensors (Basel)*. 2023, vol. 23, no. 19, article 8146. DOI: 10.3390/s23198146.
20. Cao Jian, Huang Qingxiang, Guo Lingfei Subsidence prediction of overburden strata and ground surface in shallow coal seam mining // *Scientific Reports*. 2021, vol. 11, article 18972. DOI: 10.1038/s41598-021-98520-9. 

## REFERENCES

1. Shchegolkov Yu. S. Substantiating the criteria for the main angular parameters of the displacement process under the conditions of mining reserves at the Verkhnekamsk potassium-magnesium salt deposit. *Mine Surveying and Subsurface Use*. 2024, no. 3, pp. 42—54. [In Russ]. DOI: 10.56195/20793332\_2024\_3\_42\_54.
2. Medyantsev A. N. *Sdvizhenie gornykh porod i zemnoy poverkhnosti pod vliyaniem gornykh vyrabotok* [Shifting of rocks and the earth's surface under the influence of mine workings], Novocherkassk, 1976, 84 p.
3. Posyl'nyy Yu. V., Vyal'tsev A. V., Popov V. V., Yagodkin F. I. Application of the gaussian function to approximation of the Earth's surface subsidence curves. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2017, no. 8, pp. 187—194. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2017-8-0-187-194.
4. Kulibaba S. B., Fedorov E. V. Mathematical description of typical subsidence curves in a semi-trough of displacement. *Problemy i perspektivy kompleksnogo osvoeniya i sokhraneniya zemnykh nedr: Materialy 6 konferentsii Mezhdunarodnoy nauchnoy shkoly akademika RAN K.N. Trubetskogo, posvyashchennaya 300-letiyu Rossiyskoy akademii nauk* [Problems and prospects of integrated development and conservation of the earth's interior: Proceedings of the 6th conference of the International

scientific school of Academician of the Russian Academy of Sciences K.N. Trubetskoy, dedicated to the 300th anniversary of the Russian Academy of Sciences], Moscow, 2024, pp. 42 – 45. [In Russ].

5. Shchegolkov Yu. S. Determination of boundary angles of the ground surface displacement process during mining of reserves at the Verkhnekamsk potassium-magnesium salt deposit. *Mine Surveying and Subsurface Use*. 2024, no. 6, pp. 25 – 32. [In Russ]. DOI: 10.56195/20793332\_2024\_6\_25\_32.

6. Nesterov M. P. Method for determining ground surface displacement angles for a given period during potash deposit mining. *Mekhanika gornykh porod pri razrabotke mestorozhdeniy prirodnykh soley: trudy VNIIG*. Vyp. 67 [Mechanics of rocks during the development of natural salt deposits. Proceedings of VNIIG, vol. 67], Leningrad, 1974, pp. 69 – 74. [In Russ].

7. Nesterov M. P., Lvova A. V., Anikin N. F. Main features of the patterns of ground surface deformations at potash mines. *Stroitel'nye konstruksii: sbornik nauchnykh trudov NIISK*. Vyp. 23 [Building structures. Collection of scientific papers of NIISK, vol. 23], Kiev, 1974. [In Russ].

8. Nesterov M. P., Anikin N. F. Basic patterns of ground surface deformation at the Verkhnekamsk potash deposit and methods for its prediction. *Mekhanika gornykh porod pri razrabotke mestorozhdeniy prirodnykh soley: trudy VNIIG*. Vyp. 67 [Mechanics of rocks during the development of natural salt deposits. Proceedings of VNIIG, vol. 67], Leningrad, 1974, pp. 3 – 21. [In Russ].

9. Anikin N. F., Lvova A. V., Beshentseva E. F. Features of the formation of the marginal parts of subsidence troughs under the conditions of the Verkhnekamsk deposit. *Kontrol', prognozirovanie i upravlenie sostoyaniem porod v kaliynykh rudnikakh: sbornik nauchnykh trudov* [Monitoring, forecasting and management of rock conditions in potash mines. Collection of scientific papers], Leningrad, 1985, pp. 152 – 160. [In Russ].

10. Kuznetsov M. A., Akimov L. G., Kuz'min V. I., Pantelev M. G., Chernyshev M. F. *Sdvizhenie gornykh porod na rudnykh mestorozhdeniyakh* [Rock movement at ore deposits], Moscow, Nedra, 1971, 224 p.

11. Kazakovskiy D. A. *Sdvizhenie zemnoy poverkhnosti pod vliyaniem gornykh razrabotok* [Movement of the earth's surface under the influence of mining], Moscow-Kharkov, 1953, 228 p.

12. Bukrinskiy V. A., Orlov G. V. *Sdvizhenie gornykh porod i zemnoy poverkhnosti pri podzemnykh razrabotkakh* [Rock and ground surface movement during underground mining], Moscow, Nedra, 1984, 247 p.

13. Viktorov S. D., Goncharov S. A., Iofis M. A., Zakalinskiy V. M. *Mekhanika sdvizheniya i razrusheniya gornykh porod* [Mechanics of rock displacement and fracture], Moscow, 2019, 360 p.

14. Posyl'niy Yu. V. *Geometriya mul'dy sdvizheniya zemnoy poverkhnosti nad gornymi vyrabotkami ugol'nykh shakht* [Geometry of the subsidence trough of the earth's surface above mine workings of coal mines], Novocherkassk, 2012, 216 p.

15. Kratch G. *Sdvizhenie gornykh porod i zashchita podrabatyvaemykh sooruzheniy* [Rock movement and protection of undermined structures], Moscow, Nedra, 1978, 496 p.

16. Borisov A. A. *Mekhanika gornykh porod i massivov* [Mechanics of rocks and rock masses], Moscow, Nedra, 1980, 360 p.

17. Litvinskii G. G. On the theory of displacement of undermined rock mass. *Knowledge-intensive technologies and equipment in industry and building*. 2024, no. 5(79), pp. 5 – 20. [In Russ].

18. Jahanmiri S., Noorian-Bidgoli M. Land subsidence prediction in coal mining using machine learning models and optimization techniques. *Environmental Science and Pollution Research*. 2024, vol. 31, no. 22, pp. 31942 – 31966. DOI: 10.1007/s11356-024-33300-2.

19. Zhang L. Surface subsidence monitoring of mining areas in hunan province based on Sentinel-1A and DS-InSAR. *Sensors (Basel)*. 2023, vol. 23, no. 19, article 8146. DOI: 10.3390/s23198146.

20. Cao Jian, Huang Qingxiang, Guo Lingfei Subsidence prediction of overburden strata and ground surface in shallow coal seam mining. *Scientific Reports*. 2021, vol. 11, article 18972. DOI: 10.1038/s41598-021-98520-9.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Щегольков Юрий Сергеевич – главный специалист,  
ПАО «Уралкалий», e-mail: rabota.shegolkov@mail.ru.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yu.S. Shchegolkov, Chief Specialist, PJSC «Uralkali»,  
618426, Berezniki, Russia, e-mail: rabota.shegolkov@mail.ru.

Получена редакцией 18.12.2025; получена после рецензии 16.02.2026; принята к печати 10.04.2026.

Received by the editors 18.12.2025; received after the review 16.02.2026; accepted for printing 10.04.2026.