

## АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ЛЕНТОЧНОГО КОНВЕЙЕРА ПРИ РАЗЛИЧНОМ ЧИСЛЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ МАСС

В.В. Дмитриева<sup>1</sup>, П.Е. Сизин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> РГУ Нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина, Москва, Россия, e-mail: dm-valeriya@yandex.ru

<sup>2</sup> ИБО НИТУ «МИСиС», Москва, Россия

**Аннотация:** Для разработки модели ленточного конвейера использован метод описания систем, состоящих из элементов, непрерывно распределенных в конечных областях пространства. Движения в таких системах передаются от одного элемента к другому, а динамические процессы в них описываются уравнениями в частных производных (волновые уравнения). Аналитическое решение систем таких уравнений оказывается трудоемким и сложным. Для упрощения расчетов систему следует разбить на простейшие элементы и воспользоваться методом кусочно-линейной аппроксимации. Этот метод позволяет приближенно описать систему с распределенными параметрами системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В данном случае контур ленты конвейера разбивается на некоторое число участков, в границах каждого из которых закон изменения скорости деформации по длине предполагается линейным. После принятия определенных допущений, позволяющих упростить разрабатываемую модель, применяются уравнения Лагранжа второго рода. Проведено сравнение моделей ленточного конвейера с различным количеством сосредоточенных масс, оценены преимущества, которые дает каждая из моделей. Перечислены технические задачи, при решении которых удобнее использовать ту или иную модель.

**Ключевые слова:** ленточный конвейер, математическая модель, система с распределенными параметрами, система с сосредоточенными параметрами, уравнение Лагранжа второго рода, Simulink, оптимальное количество аппроксимирующих масс.

**Для цитирования:** Дмитриева В. В., Сизин П. Е. Анализ моделей ленточного конвейера при различном числе аппроксимирующих масс // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2022. – № 1. – С. 34–46. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2022\_1\_0\_34.

### The analysis of belt conveyor models at different number of approximating masses

V.V. Dmitrieva<sup>1</sup>, P.E. Sizin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University),  
Moscow, Russia, e-mail: dm-valeriya@yandex.ru

<sup>2</sup> Institute of Basic Education,  
National University of Science and Technology «MI SiS», Moscow, Russia

**Abstract:** For the belt conveyor modeling, this study uses the method of systems composed of elements continuously distributed in finite spatial domains. The motion is transmitted from an element to an element, and the dynamic processes are described using equations with partial derivatives (wave equations). The analytical solution of the systems of such equations is a comp-

lex and labor-intensive process. It is possible to simplify calculations by splitting the system into the simplest elements and using the piece-wise linear approximation. This method allows an approximate description of the system with distributed parameters by a system of ordinary differential equations. In this case, the line of a belt conveyor is divided into a number of sections, and the law of variation of strain rate along the length is assumed to be linear within the limits of each section. Then, after certain assumptions for simplifying the model, the Lagrangian equations of the second kind are used. The authors compare the belt conveyor models with different numbers of concentrated masses and assess advantages of each models. The engineering problems solvable using these models are listed.

**Key words:** belt conveyor, mathematical model, system with distributed parameters, system with concentrated parameters, Lagrangian equation of the second kind, Simulink, optimal number of approximating masses.

**For citation:** Dmitrieva V. V., Sizin P. E. The analysis of belt conveyor models at different number of approximating masses. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2022;(1):34-46. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2022\_1\_0\_34.

---

### **Введение. Постановка задачи**

В работах многих авторов обосновывается необходимость создания систем автоматического управления скоростью ленточного конвейера в зависимости от поступающего на ленту грузопотока [1 – 5]. Внедрение таких систем позволит существенно повысить эффективность использования конвейерного транспорта за счет снижения холостого пробега, затрат электроэнергии, уменьшения износа конструктивных элементов [6, 7]. Решение этой задачи требует большого объема экспериментальных исследований на работающих установках, необходимых для тестирования разрабатываемых алгоритмов, настройки регуляторов, получения статистической информации. Однако часто такие исследования проводить невозможно в силу ряда факторов — отсутствия оборудования для экспериментов, невозможности прервать действующий технологический процесс, риска вывода оборудования из строя некорректно работающими алгоритмами управления. Для отладки разрабатываемой системы управления необходимо составление математических моделей

всех устройств, используемых в технологическом процессе [3, 8, 9]. Рассмотрим некоторые аспекты разработки модели движения ленты конвейера [3, 10, 11].

Системы, состоящие из элементов, непрерывно распределенных в конечных областях пространства, так что происходящие в них движения передаются от одного элемента к другому, называются системами с распределенными параметрами. Динамические процессы в таких системах описываются уравнениями в частных производных (волновые уравнения, уравнения теплообмена, уравнения диффузии и др.) [12–15]. Примерами подобных систем являются трубопроводы, ленточные конвейеры, стрелы экскаваторов, колонны буровых установок. Аналитическое решение систем таких уравнений оказывается трудоемким и сложным. Для упрощения расчетов систему удобно разбить на отдельные элементы, объемы, слои. Наиболее удобным оказывается метод кусочно-линейной аппроксимации, который позволяет приближенно описать систему с распределенными параметрами системой обыч-

