ГИАБ. Горный информационно-аналитический бюллетень /
MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin, 2021;(11-1):27—45
ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ / ORIGINAL PAPER

УДК 539.(4+4.011+42)+622.(011.4+02+023.23) DOI: 10.25018/0236_1493_2021_111_0_27

КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

А. В. Жабко

Уральский государственный горный университет, Екатеринбург, Россия

Аннотация: Работа посвящена установлению закономерностей пластического деформирования и разрушения горных пород. На основе выявленных закономерностей предложен аналитический критерий пластичности и прочности горных пород, который сравнивается с известными аналогами — критериями Кулона и Хука-Брауна — и верифицируется с подробным анализом. Приводится классификация горных пород по характерным особенностям их пластического деформирования. Рассматриваются достоинства и недостатки существующих критериев прочности. Подробно обсуждается и предлагается новый взгляд на механизм пластического деформирования горной породы на стадии упрочнения. Указывается на трансляционно-ротационный характер пластического деформирования в окрестности сдвиговых площадок, следствием чего и является повышение прочности пород (упрочнение) и явление дилатансии. То есть появляющиеся на стадии деформационного упрочнения микротрещины не реализуются в полноценные плоскости скольжения, секущие весь образец даже при возрастании девиатора напряжений. Это связано с перераспределением напряжений в окрестности концов трещины (рост нормальных напряжений), вызванного разворотом сдвиговой площадки и упругим отпором боковых пород, что, в свою очередь, приводит к смыканию устьев трещины и невозможности ее дальнейшего прорастания. В работе приводятся количественные зависимости для определения силовых факторов, вызывающих дилатансию и разворот элементов среды, то есть рассматривается динамика процесса пластического деформирования. Делается вывод о том, что главным недостатком критерия Кулона является низкая точность прогноза разрушения для большинства горных пород, а достоинством — простота в использовании. Напротив, критерий Хука-Брауна достаточно точно прогнозирует паспорт прочности, но в силу своей эмпирической сути никак не объясняет физику или механику пластического деформирования. В этой связи предпочтение отдается предлагаемому критерию, который помимо предела прочности определяет также предел упругости и функцию пластического потенциала, а также позволяет получить количественные оценки процесса пластического деформирования горных пород.

Ключевые слова: критерий пластичности и прочности, дилатансия, пластическое деформирование, деформационное упрочнение, разрушение горных пород при сдвиге, трещина, главные напряжения.

Для цитирования: *Жабко А. В.* Критерии прочности горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2021. — № 11-1. — С. 27—45. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_111_0_27.

Rock failure criteria

A. V. Zhabko

Ural State Mining University, Yekaterinburg, Russia

© А. В. Жабко. 2021

Abstract: Based on the found regular patterns of plastic deformation and failure of rocks, an analytical plasticity and strength criterion is proposed, compared with the known failure criteria by Coulomb and Hoek–Brown, comprehensively analyzed and verified. A classification of rocks by features of plastic deformation is presented. Benefits and disbenefits of the existing rock failure criteria are considered. A novel view on the mechanisms of plastic deformation of rocks in the phase of strengthening is put forward and discussed. It is highlighted that plastic deformation is translational-and-rotational nearby planes of shear, and the result of such behavior is higher strength of rocks (strengthening) and dilatancy. That is, micro-cracks which appear at the stage of deformation-induced strengthening keep off turning into full-fledged sliding surfaces intersecting the whole sample when the stress deviator is raised. This is connected with the stress redistribution at the crack tips (growth of the normal stresses), caused by the turn of the plane of shear and by the elastic reaction pressure of side rocks, which, in its turn, leads to the closure of the crack mouths, and the crack cannot grow further. The article presents quantitative relations to find force factors which initiate dilatancy and turn of components in the medium, i.e. spotlight is on dynamics of the plastic deformation process. The authors come to a conclusion that the major drawback of the Coulomb criterion is low precision of failure prediction while the advantage is easy usability. Alternatively, the Hoek–Brown failure criterion offers a sufficiently accurate prediction of a failure envelope but, being empirical at bottom, provides no explanation of the physics or mechanics of plastic deformation. In this context, the proposed criterion is preferable as it determines the limit strength, limit elasticity and the plastic potential, as well as allows evaluating the process of plastic deformation in rocks.

Key words: plasticity and strength criterion, dilatancy, plastic deformation, deformation-induced strengthening, shear fracture, crack, principal stresses.

For citation: Zhabko A. V. