

ПРИМЕНЕНИЕ КОЛЬЦЕВОЙ ЩЕЛИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СМЕЩЕНИЙ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

А. И. Чанышев^{1,2}, И. М. Абдулин¹, О. Е. Белоусова¹, Л. В. Городилов¹, О. А. Лукьяшко¹

¹ Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет экономики и управления, Новосибирск, Россия, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Аннотация: Традиционно для измерения напряжений в массиве пород производят щелевую разгрузку. По разгрузке измеряют разгрузочные деформации в заданных главных направлениях тензора напряжений, по деформациям определяются напряжения. Другой путь применения щелевой разгрузки состоит в задании окрестности точки в виде круга с последующим измерением разгрузочных радиальных смещений в точках границы. В работе предлагается помимо разгрузочных радиальных смещений находить также разгрузочные тангенциальные смещения. Показано, как это можно делать с помощью оптических и механических систем измерений расстояний между точками, лежащими как на одном диаметре, так и между смежными точками, лежащими на одной и той же окружности, по предлагаемому авторами алгоритму. Определяются зависимости между радиальными и тангенциальными смещениями на границе круга, при которых внутри круговой области напряженно-деформированное состояние будет однородным. Для него указаны простейшие решения поиска главных осей тензора напряжений и его главных значений. Кроме того, рассмотрено обобщение полученного подхода к определению смещений на случай заглупления исследуемой круговой окрестности для описания состояния плоской деформации.

Ключевые слова: напряженное состояние пород, круговая щелевая разгрузка, нормальные и тангенциальные смещения, плоское напряженное состояние, плоская деформация, вторая краевая задача, однородное состояние, главные оси и значения.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-17-00188, <https://rscf.ru/project/22-17-00188/>.

Для цитирования: Чанышев А. И., Абдулин И. М., Белоусова О. Е., Городилов Л. В., Лукьяшко О. А. Применение кольцевой щели для восстановления смещений горной выработки // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2023. – № 12-2. – С. 141–158. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_122_0_141.

The use of circular slot to restore mining displacements

A. I. Chanyshev^{1,2}, I. M. Abdulin¹, O. E. Belousova¹, L. V. Gorodilov¹, O. A. Lukyashko¹

¹ Chinakal Institute of Mining Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

² Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russia
e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com

Abstract: Traditionally, to measure stresses in rocks, slot unloading is used. When unloading, strains are measured in the specified principal directions of the stress tensor, stresses are determined by deformations. Another way to use slot unloading is to set the neighborhood of a point in the shape of a circle, followed by measuring the unloading radial displacements at the boundary points. In addition to unloading radial displacements, it is also proposed to find unloading tangential displacements. With the use of optical and mechanical systems, the authors suggest the way of measuring distances between points lying both on the same diameter and between adjacent points lying on the same circle. The dependences between radial and tangential displacements at the circle boundary are determined, and inside the circular neighborhood there is a homogeneous stress-strain state. For this state, the simplest ways of finding the principal axes of the stress tensor and its principal values are specified. Moreover, to describe the state of plane deformation we considered the generalization of the obtained approach to determining displacements when the investigated circular neighborhood is buried.

Key words: stress state of rocks, circular slot unloading, normal and tangential displacements, plane-stressed state, plane strain, second boundary value problem, homogeneous state, principal axes and values.

Acknowledgment: The research was funded by the Russian Science Foundation (project No.22-17-00188).

For citation: Chanyshv A. I., Abdulin I. M., Belousov O. E., Gorodilov L. V., Lukyashko O. A. The use of circular slot to restore mining displacements. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2023;(12-1):141–158. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_122_0_141.

Введение.

В горном деле одной из задач является обеспечение безопасного ведения горных работ. С этой целью проводятся как теоретические, так и экспериментальные исследования. Если говорить про теоретические разработки, то здесь важно понять объект изучения — горную породу и массив горных пород, построить адекватную математическую модель, предсказывающую поведение горного материала при тех или иных видах нагружения. Постановки краевых задач для поиска распределений напряжений и деформаций в массиве пород хорошо известны, подразделяются на 1-ю, 2-ю, 3-ю краевые задачи. Существуют различные методы решений — аналитические, численные. К последним относятся методы конечных элементов, конечных разностей, граничных интегральных уравнений. Вместе с тем почти всегда требуется дать оценку этим решениям — проверить с

применением экспериментальных данных точность получаемых с помощью теоретических исследований прогнозов. Эти данные должны быть достаточно быстро и просто достижимы, чтобы было возможно получить исчерпывающую информацию об объекте в той или другой точке одновременно. С точки зрения практики таким инструментом может показаться щелевая разгрузка (она применяется повсюду, включая дорожное строительство, когда качество укладки асфальта определяется с помощью образования полостей, дыр). В начале щелевая разгрузка применялась для оценки напряженного состояния в нетронутом массиве пород.

Из работ, наиболее близких к предлагаемому направлению исследования, прежде всего выделим [1–3], где изучается напряженно-деформированное состояние (НДС) на поверхности массива пород, причем в качестве окрестности точки на поверхности выбира-

ется круговая область. Предполагается, что внутри нее создается состояние, близкое к однородному. Причиной этой гипотезы может служить представление о том, что основным понятием механики деформированного твердого тела служит точка, и состояние в малой окрестности этой точки является однородным. Исходя из принятого предположения об однородности состояния, задавались направления главных осей тензора напряжений в рассматриваемой области, далее производилась полная ее разгрузка путем создания разгрузочной щели, повторяющей контур рассматриваемой круговой области. При разгрузке измеряются тензометрическим способом деформации вдоль главных направлений, по которым по закону Гука восстанавливаются значения главных напряжений в исследуемой круговой области. Есть множество работ, посвященных развитию идей [1–3], когда производится частичная разгрузка [4–7], когда бурятся две параллельные скважины, а не одна [8–9], когда с помощью гидродомкрата, действующего на поверхность выработки, создается состояние плоской деформации при образовании цилиндрической щели [10]. Здесь же уместно вспомнить работы ИГД СО РАН, составляющие такое направление, как экспериментально-аналитический метод [11–13], в основе которого лежит применение избыточной информации на одной границе массива пород с целью определения недостающей информации на других границах. Далее следуют работы [14, 15], в которых делается попытка определения НДС массива пород в произвольной точке поверхности выработки, точнее, в ее окрестности, путем выбуривания круговых цилиндрических щелей вокруг рассматриваемых точек. Прежде чем создать цилиндрическую щель, на поверхности

выработки формируется сеть реперных точек, выставленных перед будущей щелью и за ней [14]. После создания разгрузочной щели производятся измерения расстояний между реперными точками до образования щели и после (при этом указываются особенности оптических и механических систем измерения расстояний между точками с применением современной экспериментальной техники). Приращение расстояний между точками, лежащими на одном и том же диаметре круговой области, относится к нормальным смещениям на границе. Для применения этих смещений к определению НДС рассматриваемой окрестности необходимо еще знать значения касательных перемещений, однако про них в [14] ничего не говорится. Из современных источников к рассмотренным направлениям близки работы [16–18], в которых помимо разгрузочных щелей применяются новые технологии измерения смещений на микромасштабном уровне и восстановления деформаций с применением синхротронной рентгеновской компьютерной томографии и рентгеновской дифракции [19–21]. Предлагаемая нами работа посвящена развитию перечисленных выше трудов. При этом полная информация о смещениях на границе будет применена к решению второй краевой задачи теории упругости с целью определения НДС в окрестностях точек на поверхности и внутри массива, условий для граничных значений смещений, при которых в окрестностях точек на поверхностях и внутри массива пород будут иметь место однородные НДС. Для однородного состояния предлагаются решения, позволяющие находить главные направления осей тензора напряжений по данным измерений радиальных смещений в трех точках круговой границы. Показывается также, как по данным изме-

рений расстояний между тремя точками возможно найти тангенциальные смещения. Как вариант, предлагается определение нормальных и касательных смещений на границе цилиндра в глубине массива пород.

Методы

Часть 1. Экспериментально-аналитическое определение напряженно-деформированного состояния пород в окрестностях точек, лежащих на поверхностях горных выработок

Пусть имеется окрестность точки на поверхности выработки. Представим ее в виде круга, как изображено на рис. 1, а, под действием приложенных к массиву пород нагрузок, точки окружности получают неизвестные по величине напряжения и неизвестные априори радиальные и тангенциальные смеще-

ния $u_r(\theta)$, $u_\theta(\theta)$, где r и θ — полярные координаты, связанные с центром круга O радиуса $r = a$. Здесь примем

предположение, что смещения $u_r(\theta)$,

$u_\theta(\theta)$ малы так, что отношения вели-

чин $u_r(\theta)/a$, $u_\theta(\theta)/a$ много меньше единицы:

$$u_r(\theta)/a \ll 1, u_\theta(\theta)/a \ll 1. \quad (1)$$

Для определения неизвестных смещений $u_r(\theta)$, $u_\theta(\theta)$ произведем полную (упругую) разгрузку рассматриваемой области, создав с помощью бурового инструмента круговую цилиндрическую щель, так, как это делается в [1—3, 14]. Прежде, чем образовывать щель, промаркируем точки, находящиеся на окружности с внутренней стороны круговой области, буквами в, а, г, б, так же, как это сделано в [14] и на рис. 1, б.

Дальше создается круговая цилиндрическая щель с центром в точке O и производятся измерения смещений точек в, а, г, б в радиальном (рис. 1, б, в) и тангенциальном направлениях. При этом уравнение границы получившегося керна будет выглядеть как

$$r = a + u_r(\theta) \text{ или } r = a \left(1 + \frac{u_r(\theta)}{a}\right). \quad (2)$$

Поскольку выполняется (1), то можно сказать, что в силу выбора значений радиуса a и полученных значений $u_r(\theta)$, $u_\theta(\theta)$ уравнение границы не изменилось ($r \approx a$).

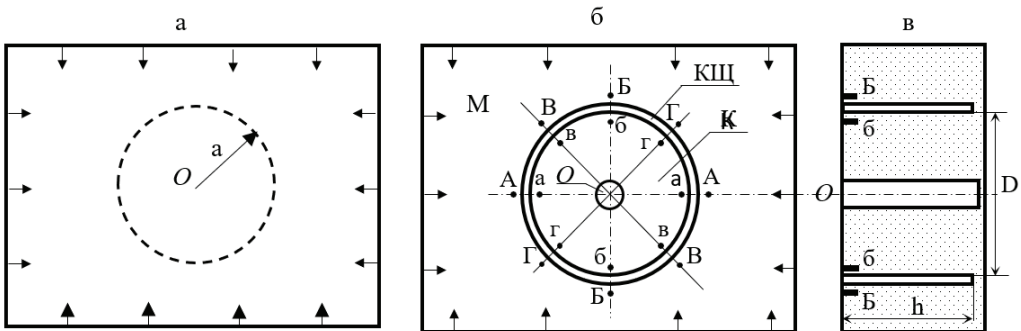


Рис. 1. Круговая окрестность точки А (а); щелевая разгрузка окрестности с выделением реперных точек, предложенных в [14] (б); вид сбоку (в)

Fig. 1. Circular neighborhood of point A (a); slot unloading of the neighborhood with the reference points proposed in [14] (b); side view (c)

Далее, зная точечные значения функций $u_r(\theta)$, $u_\theta(\theta)$, можно восстановить сами функции, если принять во внимание их разложения в ряды Фурье и использовать при этом системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов разложений через заданные точки на окружности $r = a$ с разными значениями координаты θ и известными значениями указанных смещений в этих точках. В результате после применения разгрузочной щели становятся известными функции смещений:

$$u_r = U_r(\theta), u_\theta = U_\theta(\theta). \quad (3)$$

При этом очевидно, что вся исследуемая область (керна) переходит в полностью разгруженное состояние. В случае упругости все напряжения становятся равными нулю, все перемещения, связанные с деформациями, также обращаются в ноль, при этом соотношения (3) характеризуют разгрузочные смещения от пиковых значений до нулевых. Чтобы вернуть окрестность точки (керны) в нагруженное состояние, необходимо к этой области, в том числе на границе, приложить перемещения с обратным знаком. В итоге получается 2-я краевая задача с заданными на границе $r = a$ условиями

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(\theta) = -U_r(\theta), \\ u_\theta &= u_\theta(\theta) = -U_\theta(\theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения 2-й краевой задачи с условиями (4) обратимся к методам, изложенным в [22–25]. Как известно, задача теории упругости в плоском случае состоит в решении двух уравнений равновесия, удовлетворении условиям совместности деформаций, закону Гука внутри области деформирования. Ее общее решение представляется формулами Колосова-Мухелишвили [22], связывающими напряжения и смеще-

ния с двумя аналитическими функциями $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$. Последние устанавливаются из граничных условий задачи. В нашем случае областью деформирования является область, ограниченная неравенствами $0 \leq r \leq a$. Одно из граничных условий имеет вид при $r = a$:

$$\begin{aligned} \aleph \varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = \\ 2\mu(u_x + iu_y) = 2\mu \frac{\sigma|\omega'(\sigma)|}{\omega'(\sigma)} (u_p + iu_\vartheta), \end{aligned} \quad (5)$$

где σ — точка на единичной окружности $|\sigma| = 1$, $\aleph = 3 - 4\nu$ для случая плоской деформации и $\aleph = (3 - \nu)/(1 - \nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона, 2μ — модуль сдвига, u_p , u_ϑ — значения граничных смещений на контуре $|\sigma| = 1$, $\omega(\xi)$ конформно отображающая функция исходной области на область вне или внутри единичного круга $|\sigma| = 1$. В нашем случае

$$z = \omega(\xi) = a\xi, \quad \omega'(\xi) = a,$$

где a — радиус окружности.

В центре круговой окрестности (или на оси керны) при $r = 0$ ставятся условия $u_p + iu_\vartheta = 0$, закрепляющие положение точки O на рис. 1 в момент создания цилиндрической щели.

Обратим внимание на условие (5), в него входят граничные значения функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ в виде $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$.