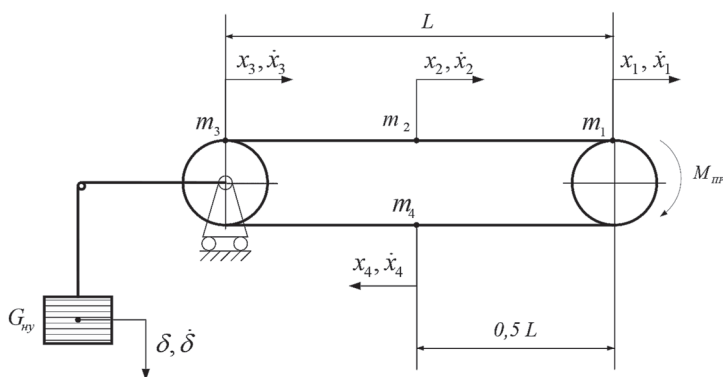


Рис. 1. Расчетная схема конвейера с пятью сосредоточенными массами

Fig. 1. Analytical model of conveyor with five concentrated masses

новенных дифференциальных уравнений. Контур ленты разбивается на некоторое число участков, в границах каждого из которых закон изменения скорости деформации по длине предполагается линейным. Далее, после принятия определенных допущений, позволяющих упростить разрабатываемую модель, применяются уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} T \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_i} T \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi + \frac{\partial}{\partial x_i} A = 0, \quad (1)$$

где  $T$  — кинетическая энергия участка;  $\Pi$  — потенциальная энергия участка;  $A$  — работа внешних сил на участке.

Этот метод подробно описан в работах [3, 11, 16]. В них определены все слагаемые уравнения (1).

Однако, никто из авторов этих работ не рассматривал вопрос об оптимальном количестве аппроксимирующих масс. Все вышеперечисленные авторы использовали модель с пятью сосредоточенными массами. Расчетная схема такой системы представлена на рис. 1.

### Модель ленточного конвейера с пятью сосредоточенными массами

Для такой схемы модель представляется шестью уравнениями:

$$\begin{aligned} & (2m_e + 2m_n + m_{np})\ddot{x}_1 + m_3\ddot{x}_2 + m_n\ddot{x}_4 + 2Cx_1 - Cx_2 - Cx_4 + \\ & + (0,5G_n lw + 0,5G_g lw) \operatorname{sgn} \dot{x}_1 + 2\eta \dot{x}_1 - \eta \dot{x}_2 - \eta \dot{x}_4 = \frac{M_{np}}{R_6} \operatorname{sgn}(\dot{x}_c - \dot{x}_1), \\ & m_e\ddot{x}_1 + 4m_e\ddot{x}_2 + m_e\ddot{x}_3 - Cx_1 + 2Cx_2 - Cx_3 + G_e lw \operatorname{sgn} \dot{x}_2 - \eta \dot{x}_1 + 2\eta \dot{x}_2 - \eta \dot{x}_3 = 0, \\ & m_e\ddot{x}_2 + (2m_e + 2m_n)\ddot{x}_3 + m_n\ddot{x}_4 - Cx_2 + (2C + 0,25C_k)x_3 - (C + 0,25C_k)x_4 - \\ & - 0,5C_k \delta - \eta \dot{x}_2 + 2\eta \dot{x}_3 - \eta \dot{x}_4 + (0,5G_e lw + 0,5G_n lw) \operatorname{sgn} \dot{x}_3 = 0, \\ & m_n\ddot{x}_1 + m_n\ddot{x}_3 + 4m_n\ddot{x}_4 - Cx_1 - (2C + 0,25C_k)x_3 + (C + 0,25C_k)x_4 + 0,5C_k \delta - \\ & - \eta \dot{x}_1 - \eta \dot{x}_3 + 2\eta \dot{x}_4 + G_n lw \operatorname{sgn} \dot{x}_4 = 0, \\ & \frac{G_{ny}}{g} \ddot{\delta} - 0,5C_k x_3 + 0,5C_k x_4 + C_k \delta + G_{ny} + G_{ny} f \operatorname{sgn} \dot{\delta} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M_{np}$  — момент двигателя, приведенный к валу приводного барабана;  $R_6$  — радиус приводного барабана;  $l$  — длина ленты;  $G_{ny}$  — вес груза натяжного устройства;  $m_2$  — масса участка грузовой ветви;  $m_n$  — масса участка порожней ветви;  $m_{np}$  — масса привода;  $w$  — коэффициент сопротивления движению;  $f$  — коэффициент сопротивления движению натяжных грузов;  $\eta$  — вязкость ленты с грузом;  $C$  — жесткость ленты;  $C_k$  — жесткость канатов натяжного устройства;  $G_2, G_n$  — погонный вес движущихся частей соответственно грузовой и порожней ветви.

Авторы приводят модель к матричной форме:

$$M\ddot{X} + N\dot{X} + CX + S \operatorname{sgn} \dot{X} + G = P \operatorname{sgn}(\dot{X}_c - \dot{X}_1) M_{np}, \quad (3)$$

где матрица  $M_{5 \times 5}$  — матрица масс;  $N_{5 \times 5}$  — матрица коэффициентов вязкого трения;  $C_{5 \times 5}$  — матрица коэффициентов жесткого трения;  $S_{5 \times 5}$  — матрица коэффициентов сил сопротивления движению. Матрицы  $P_{5 \times 1}$  и  $G_{5 \times 1}$  связаны с внешними воздействиями на ленту со стороны движущего привода и натяжного устройства.

А затем в эту модель, используя каноническое правило О. Коши, вводятся в качестве координат состояния перемещения и скорости сосредоточенных масс  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{10})^T$ .

Модель движения ленты конвейера в пространстве состояний представляется авторами в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений с несколькими управляющими сигналами:

$$\dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{B}_1 \operatorname{sgn}(x_c - x_6) M_{np} + \tilde{B}_2 \operatorname{sgn} X + \tilde{B}_3 G_{ny}. \quad (4)$$

Здесь первое управляющее воздействие  $U_1 = M_{np}$  — это движущий момент, создаваемый приводом, второе управляющее воздействие  $U_2 = \operatorname{sgn} X$  — силы сопротивления движению сосредоточенных масс ленты, третье управляющее воздействие  $U_3 = G_{ny}$  — вес натяжного устройства.

В этих обозначениях система уравнений, описывающая модель движения ленты конвейера под действием трех управляющих воздействий, окончательно записывается в виде:

$$\dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{B}_1 \operatorname{sgn}(x_c - x_6) U_1 + \tilde{B}_2 U_2 + \tilde{B}_3 U_3. \quad (5)$$

Матрица состояния системы  $\tilde{A}$  представляет собой блочную матрицу, включающую в себя матрицы  $M^{-1}N$  и  $M^{-1}C$ . Матрицы управления также блочные: матрица  $\tilde{B}_1$  включает в себя  $M^{-1}P$ ,  $\tilde{B}_2$  включает в себя  $M^{-1}S$ ,  $\tilde{B}_3$  включает в себя  $M^{-1}G$ :

$$\tilde{A}_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & E_5 \\ M^{-1}C_{5 \times 5} & M^{-1}N_{5 \times 5} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{40 \times 1} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} \\ M^{-1}P_{5 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{20 \times 10} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \\ 0_{5 \times 5} & M^{-1}S_{5 \times 5} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_{30 \times 1} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} \\ M^{-1}G_{5 \times 1} \end{bmatrix}.$$

Составление этой модели подробнейшим образом описано в работе [3, 11]. Авторами выполнено моделирование в ППП *Matlab* и получены приведенные на рис. 2 переходные процессы по скоростям сосредоточенных масс.

На рис. 2 изображены переходные процессы по скоростям тех сосредоточенных масс, которые представляют ленту —  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Видно, что массы  $m_1, m_2$ , расположенные на приводе и на грузовой ветви, и массы  $m_3, m_4$ , расположенные на хво-

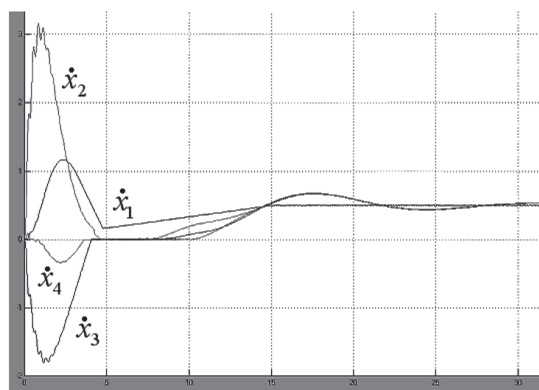


Рис. 2. Переходные процессы по скоростям сосредоточенных масс при пятимассовой модели  
 Fig. 2. Transient processes per rates of concentrated masses in five-mass model

стовом барабане и на порожней ветви, в момент прямого пуска движутся в противоположные стороны, что вызывает растяжение ленты и может привести к проскальзыванию и пробуксовке. По графикам можно оценить время, которое потребуется для преодоления тяжелого динамического режима, возникающего при пуске, и для выхода сосредоточенных масс на общую скорость. Можно также оценить время запаздывания для  $m_3$ , расположенной в месте загрузки конвейера, которое обусловлено передачей упругой лентой движущего момента от привода. Величину этого времени можно использовать при синтезе системы управления скоростью ленты с целью обеспечения равномерной загрузки конвейера. Пятимассовая модель обладает существенными достоинствами: она позволяет оценивать деформации ленты, определять такие важные технологические характеристики, как величину тягового фактора, измерять усилия, возникающие в ленте. Рассмотрим модели с другим количеством аппроксимирующих масс и проведем анализ разработанных моделей.

### Элементарная модель ленточного конвейера с двумя сосредоточенными массами

Рассмотрим наиболее упрощенное представление конвейерной ленты: расчетная схема для конвейера с однобарабанным головным приводом и натяжным устройством, расположенным в хвостовой части конвейера, представлена на рис. 3. При построении математической модели распределенную массу ленты с грузом представим двумя массами  $m_1, m_2$ , расположенными на головном и хвостовом барабанах. В качестве обобщенных переменных приняты их перемещения  $x_1, x_2$ , скорости  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ , а также положение и скорость перемещения натяжного груза  $\delta, \dot{\delta}$ . Конечномерная математическая модель движения конвейера с грузом описана шестью координатами состояния  $X = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \delta, \dot{\delta})^T$ .

Модель движения ленты конвейера может быть представлена в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых описывает движение сосредоточенной массы  $m_1$ :

$$m_e(2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + m_n(2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + m_{np}\ddot{x}_1 + 2C(x_1 - x_2) + 0,25C_k(x_1 - x_2 - 2\delta) + 0,5G_e lw \operatorname{sgn} \dot{x}_1 + 0,5G_n lw \operatorname{sgn} \dot{x}_1 + 2\eta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \frac{M_{np}}{R_g} \operatorname{sgn}(\dot{x}_c - \dot{x}_1);$$

$$\begin{aligned}
& m_2(\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2) + m_n(\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2) + 2C(x_2 - x_1) + 0,25C_k(x_2 - x_1 + 2\delta) + \\
& + 0,5G_2lw \operatorname{sgn} \dot{x}_2 + 0,5G_nlw \operatorname{sgn} \dot{x}_2 - 2\eta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\
& \frac{G_{ny}}{g} \ddot{\delta} - 0,5(x_1 - x_2 - \delta)C_k + G_{ny} + G_{ny}f \operatorname{sgn} \dot{\delta} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Эта система уравнений и является разрабатываемой нами математической моделью. Как рекомендуют авторы [3, 11, 16], для более лаконичного представления используем ее матричный вид относительно вектора состояния  $X = (x_1, x_2, \delta)^T$ .