Граничные функции u_p, u_ϑ могут носить самый общий характер, связанный с разложением в ряды Фурье. Ограничим этот вид простейшим представлением. Пусть в результате обработки экспериментальных данных, полученных при разгрузке цилиндрической области (или керны) граничные функции u_p, u_ϑ получают вид:

$$u_p = A + B \cos 2(\vartheta - \vartheta_0),$$

$$u_{\vartheta} = C \sin 2(\vartheta - \vartheta_0), \quad (6)$$

где A, B, C, ϑ_0 — величины, подлежащие определению из экспериментов (угол ϑ_0 при этом связан с направлением главных осей тензора напряжений). Такой вид распределения предполагает двойную симметрию смещений u_{ρ}, u_{ϑ} относительно прямой $\vartheta = \vartheta_0$ и прямой, ей перпендикулярной (ниже будет показано, как значения этих параметров можно получить, измеряя расстояния между четырьмя точками).

Функции $\varphi(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$, исходя из (5) и граничных условий (6), будем искать в виде

$$\varphi(\sigma) = \alpha_1 \sigma + \alpha_3 \sigma^3, \quad \psi(\sigma) = \beta_1 \sigma, \quad (7)$$

где $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1$ — неопределенные пока комплексные постоянные. Подставляя (7), (6) в (5), с учетом того, что

$$\cos 2\vartheta = \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right), \quad \sin 2\vartheta = \frac{1}{2i} \left(\sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right),$$

получаем уравнение

$$\aleph \left[\alpha_1 \sigma + \alpha_3 \sigma^3 \right] - \sigma \left[\overline{\alpha_1} + \frac{3\overline{\alpha_3}}{\sigma^2} \right] - \frac{\overline{\beta_1}}{\sigma} = 2\mu \left[A\sigma + \frac{B+C}{2} e^{-2i\vartheta_0} \sigma^3 + \frac{B-C}{2\sigma} e^{2i\vartheta_0} \right]. \quad (8)$$

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях σ . В результате получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1$. Последние равны

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\mu A}{\aleph - 1}, \quad \alpha_3 = \frac{(B+C)\mu}{\aleph} e^{-2i\vartheta_0}, \\ \beta_1 = - \left[\mu B \left(\frac{3}{\aleph} + 1 \right) + \mu C \left(\frac{3}{\aleph} - 1 \right) \right] e^{-2i\vartheta_0}. \end{cases} \quad (9)$$

На основании (7) определяются функции $\varphi(\sigma), \psi(\sigma)$, и тогда получаем

$$\varphi(\xi) = \alpha_1 \xi + \alpha_3 \xi^3, \quad \psi(\xi) = \beta_1 \xi.$$

Заменяя здесь ξ через z по формуле $\xi = z/a$, находим

$$\varphi(z) = \frac{\alpha_1 z}{a} + \frac{\alpha_3 z^3}{a^3}, \quad \psi(z) = \beta_1 \frac{z}{a} \quad \text{и}, \quad (10)$$

соответственно, функции

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = \frac{\alpha_1}{a} + \frac{3\alpha_3 z^2}{a^3}, \quad \Psi(z) = \frac{\beta_1}{a}. \quad (11)$$

Теперь применяем формулы Колосова-Мухелишвили как общее решение плоской задачи теории упругости. С учетом (9) на основании [22] имеем

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{4\alpha_1}{a} + \frac{12(B+C)}{a^3 \aleph} \mu r^2 \cos 2(\theta - \theta_0), (\theta_0 = \vartheta_0) \quad (12)$$

(соотношение (12) — интегральное выражение условия совместности деформации [22]). Рассмотрим теперь проинтегрированные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} = \\ &= 2\left[\frac{6(B+C)}{\aleph a^3} \mu r^2 - \frac{1}{a}\left(\mu B\left(\frac{3}{\aleph} + 1\right) + \mu C\left(\frac{3}{\aleph} - 1\right)\right)\right]e^{2i(\theta - \theta_0)}. \end{aligned}$$

Выделяя здесь вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{cases} \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \mu \left[\frac{6(B+C)}{\aleph a^3} r^2 - \frac{1}{a} \left(B\left(\frac{3}{\aleph} + 1\right) + C\left(\frac{3}{\aleph} - 1\right) \right) \right] \cos 2(\theta - \theta_0), \\ \tau_{r\theta} = \mu \left[\frac{6(B+C)}{\aleph a^3} r^2 - \frac{1}{a} \left(B\left(\frac{3}{\aleph} + 1\right) + C\left(\frac{3}{\aleph} - 1\right) \right) \right] \sin 2(\theta - \theta_0). \end{cases} \quad (13)$$

Из (12), (13) следует, что

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{2\alpha_1}{a} + \frac{\mu}{a} \left[B\left(\frac{3}{\aleph} + 1\right) + C\left(\frac{3}{\aleph} - 1\right) \right] \cos 2(\theta - \theta_0), \\ \sigma_\theta = \frac{2\alpha_1}{a} - \frac{\mu}{a} \left[\frac{12(B+C)}{\aleph a^2} r^2 - \left(B\left(\frac{3}{\aleph} + 1\right) + C\left(\frac{3}{\aleph} - 1\right) \right) \right] \cos 2(\theta - \theta_0), \\ \tau_{r\theta} = \frac{\mu}{a} \left[\frac{6(B+C)}{\aleph} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(B\left(\frac{3}{\aleph} + 1\right) + C\left(\frac{3}{\aleph} - 1\right) \right) \right] \sin 2(\theta - \theta_0). \end{cases} \quad (14)$$

Из (14) следует, что для значений полярного угла θ , совпадающего с θ_0 ($\theta_0 = \vartheta_0$), значение $\tau_{r\theta} = 0$, то есть угол θ_0 , задает главные направления тензора напряжений.

Другой особенностью выражений (13), (14) является то, что в случае $B+C \neq 0$ напряженное состояние в круговой области будет неоднородным, зависящим от значений полярного радиуса r (соответствующие слагаемые подчеркнуты в (14)).

Для того, чтобы напряженное состояние круговой окрестности керна было однородным, необходимо, как следует из (14), чтобы выражение

$$B + C = 0. \quad (15)$$

При выполнении этого условия смещения u_r и u_θ на границе $r = a$ должны иметь значения

$$u_r = A + B \cos 2(\theta - \theta_0), \quad u_\theta = -B \cos 2(\theta - \theta_0). \quad (16)$$

Только при выполнении (16) НДС в окрестности рассматриваемой точки будет однородным. При этом напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ выражаются как

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{2\alpha_1}{a} + \frac{2\mu B}{a} \cos 2(\theta - \theta_0), \\
\sigma_\theta &= \frac{2\alpha_1}{a} - \frac{2\mu B}{a} \cos 2(\theta - \theta_0), \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{2\mu B}{a} \sin 2(\theta - \theta_0), \quad \left(\alpha_1 = \frac{2\mu A}{\varkappa - 1} \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) следует, что максимальное касательное напряжение в этой области при условии (15) будет равно $T_{\max} = 2\mu|B|/a$.