$$M\ddot{X} + N\dot{X} + CX + S \operatorname{sgn} \dot{X} + G = P \operatorname{sgn}(\dot{X}_c - \dot{X}_1)M_{np}, \tag{7}$$

где:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} 2m_2 + 2m_n + m_{np} & m_2 + m_n & 0 \\ m_2 + m_n & 2m_2 + 2m_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{ny}}{g} \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{ny} \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} R_6^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
N &= \begin{bmatrix} 2\eta & -2\eta & 0 \\ -2\eta & 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2C + 0,25C_k & -2C - 0,25C_k & -0,5C_k \\ -2C - 0,25C_k & 2C + 0,25C_k & 0,5C_k \\ -0,5C_k & 0,5C_k & C_k \end{bmatrix}; \\
S &= \operatorname{diag} [0,5G_nlw + 0,5G_2lw \quad 0,5G_nlw + 0,5G_2lw \quad G_{ny}f].
\end{aligned}$$

Для дальнейшего исследования выберем подземный типажный ленточный конвейер 1Л-100К с тканевой лентой, предназначенный для использования в выработках с углами наклона от  $-3^\circ$  до  $+18^\circ$ . Приемная способность этого конвейера составляет  $11 \text{ м}^3/\text{мин}$ , ширина ленты  $1000 \text{ мм}$ , скорость движения ленты  $1,6 \text{ м/с}$ , диаметр приводного барабана  $800 \text{ мм}$ , производительность —  $420 \text{ т/ч}$ . В соответствии с графиками применимости длина конвейерной установки при угле наклона выработки  $0^\circ$  составляет  $1000 \text{ м}$ .

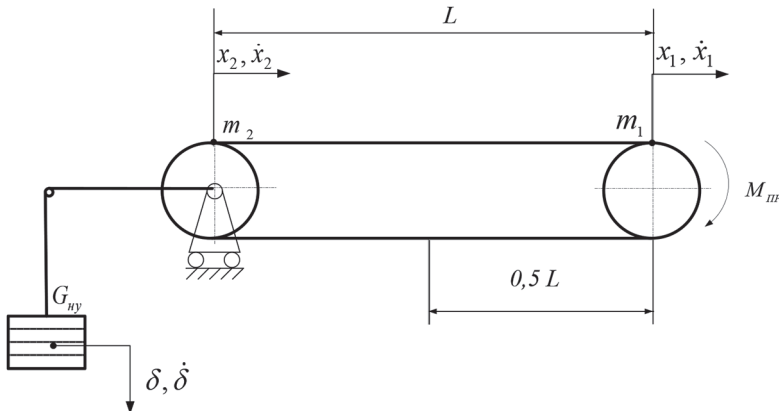


Рис. 3. Расчетная схема конвейера с двумя сосредоточенными массами

Fig. 3. Analytical model of conveyor with two concentrated masses

Получим математическую модель в канонической форме О. Коши. Для этого умножим все члены уравнения на матрицу  $M^{-1}$ :

$$\ddot{X} + M^{-1}N\dot{X} + M^{-1}CX + M^{-1}S \operatorname{sgn} \dot{X} + M^{-1}G = M^{-1}P \operatorname{sgn}(\dot{X}_c - \dot{X}_1)M_{np}.$$

Выразим старшие производные и запишем в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = -M^{-1}C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \delta \end{bmatrix} - M^{-1}N \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} - M^{-1}S \operatorname{sgn} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} - M^{-1}G + M^{-1}P \operatorname{sgn}(\dot{X}_c - \dot{x}_1)M_{np}.$$

Введем координаты состояния  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ :

$$x_1 = x_1, \quad x_4 = \dot{x}_1,$$

$$x_2 = x_2, \quad x_5 = \dot{x}_2,$$

$$x_3 = \delta, \quad x_6 = \dot{x}_3 = \dot{\delta}.$$

При таком способе введения координатами состояния будут являться перемещения  $x_i$  и скорости  $\dot{x}_i$  сосредоточенных масс, а ускорения  $\ddot{x}_i$  могут быть выражены как производные последних трех координат:  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_4$ ;  $\ddot{x}_2 = \dot{x}_5$ ;  $\ddot{\delta} = \dot{x}_6$ .

Если объединить в один вектор все координаты состояния, то модель системы будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -M^{-1}N & -M^{-1}C & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -M^{-1}S & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \cdot \operatorname{sgn} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} G_{ny} + \begin{bmatrix} R_1^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \operatorname{sgn}(\dot{X}_c - x_4)M_{np}.$$

Матрицы  $M^{-1}C$ ,  $M^{-1}N$ ,  $M^{-1}S$  — квадратные, имеют размерность  $3 \times 3$ , а  $M^{-1}G$ ,  $M^{-1}P$  — матрицы-столбцы размерности  $3 \times 1$ .

Введя обозначения для управляющих сигналов, приведем систему уравнений, описывающую модель движения ленты конвейера, к виду (9). Матрица состояния системы  $\tilde{A}$  представляет собой блочную матрицу, включающую в себя матрицы  $M^{-1}N$  и  $M^{-1}C$ , матрицы управления также блочные: матрица  $\tilde{B}_1$  включает в себя  $M^{-1}P$ ,  $\tilde{B}_2$  включает в себя  $M^{-1}S$ ,  $\tilde{B}_3$  включает в себя  $M^{-1}G$ :

$$\tilde{A}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & E_3 \\ -M^{-1}C_{3 \times 3} & -M^{-1}N_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

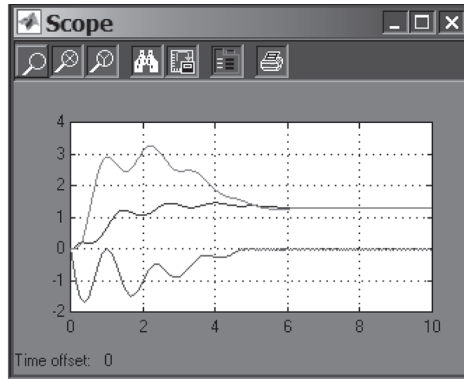


Рис. 4. Переходные процессы по скоростям сосредоточенных масс при двухмассовой модели  
 Fig. 4. Transient processes per rates of concentrated masses in two-mass model

$$\tilde{B}_{1 \times 6} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ M^{-1} P_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -M^{-1} S_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ -M^{-1} G_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Далее воспользуемся пакетом программ Control System Toolbox. Составим программу вычисления матриц состояния и управления для модели  $\tilde{A}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3$ . Для изучения динамических процессов в модели проведем компьютерное моделирование в системе Simulink, входящей в пакет прикладных программ Matlab. Simulink позволяет выполнять моделирование динамических систем, описываемых обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями. Используя типовые блоки, соберем структурную схему системы, включающую в себя контур ленты и привод конвейера. Результаты моделирования представлены на рис. 4. Моделировался прямой пуск конвейера и последующее движение его с постоянной скоростью  $v = 1,6$  м/с. Результатами компьютерного моделирования являются переходные процессы по скоростям обобщенных координат ленты и натяжного устройства. Видно, что движение двух сосредоточенных масс ленты плавное, и они выходят на заданную совместную скорость. Натяжное устройство после того, как будет выбрана слабина, возникающая из-за растяжения ленты при движении с грузом, останавливается. Время переходных процессов составляет 7 с. Используя столь простую модель, трудно определять деформации, возникающие в ленте, и корректно оценивать время запаздывания и время окончания переходных процессов.

### Детализированная модель ленточного конвейера для анализа волновых процессов

И, наконец, рассмотрим модель с семью сосредоточенными массами, расположенными так, как представлено на рис. 5.

Используя предложенную методику, получим систему из семи дифференциальных уравнений:

$$(2m_3 + 2m_n + m_{np})\ddot{x}_1 + m_3\ddot{x}_2 + m_7\ddot{x}_6 + 2Cx_1 - Cx_2 - Cx_6 + \\ + (0,33G_n lw + 0,33G_3 lw) \operatorname{sgn} \dot{x}_1 + 2\eta \dot{x}_1 - \eta \dot{x}_2 - \eta \dot{x}_6 = \frac{M_{np}}{R_1} \operatorname{sgn}(\dot{x}_c - \dot{x}_1),$$

$$m_2\ddot{x}_1 + 4m_2\ddot{x}_2 + m_2\ddot{x}_3 - Cx_1 + 2Cx_2 - Cx_3 + 0,66G_2 lw \operatorname{sgn} \dot{x}_2 - \eta \dot{x}_1 + 2\eta \dot{x}_2 - \eta \dot{x}_3 = 0$$



$$\begin{aligned}
m_2 \ddot{x}_2 + 4m_2 \ddot{x}_3 + m_2 \ddot{x}_4 - Cx_2 + 2Cx_3 - Cx_4 + 0,66G_2 lw \operatorname{sgn} \dot{x}_3 - \eta \dot{x}_2 + 2\eta \dot{x}_3 - \eta \dot{x}_4 &= 0 \\
m_2 \ddot{x}_3 + (2m_2 + 2m_n) \ddot{x}_4 + m_n \ddot{x}_5 - Cx_3 + (2C + 0,25C_k)x_4 - (C + 0,25C_k)x_5 - \\
- 0,5C_k \delta - \eta \dot{x}_3 + 2\eta \dot{x}_4 - \eta \dot{x}_5 + (0,33G_2 lw + 0,33G_n lw) \operatorname{sgn} \dot{x}_4 &= 0 \\
m_2 \ddot{x}_4 + 4m_n \ddot{x}_4 + m_n \ddot{x}_6 - Cx_4 + (2C + 0,25C_k)x_5 - Cx_6 + 0,5C_k \delta - \eta \dot{x}_4 + \\
+ 2\eta \dot{x}_5 - \eta \dot{x}_6 + 0,66G_n lw \operatorname{sgn} \dot{x}_4 &= 0 \\
m_n \ddot{x}_1 + m_n \ddot{x}_5 + 4m_n \ddot{x}_6 - Cx_1 - Cx_5 + 2Cx_6 - \eta \dot{x}_1 - \eta \dot{x}_5 + 2\eta \dot{x}_6 + 0,66G_n lw \operatorname{sgn} \dot{x}_4 &= 0 \\
\frac{G_{ny}}{g} \ddot{\delta} - 0,5C_k x_4 + 0,5C_k x_5 + C_k \delta + G_{ny} + G_{ny} f \operatorname{sgn} \dot{\delta} &= 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

Работать с этой моделью будем по известной методике: получим математическую модель в канонической форме, введем координаты состояния  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{14})^T$ :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1, & x_8 &= \dot{x}_1, \\
x_2 &= x_2, & x_9 &= \dot{x}_2, \\
&\dots & & \\
x_7 &= \delta, & x_{14} &= \dot{\delta}.
\end{aligned}$$