Приведем теперь выражения для смещений. Имеем

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} [\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}].$$

Здесь $e^{-i\theta} = r/z$.

С учетом (9), (10), находим

$$\begin{cases} u_r = \frac{r}{a} \left\{ A + \left[\frac{B+C}{2\varkappa} (\varkappa-3) \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{3(B+C)}{2\varkappa} + \frac{B-C}{2} \right] \cos 2(\theta - \theta_0) \right\}, \\ u_\theta = \frac{r}{a} \left\{ \frac{B+C}{2\varkappa} (\varkappa+3) \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \frac{3(B+C)}{2\varkappa} - \frac{B-C}{2} \right\} \sin 2(\theta - \theta_0). \end{cases} \tag{18}$$

При $B+C=0$ отсюда следует, что

$$\begin{cases} u_r = \frac{r}{a} (A + B \cos 2(\theta - \theta_0)), \\ u_\theta = -\frac{r}{a} B \sin 2(\theta - \theta_0). \end{cases} \tag{19}$$

Часть 2. Определение главных осей и главных значений тензора напряжений в круговой окрестности точки по данным измерения смещений на границе

Для оценки параметров A, B, C , и угла θ_0 , задающего направления главных осей тензора напряжений, проведем следующие три измерения расстояний между точками O, T_1, T_2, T_3 : найдем смещения u_r на границе $r=a$ в точках T_1, T_2, T_3 , указанных на рис. 2, относительно центра круговой окрестности точки O .

Для определения смещений необходимо произвести измерения длин отрезков OT_1, OT_2, OT_3 до образования щели и после.

Обозначим полученные значения смещения u_r в точках T_1, T_2, T_3 на рис. 2 как u_1, u_2, u_3 . Для определения параметров A, B, θ_0 имеем следующую из (6) систему уравнений вида:

$$\begin{cases} u_1 = A + B \cos 2\theta_0, \\ u_2 = A + B \sin 2\theta_0, \\ u_3 = A - B \cos 2\theta_0. \end{cases} \tag{20}$$

Из (20) следует, что

$$\begin{cases} A = \frac{u_1 + u_3}{2}, & B \cos 2\theta_0 = \frac{u_1 - u_3}{2}, \\ B \sin 2\theta_0 = u_2 - \frac{u_1 + u_3}{2}. \end{cases} \quad (21)$$

Рассматривая второе и третье уравнения (21) совместно, находим уравнение для определения $\operatorname{tg} 2\theta_0$:

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2u_2(u_1 + u_3)}{u_1 - u_3},$$

откуда значение угла θ_0 определится как

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2u_2(u_1 + u_3)}{u_1 - u_3}. \quad (22)$$

После этого находится константа B :

$$B = \sqrt{\left(\frac{u_1 - u_3}{2}\right)^2 + \left(u_2 - \frac{u_1 + u_3}{2}\right)^2}. \quad (23)$$

Отметим, что формулы (21)–(23) похожи на те, что имеют место в теории пластичности [26-28]:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad T_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

При этом по аналогии с формулами пластичности устанавливаются значения «главных» перемещений, вычисленных вдоль главных направлений $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_0 + \pi/2$. Согласно (19) имеем

$$\begin{aligned} (u_r)_{\max} &= A + B = \frac{u_1 + u_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{u_1 - u_3}{2}\right)^2 + \left(u_2 - \frac{u_1 + u_3}{2}\right)^2}, \\ (u_r)_{\min} &= A - B = \frac{u_1 + u_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{u_1 - u_3}{2}\right)^2 + \left(u_2 - \frac{u_1 + u_3}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Часть 3. Определение тангенциального перемещения по данным измерений расстояния между двумя точками

До сих пор рассматривались радиальные смещения точек T_1 , T_2 , T_3 . Для оценки условия $B + C = 0$ требуется найти значения тангенциального смещения u_θ . Покажем, как это возможно осуществить, производя измерения расстояния между двумя точками. Рассмотрим опять рис. 2, но с других позиций. Имеем те

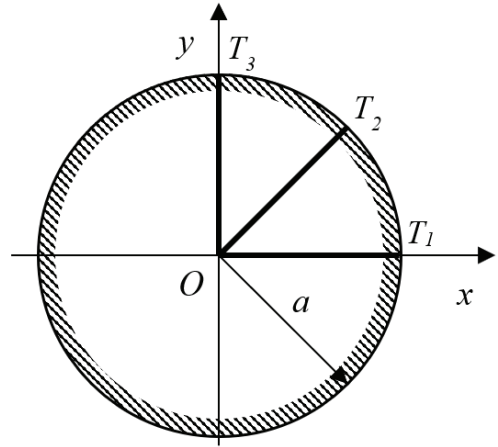


Рис. 2. Точки замеров радиальных перемещений u_r . В точке T_1 полярный угол $\theta = 0$, в точке T_2 угол $\theta = \pi/4$, в точке T_3 — $\theta = \pi/2$

Fig. 2. Points where radial displacements u_r are measured. At point T_1 polar angle $\theta = 0$, at point T_2 angle $\theta = \pi/4$, at T_3 angle $\theta = \pi/2$

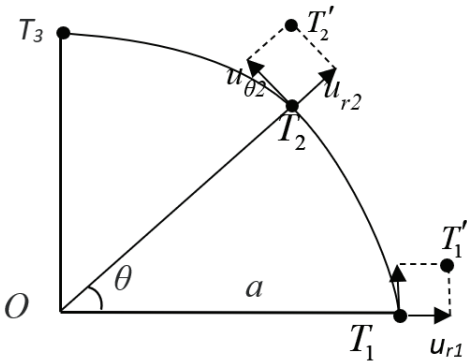


Рис. 3. Представлены положения точек T_1 , T_2 после образования круговой щели. Здесь u_{r1}, u_{r2} – радиальные смещения, u_{o1}, u_{o2} – тангенциальные, θ – полярный угол точки T_2

Fig. 3. Location of points T_1 , T_2 after the formation of the circular slot. Here u_{r1}, u_{r2} are radial displacements, u_{o1}, u_{o2} are tangential displacements, θ is the polar angle of point T_2

же самые точки T_1, T_2, T_3 , расположенные на дуге окружности $r = a$. При этом обратим внимание, что за счет радиальных и тангенциальных смещений точки T_1, T_2, T_3 примут положения, близкие к исходным. Обозначим новые положения точек T_1, T_2 как T_1', T_2' (рис. 3)

Найдем выражения расстояний от точки T_1 до точки T_2 в исходном состоянии и после образования щели. Точки T_1 и T_2 до образования щели имеют координаты $T_1 = T_1(a, 0)$, $T_2 = T_2(a \cos \theta, a \sin \theta)$. После образования щели точки T_1, T_2 смещаются, занимают новые положения. Представим положения этих точек в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с направлениями векторов OT_1, OT_3 . В этой системе точки T_1' и T_2' имеют координаты

$$T_1'(a + u_{r1}, u_{o1}), T_2'(a \cos \theta + u_{r2} \cos \theta - u_{o2} \sin \theta, a \sin \theta + u_{r2} \sin \theta + u_{o2} \cos \theta).$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{T_1 T_2}$ и определим его длину. С точностью до первого порядка малости смещений получаем следующее выражение

$$\left| \overrightarrow{T_1 T_2}' \right|^2 \approx 2a^2 (1 - \cos \theta) + 2a(u_{r2} + u_{r1})(1 - \cos \theta) + 2a \sin \theta (u_{o2} - u_{o1}).$$

Рассмотрим аналогично вектор $\overrightarrow{T_1 T_2}$. Его длина в соответствии с рис. 3 равна $|\overrightarrow{T_1 T_2}| = 2a \sin(\theta / 2)$.