Система (9) запишется в матричном виде, формирующие ее матрицы – квадратные (имеют размерность  $7 \times 7$ ) или матрицы-столбцы ( $7 \times 1$ ). Введя обозначения для управляющих сигналов, приведем систему уравнений, описывающую модель движения ленты конвейера, к виду (9). Матрица состояния системы  $\tilde{A}$  и управления представляют собой блочные матрицы:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{14 \times 14} &= \begin{bmatrix} 0_{7 \times 7} & E_7 \\ -M^{-1}C_{7 \times 7} & -M^{-1}N_{7 \times 7} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{14 \times 1} = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ M^{-1}P_{7 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{24 \times 14} = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 7} & 0_{7 \times 7} \\ 0_{7 \times 7} & -M^{-1}S_{7 \times 7} \end{bmatrix}, \\
\tilde{B}_{34 \times 1} &= \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ -M^{-1}G_{7 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (10)
\end{aligned}$$

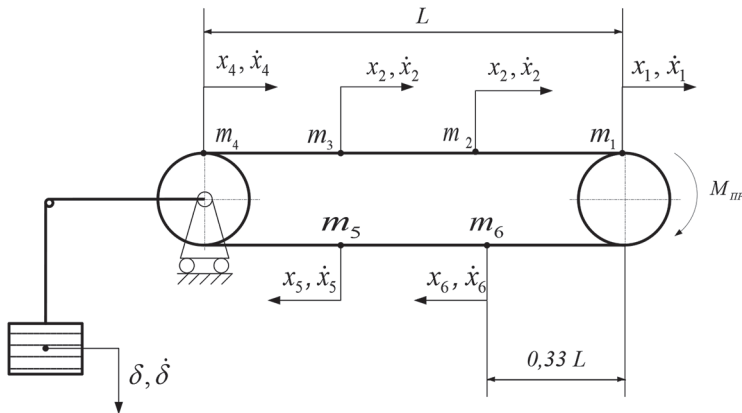


Рис. 5. Расчетная схема конвейера с семью сосредоточенными массами

Fig. 5. Analytical model of conveyor with seven concentrated masses

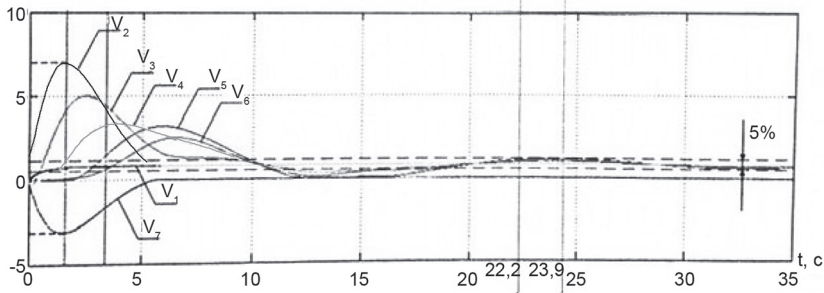


Рис. 6. Переходные процессы по скоростям сосредоточенных масс при семимассовой модели  
 Fig. 6-Transient processes per rates of concentrated masses in seven-mass model

Мы можем провести исследование устойчивости и качества переходных процессов полученной модели, найдя собственные ее числа:

$$\lambda_{1,2} = -3,12 \pm 20,65j; \quad \lambda_{3,4} = -0,58 \pm 0,85j; \quad \lambda_{5,6} = -1,4 \pm 0,76j;$$

$$\lambda_{7,8} = -0,0005 \pm 0,00003j;$$

$$\lambda_{9,10} = -0,18 \pm 0,55j; \quad \lambda_{11,12} = -0,3 \pm 0,68j; \quad \lambda_{13} = -1,2; \quad \lambda_{13} = -3,81.$$

Проведя моделирование, получим сами переходные процессы по скоростям сосредоточенных масс модели движения ленты конвейера. Эти переходные процессы приведены на рис. 6. Модель позволяет более точно анализировать переходные процессы в ленте при пуске и останове конвейера или при переключении его на другую скорость движения.

В настоящее время активно ведутся исследования пуско-тормозных режимов работы конвейера, которые сопровождаются волновыми деформациями в грузовой и порожней ветвях ленты [17–20]. Для исследования таких режимов и обеспечения безаварийной работы ленточных конвейеров в тяжелых динамических режимах может быть использована предлагаемая модель.

### Выводы

Двухмассовая модель существенно облегчает анализ совместного движения ленты с приводом. Используя эту модель, можно рассмотреть режимы работы именно привода при такой нагрузке. Модель менее подробно описывает ленту, но при этом позволяет оценить проскальзывание ленты на барабане, ход натяжного устройства, вычислить величину тягового фактора.

Семимассовая модель должна использоваться для оценки волновых процессов в ленте конвейера. При решении этой задачи необходимы модели с большим количеством сосредоточенных масс, они позволяют более детально анализировать переходные процессы в ленте при пуске и останове конвейера. В частности, на графиках переходных процессов видно, что релаксационные процессы в порожней ветви протекают гораздо дольше, чем в грузовой, а на графиках для пятимассовой системы время релаксации для всех пяти масс одинаково. Также благодаря модели можно оценивать деформации и усилия на различных участках ленты, возникающие при тяжелых динамических режимах. Еще одно применение многомассовой модели — это описание поворотных конвейеров, когда при повороте внутренняя сторона ленты сжимается, а наружная растягивается, из-за чего возникают дополнительные деформации.


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солод Г. И. О технологических предпосылках автоматизации конвейеров и конвейерных линий в горнодобывающей промышленности / Транспорт горных предприятий. — М., 1968.
2. Шахмейстер Л. Г., Дмитриев В. Г., Лобачева А. К. Динамика грузопотоков и регулирование скорости ленточного конвейера. — М.: изд-во МГИ, 1974. — 45 с.
3. Дмитриева В. В. Разработка и исследование системы автоматической стабилизации погонной нагрузки магистрального конвейера Диссертация на соискание ученой степени канд. тех. наук. — М., МГГУ, 2005. — 162 с.
4. Дмитриева В. В., Сизин П. Е. Управление скоростью ленты конвейера в зависимости случайного грузопотока. — М.: Изд-во «Горная книга», 2020. — 72 с.
5. Fei Zeng, Cheng Yan, Qing Wu, Tao Wang Dynamic behaviour of a conveyor belt considering non-uniform bulk material distribution for speed control // Applied Sciences. 2020, vol. 10, no 13. DOI:10.3390/10134436.
6. Perun G., Lazarz B., Opasiak T. Opportunities to improve the efficiency of the «GRAWEC 1200» belt conveyor // Transport Problems. 2020, vol. 15, no 4, part 2, pp. 215–226, DOI: 10.21307/tp-2020-061.
7. Дмитриева В. В., Авхадиев И. Ф., Сизин П. Е. Использование современных программно-технических комплексов для автоматизации конвейерных линий // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2021. — № 2. — С. 150–163. DOI: 10.25018/0236-1493-2021-2-0-150-163.
8. Rahman A., Robinson W. A., Carr M. J., Wheeler C. A dynamic analysis of the rail conveyor system / 13th International Conference on Bulk Materials, Storage, Handling & Transportation. Conference Paper, 2019.
9. Заголило С. А., Семенов А. С., Семенова М. Н., Якушев И. А. Компьютерное моделирование многодвигательной системы электропривода в пакете программ Matlab // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. — № 8(2). DOI: 10.26102/2310-6018/2020.29.2.012.
10. Rupali S. Tupkan, Devesh Kumar, Modak J. P., Saurabh Mathur Review of transient dynamics of belt conveyor // Dogo Rangsang Research Journal. 2020, vol. 10, issue 06, no 9. DOI: 10.46528/DRSRJ.2020.V10I06N09.09.
11. Гершун С. В. Автоматическая стабилизация величины тягового фактора магистрального ленточного конвейера с двухдвигательным приводом. Диссертация на соискание степени магистра техники и технологий. — М., МГГУ, 2010.
12. Корнеев А. П., Абабурко В. Н. Моделирование в системах с распределенными параметрами с учетом диссипации / САПР и моделирование в современной электронике. Сборник научных трудов III Международной научно-практической конференции. — Брянск, 2019. — С. 222–225. DOI: 10.30987/conferencearticle\_5e028212b449e4.31119706.
13. Корнеев А. П., Лневский Г. С. Математическое моделирование электромеханической системы с распределенными параметрами в Matlab / САПР и моделирование в современной электронике. Сборник научных трудов II Международной научно-практической конференции. — Брянск, 2018. — С. 63–66. DOI: 10.30987/conferencearticle\_5c19e6a22fa4f6.29576500.
14. Yongbo Guo, Fansheng Wang Multi body dynamic equations of belt conveyor and the reasonable starting mode // Symmetry. 2020, vol. 12, no 9, article 1489. DOI: 10.3390/sym12091489.
15. Takagi K., Nishida G., Maschke B., Asaka K. Distributed parameter system modeling / Soft Actuators. Asaka K., Okuzaki H. (Eds.). Springer, Singapore. 2019, pp. 403–415. DOI: 10.1007/978-981-13-6850-9\_24.
16. Запенин И. В., Бельфор В. Е., Селищев Ю. А. Моделирование переходных процессов ленточных конвейеров. — М.: Недра, 1969. — 56 с.

17. Miloradovic N., Vujanac R., Miloradovic D. M., Glisovic J. Determination of resistance to motion during operation of belt conveyor // *Machines. Technologies. Materials*. 2021, vol. 15, no 3, pp. 86 – 88.

18. Indraswari Kusumaningtyas, Ashley J. G. Nuttalli, Lodewijks G. Dynamics of multiple-drive belt conveyors during starting // *Applied Mechanics and Materials*. 2016, vol. 842, pp. 141 – 146. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.842.141.

19. Sanjay Sakharwade, Shubhrata Nagpal Analysis of transient belt stretch for horizontal and inclined belt conveyor system // *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*. 2019, vol. 4, no 5, pp. 1169 – 1179. DOI: 10.33889/IJMEMS.2019.4.5-092.

20. Любенец Т. Определение натяжений конвейерной ленты ленточного конвейера. Сборник научных трудов Национального горного университета. – 2020. – № 60. – С. 81 – 92. DOI: 10.33271/crpnmu/60.081. 

## REFERENCES

1. Solod G. I. On technological prerequisites for automation of conveyors and conveyor lines in the mining industry. *Transport gornyykh predpriyatiy* [Transport of mining enterprises], Moscow, 1968.

2. Shakhmeyer L. G., Dmitriev V. G., Lobacheva A. K. *Dinamika gruzopotokov i regulirovanie skorosti lentochnogo konveyera* [Dynamics of cargo flows and speed control of a belt conveyor], Moscow, izd-vo MGI, 1974, 45 p.

3. Dmitrieva V. V. *Razrabotka i issledovanie sistemy avtomaticheskoy stabilizatsii pogonnoy nagruzki magistral'nogo konveyera* [Development and research of the system of automatic stabilization of the linear load of the main conveyor], Candidate's thesis, Moscow, MGGU, 2005, 162 p.

4. Dmitrieva V. V., Sizin P. E. *Upravlenie skorost'yu lenty konveyera v zavisimosti sluchaynogo gruzopotoka* [Speed control of conveyor belt according to the random traffic], Moscow, Izd-vo «Gornaya kniga», 2020, 72 p.