Обозначим разность длин векторов $\overrightarrow{T_1 T_2}'$, $\overrightarrow{T_1 T_2}$ как ΔT_{21} . Тогда

$$\Delta T_{21} = \sqrt{2a^2 (1 - \cos \theta) + 2a(u_{r2} + u_{r1})(1 - \cos \theta) + 2a \sin \theta (u_{o2} - u_{o1})} - 2a \sin(\theta / 2).$$

Умножим и поделим правую часть этого выражения на сопряженное. Получаем

$$\Delta T_{21} = \frac{2a(u_{r2} + u_{r1})(1 - \cos \theta) + 2a \sin \theta (u_{o2} - u_{o1})}{2a \sin \frac{\theta}{2} + 2a \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \frac{(u_{r2} + u_{r1})}{a} + \frac{(u_{o2} - u_{o1})}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}}, (\theta \neq 0).$$

Поскольку деформации $u_{r2} / a, u_{r1} / a, u_{o2} / a, u_{o1} / a$ много меньше единицы, то выражение в знаменателе получается равным $4a \sin(\theta / 2)$. Тогда выражение для ΔT_{21} упрощается до следующего:

$$\Delta T_{21} = (u_{r_2} + u_{r_1}) \sin \frac{\theta}{2} + (u_{\theta_2} - u_{\theta_1}) \cos \frac{\theta}{2}.$$

Далее для точки T_2 на рис. 2 $\theta = \pi/4$. Поэтому

$$\Delta T_{21} = (u_{r_2} + u_{r_1}) \sin \frac{\pi}{8} + (u_{\theta_2} - u_{\theta_1}) \cos \frac{\pi}{8}, \quad (24)$$

$$\text{где } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

В соответствии с (20)

$$u_{r_2} + u_{r_1} = 2A + B(\cos(2\theta_0) + \sin(2\theta_0)). \quad (25)$$

Из (6) находим

$$u_{\theta_1} = C \sin 2(\theta - \theta_0) = -C \sin 2\theta_0$$

потому, что для точки T_1 полярный угол $\theta = 0$. Для точки T_2 смещение $u_{\theta_2} = C \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta_0) = C \cos 2\theta_0$, так как полярный угол θ для точки T_2 равен $\theta = \pi/4$. Тогда

$$u_{\theta_2} - u_{\theta_1} = C(\cos 2\theta_0 + \sin 2\theta_0). \quad (26)$$

Подставляя найденные выражения (25), (26) в (24), находим значение константы C :

$$C = \frac{\Delta T_{21} - 2A \sin \frac{\pi}{8}}{(\cos 2\theta_0 + \sin 2\theta_0) \cos \frac{\pi}{8}} - B \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}. \quad (27)$$

Таким образом, задача определения функций смещений на контуре $r = a$ решается. Задача свелась к нахождению расстояний между точками O , T_1 , T_2 , T_3 на рис. 2.

Часть 4. Экспериментально-аналитическое определение напряженно-деформированного состояния пород в окрестностях точек, лежащих в глубине массива пород

Предполагается, что в глубине массива пород на некотором расстоянии от его поверхности реализуется плоское

деформированное состояние. Это означает, что, начиная с некоторой глубины $z = -h$, ($h > 0$), в каждом сечении $z = \text{const}$ выполняются все условия плоской деформации ($\varepsilon_z = 0, \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, смещение $u_z = \text{const}$, все другие смещения зависят от координат x, y). Данная позиция отражает общеизвестный факт, что переход от плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию происходит при постоянных боковых нагрузках при значительном увеличении толщины пластины, оболочки.

Здесь также можно выделить точку и ее окрестность в виде круга в плоскости $z = -h$, ($h > 0$). Требуется определить радиальные и тангенциальные смещения на окружности радиуса $r = a$ при $z = -h$, как изображено на рис. 4.

С поверхности выработки высверливаются вглубь цилиндрические отверстия малого диаметра на глубину h . В эти отверстия помещаются реперные элементы в виде жестких стержней, концы которых связываются с массивом пород в нижнем основании, а сами отверстия не мешают при этом движению стержней в результате деформирования основания. По движению концов стержней по вертикали в результате создания цилиндрической щели, освобождающей от напряжений контур $r = a$, можно судить о степени выполнимости условия плоской деформации $\varepsilon_z = 0$. А по измерениям расстояний между концами стержней в плоскости $z = 0$ можно судить о нормальных и тангенциальных смещениях контура $r = a$ на глубине h , т. е. в сечении $z = -h$. При этом для плоской деформации справедливы все те зависимости, что приведены в части 1, с отличием относительно величины параметра \aleph (для плоской деформации $\aleph = 3 - 4\nu$, где ν — коэффициент

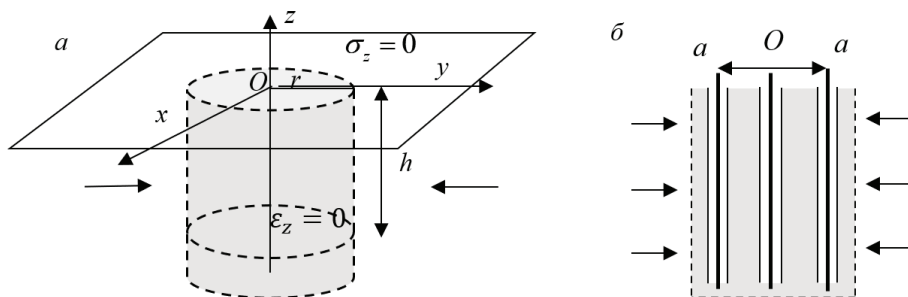


Рис. 4. Цилиндрическая окрестность прямой $x=0, y=0$ в нагруженном состоянии, сечение которой $z=0$ находится в плоском напряженном состоянии, а сечение $z=-h$ ($h>0$) – в состоянии плоской деформации (а); цилиндрическая окрестность, нижнее основание которой находится в состоянии плоской деформации, в измерительных скважинах установлены реперные элементы в виде стержней, концы которых запрессованы в массив пород (б)

Fig. 4. Cylindrical neighborhood of the straight line $x=0, y=0$ in the loaded state, the section $z=0$ is in the plane stressed state, the section $z=-h$ ($h>0$) is in the plane strain state (a); cylindrical neighborhood with the lower base in the state of plane deformation, and reference elements in the shape of rods with the ends pressed into the rock mass are installed in measuring wells (b)

Пуассона). Также выполняются все зависимости, приведенные в частях 2 и 3, касающиеся определения главных осей тензора напряжений, главных значений в сечении $z=-h$, нормальных и тангенциальных смещений на контуре $r=a$ при $z=-h$.

В заключение приведем значения напряжений в круговой окрестности точки массива пород на поверхности или в глубине при условии, что $B+C=0$.

Имеем (14). Если $\theta=\theta_0$ или $\theta=\theta_0+\pi/2$, то эти направления соответствуют главным осям тензора напряжений, вдоль этих направлений величина $\tau_{r\theta}=0$. При $\theta=\theta_0$ одно из главных напряжений будет равно

$$\sigma_r = \frac{4\mu A}{(\aleph-1)a} + \frac{2\mu B}{a}.$$

При $\theta=\theta_0+\pi/2$ другое главное напряжение будет выражаться формулой

$$\sigma_r = \frac{4\mu A}{(\aleph-1)a} - \frac{2\mu B}{a}.$$

В случае $B+C \neq 0$ напряженное состояние в окрестности будет неоднородным (см. (14)). На рис. 5 представлена круговая окрестность, нагруженная на контуре $r=a$ усилиями σ_r и $\tau_{r\theta}$ для случая $B+C \neq 0$:

$$\sigma_r = \frac{4\mu A}{(\aleph-1)a} + \frac{\mu}{a} \left[\frac{3(B+C)}{\aleph} + (B-C) \right] \cos 2(\theta - \theta_0),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{a} \left[\frac{3(B+C)}{\aleph} - (B-C) \right] \sin 2(\theta - \theta_0).$$

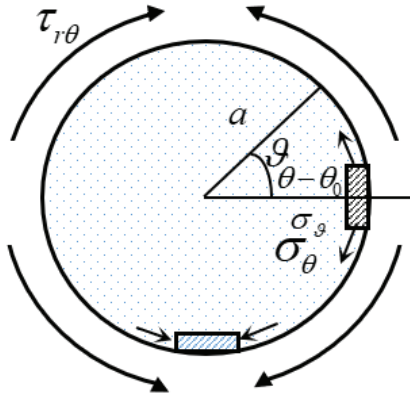


Рис. 5. Дополнительные напряжения $\tau_{r\theta}$ и σ_θ , действующие вблизи контура $r = a$, соответствующие слагаемым $B + C \neq 0$
 Fig. 5. Additional stresses $\tau_{r\theta}$ and σ_θ operating near the contour $r = a$, and corresponding to terms $B + C \neq 0$

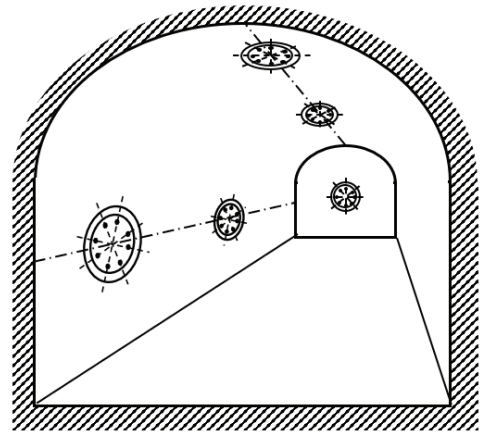


Рис. 6. Различные расположения окрестностей точек массива горных пород на поверхности или в глубине выработки [14]
 Fig. 6. Various locations of neighborhoods of points on the surface and in the bulk of the mine working [14]

Рисунок демонстрирует образование тангенциальных перемещений на контуре $r = a$ за счет действия касательных напряжений $\tau_{r\theta}$, стягивающих контактные дуги к двум точкам, лежащим на оси ординат. Здесь же показано образование растягивающих нормальных тангенциальных напряжений σ_θ в двух точках на оси абсцисс и отрицательных напряжений σ_θ на оси ординат.

Подводя итоги, следует сказать, что целью работы являлось определение НДС в различных окрестностях точек, лежащих как на поверхности выработки, так и внутри, что изображено на рис. 6, заимствованном из [14]. Также следует добавить, что формирование разгрузочной щели должно происходить без сминания материала вблизи щели за счет процессов скалывания частиц материала.

В отличие от анализа вышеперечисленных работ [1–3], где исследовалось по существу НДС в точке, в данной работе исследуется НДС в окрестно-

стях точек, причем неважно, в каком месте поверхности выработки они выбираются.

Выводы и рекомендации

1. Показано, как за счет применения цилиндрических разгрузочных щелей определяются точечные значения нормальных и касательных смещений на контурах окрестностей точек, лежащих на поверхностях горных выработок и внутри массива пород, имеющих вид круговых областей. Для этого требуется провести измерения расстояний между реперными точками или элементами, лежащими на границах круговых областей.

2. Показано, как от точечных значений можно перейти к функциональным зависимостям нормальных и касательных перемещений на границах круговых областей. С помощью полученных граничных перемещений решена 2-я краевая задача теории упругости для плоского напряженного состояния плоской деформации для определения

напряжений, деформаций и смещений внутри рассматриваемых окрестностей точек.

3. Установлено, при каких радиальных и тангенциальных перемещениях на границах в самих круговых окрестностях будет наблюдаться однородное НДС. Показано как по измерениям расстояний между тремя точками и центром области возможно определить главные оси тензора напряжений, главные значения.

4. Показано, как по измерениям расстояний между точками, лежащими на границе круговой области, возможно определить тангенциальное напряжение на границе при создании разгрузочной цилиндрической щели.

5. Показано, как возможно определить контурные радиальные и тангенциальные перемещения круговой области, лежащей в глубине выработки, с целью их применения для определения НДС в случае плоской деформации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Г. Н., Слободов М. А. Определение методом разгрузки напряжений, действующих в междукammerных целиках каменной соли Артемовских рудников // Труды ВНИМИ. — 1950. — Вып. 22. — С. 151–174.

2. Хаст Н., Нильсон Г. Измерение напряжений в скальных породах и их значение для строительства плотин // Проблемы инженерной геологии. — Вып. 4. — М.: Мир, 1967. — С. 94–105.

3. Влох Н. П., Зубков А. В., Феклистов Ю. Г. Совершенствование метода щелевой разгрузки // Диагностика напряженного состояния породных массивов: Сборник научных трудов. — 1980. — С. 30–35.

4. Менгель Д. А. Изменение первоначального напряженного состояния северного участка Соколовского месторождения в процессе отработки // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2020. — № 3–1. — С. 138–148. DOI: 10.25018/02361493-2020-31-0-138-148.

5. Ai K., Zhang X., Zhou C. Study on the Method for Measuring Stress on Rock Mass Excavation Surface under Extremely High Stress Conditions // Geofluids. — 2022, 4509192. DOI:10.1155/2022/4509192.

6. Ребецкий Ю. Л., Сим Л. А., Маринин А. В. Алгоритм расчета величин неотектонических напряжений платформенных территорий в структурно-геоморфологическом методе // Геодинамика и тектонофизика. — 2022. — 13(1):0577. DOI: 10.5800/GT-2022-13-1-0577.