5. Fei Zeng, Cheng Yan, Qing Wu, Tao Wang Dynamic behaviour of a conveyor belt considering non-uniform bulk material distribution for speed control. *Applied Sciences*. 2020, vol. 10, no 13. DOI:10.3390/10134436.

6. Perun G., Lazarz B., Opasiak T. Opportunities to improve the efficiency of the «GRAWEC 1200» belt conveyor. *Transport Problems*. 2020, vol. 15, no 4, part 2, pp. 215–226. DOI: 10.21307/tp-2020-061.

7. Dmitrieva V. V., Avkhadiev I. F., Sizin P. E. Use of advance hardware/software in multiple conveyor system automation. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2021, no. 2, pp. 150–163. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2021-2-0-150-163.

8. Rahman A., Robinson W. A., Carr M. J., Wheeler C. A dynamic analysis of the rail conveyor system. *13th International Conference on Bulk Materials, Storage, Handling & Transportation*. Conference Paper, 2019.

9. Zagolilo S. A., Semenov A. S., Semenova M. N., Yakushev I. A. Computer modeling of multi-motor electric drive system in MatLab software. *Modeling, optimization and information technology*. 2020, no 8(2). DOI: 10.26102/2310-6018/2020.29.2.012.

10. Rupali S. Tupkan, Devesh Kumar, Modak J. P., Saurabh Mathur Review of transient dynamics of belt conveyor. *Dogo Rangsang Research Journal*. 2020, vol. 10, issue 06, no 9. DOI: 10.46528/DRSRJ.2020.V10I06N09.09.

11. Gershun S. V. *Avtomaticheskaya stabilizatsiya velichiny tyagovogo faktora magistral'nogo lentochnogo konveyera s dvukhdvigatel'nyim privodom* [Automatic stabilization of the traction factor of the main belt conveyor with a two-motor drive], Master's degree's thesis, Moscow, MGGU, 2010.

12. Korneev A. P., Ababurko V. N. Modeling in systems with distributed parameters taking into account dissipation. *SAPR i modelirovanie v sovremennoy elektronike. Sbornik nauchnykh trudov III Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [CAD and modeling in modern

electronics. Collection of scientific papers of the III International Scientific and Practical Conference], Bryansk, 2019, pp. 222–225. [In Russ]. DOI: 10.30987 /conferencearticle\_5e028212b449e4.31119706.

13. Korneev A. P., Lenevskiy G. S. Mathematical modeling of Electromechanical systems with distributed parameters in Matlab. *SAPR i modelirovanie v sovremennoy elektronike. Sbornik nauchnykh trudov II Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [CAD and modeling in modern electronics. Collection of scientific papers of the II International Scientific and Practical Conference], Bryansk, 2018, pp. 63–66. [In Russ]. DOI: 10.30987/conferencearticle\_5c19e6a22fa4f6.29576500.

14. Yongbo Guo, Fansheng Wang Multi body dynamic equations of belt conveyor and the reasonable starting mode. *Symmetry*. 2020, vol. 12, no 9, article 1489. DOI: 10.3390/sym12091489.

15. Takagi K., Nishida G., Maschke B., Asaka K. Distributed parameter system modeling. *Soft Actuators*. Asaka K., Okuzaki H. (Eds.). Springer, Singapore. 2019, pp. 403–415. DOI: 10.1007/978-981-13-6850-9\_24.

16. Zapenin I. V., Bel'for V. E., Selishchev Yu. A. *Modelirovanie perekhodnykh protsessov lentochnykh konveyerov* [Modeling of transient processes of belt conveyors], Moscow, Nedra, 1969, 56 p.

17. Miloradovic N., Vujanac R., Miloradovic D. M., Glisovic J. Determination of resistance to motion during operation of belt conveyor. *Machines. Technologies. Materials*. 2021, vol. 15, no 3, pp. 86–88.

18. Indraswari Kusumaningtyas, Ashley J. G. Nuttalli, Lodewijks G. Dynamics of multiple-drive belt conveyors during starting. *Applied Mechanics and Materials*. 2016, vol. 842, pp. 141–146. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.842.141.

19. Sanjay Sakharwade, Shubhrata Nagpal Analysis of transient belt stretch for horizontal and inclined belt conveyor system. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*. 2019, vol. 4, no 5, pp. 1169–1179. DOI: 10.33889/IJMEMS.2019.4.5-092.

20. Lyubenets T. Determination of the tension of the conveyor belt of the conveyor belt. *Sbornik nauchnykh trudov Natsional'nogo gornogo universiteta*. 2020, no. 60, pp. 81–92. [In Russ]. DOI: 10.33271/crpnmu/60.081.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Дмитриева Валерия Валерьевна* — канд. техн. наук, доцент,  
РГУ Нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина,  
e-mail: dm-valeriya@yandex.ru,

*Сизин Павел Евгеньевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент,  
e-mail: mstranger@list.ru, ИБО НИТУ «МИСиС».

**Для контактов:** Дмитриева В.В., e-mail: dm-valeriya@yandex.ru.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*V.V. Dmitrieva*, Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor,  
e-mail: dm-valeriya@yandex.ru,

Gubkin Russian State University of Oil and Gas  
(National Research University), 119991, Moscow, Russia,  
*P.E. Sizin*, Cand. Sci. (Phys. Mathem.), Assistant Professor,  
e-mail: mstranger@list.ru, Institute of Basic Education,  
National University of Science and Technology «MISIS»,  
119049, Moscow, Russia.

**Corresponding author:** V.V. Dmitrieva, e-mail: dm-valeriya@yandex.ru.

Получена редакцией 09.09.2021; получена после рецензии 08.10.2021; принята к печати 10.12.2021.

Received by the editors 09.09.2021; received after the review 08.10.2021; accepted for printing 10.12.2021.