7. Ge X., Hou M. Principle of in-situ 3D rock stress measurement with borehole wall stress relief method and its preliminary applications to determination of in-situ rock stress orientation and magnitude in Jinping hydropower station // Sci. China Technol. Sci. . — 2012,. — vol. 55, — pp. 939–949. DOI: 10.1007/s11431-011-4680-x.

8. Сентябов С. В., Карамнов Д. В. Методы определения первоначальных напряжений массива горных пород натурными измерениями // Проблемы недропользования. — 2023. — № . 1 (36). — С. 54–63. DOI: 10.25635/2313-1586.2023.01.054.

9. Барышников В. Д., Качальский В. Г. Автоматизированный измерительный комплекс приборов для определения напряжений в массиве горных пород методом параллельных скважин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2010. — № . 3. — С. 115–119.

10. Кузнецов С. В., Савостьянов Е. В. Способ измерения механических напряжений в массиве горных пород: № 2830448: заявл. 09.10.1979: опубл. 15.07.1981; Авторское свидетельство № 846730 А1 СССР, МПК E21C 39/00. заявитель Институт проблем комплексного освоения недр АН СССР.

11. Шваб А. А. Экспериментально-аналитический метод определения характеристик квазигомогенного материала по упругопластическому анализу экспериментальных данных // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. — 2012. — № 16(2). — С. 65–71.

12. Чанышев А. И., Абдулин И. М. Определение напряженно-деформированного состояния горных пород по данным измерений на контуре выработки вектора напряжений Коши и вектора смещений // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2021. — № 1. — С. 13–20. DOI: 10.15372/FTPRP120210102.

13. Чанышев А. И., Абдулин И. М. Исследования упругого, упруго-пластического и предельного состояния массива пород вблизи выработок по данным измерений на их границах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2019. — № 4. — С. 27–35. DOI: 10.15372/FTPRP120190404.

14. Феклистов Ю. Г. Деформационный способ комплексного определения напряженного состояния и упругих характеристик горных и строительных объектов // Проблемы недропользования. — 2017. — 4 (15). — С. 28–32. DOI: 10.18454/2313–1586.2017.04.028.

15. Зубков А. В., Феклистов Ю. Г., Липин Я. И., Худяков С. В., Криницын Р. В. Деформационные методы определения напряженного состояния пород на объектах недропользования // Проблемы недропользования. — 2016. — № 4(11). — С. 41–49. DOI: 10.18454/2313–1586.2016.04.041.

16. Korsunsky A. M. A teaching essay on residual stresses and eigenstrains. — Butterworth-Heinemann, 2017. 197 p.

17. Uzun F., Korsunsky A. M. On the identification of eigenstrain sources of welding residual stress in bead-on-plate inconel 740H specimens // International Journal of Mechanical Sciences. — 2018. — Т. 145. — P. 231–245. DOI: 10.1016/j.ijmecsci .2018.07.007.

18. Salvati E., Korsunsky A. M. A simplified FEM eigenstrain residual stress reconstruction for surface treatments in arbitrary 3D geometries // International Journal of Mechanical Sciences. — 2018. — Vol. 138–139. — P. 457–466. DOI: 10.1016/j.ijmecsci. 2018.02.016.

19. Valentine M. D., Dhokia V., Flynn J., McNair S. A., Lunt A. J. Characterisation of residual stresses and oxides in titanium, nickel, and aluminium alloy additive manufacturing powders via synchrotron X-ray diffraction // Materials Today Communications. — 2023. — Т. 35. — С. 105900. DOI: 10.1016/j.mtcomm.2023.105900.

20. McNair S. A., Srisuriyachot J., Omole S., Connolley T., Rhead A., Lunt, A. J. The effect of porosity on strain evolution and failure of soldered, small-diameter, thin-walled metallic pipes // Journal of Materials Research and Technology. — 2023. — Т. 22. — С. 2409–2424. DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.12.088.

21. Petukhov D., Keller I. Exact reconstruction formulas for plastic strain distribution in the surface-treated plate and their applications // Acta Mechanica. — 2020. — Т. 231. — С. 1849–1866. DOI: 10.1007/s00707–020–02625–7.

22. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости: Основные уравнения: Плоская теория упругости: Кручение и изгиб. — Москва: АН СССР, 1966. — 708 с.


23. Протосеня А. Г., Беляков Н. А., Буслова М. А. Моделирование напряженно-деформированного состояния блочного горного массива рудных месторождений при отработке системами разработки с обрушением // Записки Горного института. — 2023. — Т. 262. — С. 619–627.

24. Протосеня А. Г., Катеров А. М. Обоснование параметров реологической модели соляного массива // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). — 2023. — № 3. — С. 16–28. DOI 10.25018/0236_1493_2023_3_0_16.

25. Зуев Б. Ю., Zubov В. П., Smychnik А. Д. Определение статических и динамических напряжений в физических моделях слоистых и блочных породных массивов // Горный журнал. – 2019. – № 7. – С. 61–66. DOI 10.17580/gzh.2019.07.02.

26. Шемякин Е. И. О сложном нагружении // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. 2001. С. 124–132.

27. Христианович С. А. Проблемы теории пластичности и геомеханики М.: Наука, 2008. – 391 с.

28. Ильюшин А. А. Пластичность Ч. 1. Упруго-пластические деформации. – Логос, 2004. 388 с. 

REFERENCES

1. Kuznetsov G. N., Slobodov M. A. Determination by the unloading method of stresses acting in the inter-chamber tselikas of rock salt of Artemovsk mines. *Proceedings of VNIMI*. 1950, Vol. 22, pp. 151–174. [In Russ].

2. Hast N., Nilson G. Measurement of stresses in rocks and their significance for the construction of dams. *Problems of engineering geology*. Issue 4, Moscow: Mir, 1967, pp. 94–105. [In Russ].

3. Vlokh N. P., Zubkov A. V., Feklistov Yu. G. Improving the method of slot unloading. Diagnostics of the stressed state of rock massifs: *Collection of scientific papers*. 1980, pp. 30–35. [In Russ].

4. Mengel D. A. Alteration of initial stress state in the north area of the Sokolov deposit in the course of mining. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020, (3–1), pp. 138–148. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236–1493–2020–31–0–138–148.

5. Ai K., Zhang X., Zhou C. Study on the Method for Measuring Stress on Rock Mass Excavation Surface under Extremely High Stress Conditions. *Geofluids*. 2022, 4509192. DOI:10.1155/2022/4509192.

6. Rebetsky Yu. L., Sim L. A., Marinin A. V. Algorithm for calculating neotectonic stresses in platform areas by the structural-geomorphological method. *Geodynamics & Tectonophysics*. 2022, 13(1):0577. [In Russ]. DOI: 10.5800/GT-2022–13–1–0577.

7. Ge, X., Hou, M. Principle of in-situ 3D rock stress measurement with borehole wall stress relief method and its preliminary applications to determination of in-situ rock stress orientation and magnitude in Jinping hydropower station. *Sci. China Technol. Sci.* 2012, vol. 55, pp. 939–949. DOI: 10.1007/s11431–011–4680-x.

8. Sentyabov S. V. Karamnov D. V. Methods for determining the initial stresses of the rock massif by in-situ measurements. *Problems of Subsoil Use*. 2023. 1 (36). pp. 54–63. [In Russ]. DOI: 10.25635/2313–1586.2023.01.054.

9. Baryshnikov V. D., Kachal'sky V. G. Automated instrumentation to measure rock mass stresses in parallel-drilled holes. *Journal of Mining Science*. 2010, vol. 46, pp. 338–342. [In Russ]. DOI: 10.1007/s10913–010–0042–5.

10. Kuznetsov S. V., Savostyanov E. V. Method of measuring mechanical stresses in an array of rocks: No. 2830448: application 09.10.1979: publ. 15.07.1981; Copyright certificate No. 846730 A1 USSR, IPC E21C 39/00. applicant Institute of Problems of Integrated Development of Subsurface AH CCCP. [In Russ].

11. Schwab A. A. Experimental analytical method for quasi-homogeneous material characteristics determination based on elasto-plastic analysis of experimental data. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2012, vol. 16(2), pp: 65–71. [In Russ].

12. Chanyshhev A. I., Abdulin I. M. Stress-strain behavior of rocks from the measurements of vectors of the Cauchy stresses and displacements at the boundary of an underground

excavation. *Journal of Mining Science*. 2021, Vol. 57. no. 1. pp. 10–17. [In Russ]. DOI:10.1134/S1062739121010026.

13. Chanyshv A. I., Abdulin I. M. Study of elastic, elastoplastic and post-limiting states of rock mass in the vicinity of openings using the measurement data at their boundaries. *Journal of Mining Science*. 2019, Vol. 55. no. 4. pp. 538–546. [In Russ]. DOI: 10.1134/S1062739119045880.

14. Feklistov Yu. G. Deformation method of complex determination of the stress state and elastic characteristics of mining and construction objects. *Problems of subsoil use*. 2017, vol. 4 (15), pp. 28–32. [In Russ]. DOI: 10.18454/2313–1586.2017.04.028.

15. Zubkov A. V., Feklistov Yu. G., Lipin Ya. I., Khudyakov S. V., Krinitsyn R. V. Deformation methods for determining the stress state of rocks at subsurface use facilities. *Problems of subsurface use*. 2016. No. 4(11). pp. 41–49. [In Russ]. DOI: 10.18454/2313–1586.2016.04.041

16. Korsunsky A. M. A teaching essay on residual stresses and eigenstrains. *Butterworth-Heinemann*, 2017. 197 p.

17. Uzun F., Korsunsky A. M. On the identification of eigenstrain sources of welding residual stress in bead-on-plate inconel 740H specimens. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018, vol. 145, pp. 231–245. DOI: 10.1016/j.ijmecsci. 2018.07.007.

18. Salvati, E., Korsunsky A. M. A simplified FEM eigenstrain residual stress reconstruction for surface treatments in arbitrary 3D geometries. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018, vol. 138–139. pp. 457–466. DOI: 10.1016/j.ijmecsci. 2018.02.016.

19. Valentine M. D., Dhokia V., Flynn J., McNair S. A., Lunt A. J. Characterisation of residual stresses and oxides in titanium, nickel, and aluminium alloy additive manufacturing powders via synchrotron X-ray diffraction. *Materials Today Communications*. 2023, vol. 35, pp. 105900. DOI: 10.1016/j.mtcomm.2023.105900.

20. McNair S. A., Srisuriyachot J., Omole S., Connolley T., Rhead A., Lunt, A. J. The effect of porosity on strain evolution and failure of soldered, small-diameter, thin-walled metallic pipes. *Journal of Materials Research and Technology*. 2023, vol. 22. pp. 2409–2424. DOI: 10.1016/j.jmrt.2022.12.088.

21. Petukhov D., Keller I. Exact reconstruction formulas for plastic strain distribution in the surface-treated plate and their applications. *Acta Mechanica*. 2020, vol. 231. pp. 1849–1866. DOI: 10.1007/s00707–020–02625–7.

22. Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: Basic equations: Plane theory of elasticity: Torsion and bending. *Moscow: USSR Academy of Sciences*, 1966, 708 p. [In Russ].

23. Protosenya A. G., Belyakov N. A., Bouslova M. A. Modelling of the stress-strain state of block rock mass of ore deposits during development by caving mining systems. *Journal of Mining Institute*. 2023, Vol. 262, pp. 619–627. [In Russ].

24. Protosenya A. G., Katerov A. M. Justification of the parameters of the rheological model of the salt massif. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2023, No. 3. pp. 16–28. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2023_3_0_16.

25. Zuev B. Yu., Zubov V. P., Smychnik A. D. Determination of static and dynamic stresses in physical models of layered and block rock masses. *Gornyi Zhurnal*. 2019, No. 7, pp. 61–66. [In Russ]. DOI: 10.17580/gzh.2019.07.02.

26. Shemyakin E. I. On complex loading. Elasticity and inelasticity. Moscow: Publishing House of Moscow State University. 2001, pp. 124–132. [In Russ].

27. Khristianovich S. A. Problems of the theory of plasticity and geomechanics. *M.: Nauka*. 2008, 391 p. [In Russ].

28. Ilyushin A. A. Plasticity Ch. 1. Elastic-plastic deformations. *Logos*. 2004, 388 p. [In Russ].

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Чанышев Анвар Исмагилович^{1,2} — докт. физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5772-0648>;

*Абдулин Ильгизар Маратович*¹ — научный сотрудник, e-mail: i.m.abdulin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4541-2992>;

*Белоусова Ольга Евгеньевна*¹ — канд. тех. наук, старший научный сотрудник, <https://orcid.org/0000-0003-2014-8427>, e-mail: o.e.belousova@mail.ru;

*Городилов Леонид Владимирович*¹ — докт. тех. наук, заведующий лабораторией моделирования импульсных систем, доцент, e-mail: gor@misd.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0044-9783>;

*Лукьяшко Ольга Анваровна*¹ — инженер, e-mail: lykola@yandex.ru;

¹ Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН.

² Новосибирский государственный университет экономики и управления,

Для контактов: *Чанышев А. И.*, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Chanyshev A. I.^{1,2}, Dr. Sci. (Phys. Mathem.), Professor, Chief Researcher, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com;

*Abdulin I. M.*¹, Researcher, e-mail: i.m.abdulin@mail.ru;

*Belousova O. E.*¹, Dr. Sci. (Eng.), Senior Researcher, o.e.belousova@mail.ru;

*Gorodilov L. V.*¹, Dr. Sci. (Eng.), Head of the Laboratory, gor@misd.ru, Associate Professor;

*Luk'yashko O. A.*¹, Engineer, lykola@yandex.ru,

¹ Chinakal Institute of Mining Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, 630091, Novosibirsk, Russia.

² Novosibirsk State University of Economics and Management, 630099, Novosibirsk, Russia.

Corresponding author: *Chanyshev A. I.*, e-mail: a.i.chanyshev@gmail.com.

Получена редакцией 05.10.2023; получена после рецензии 25.10.2023; принята к печати 10.11.2023.

Received by the editors 05.10.2023; received after the review 25.10.2023; accepted for printing 10.11.2023.

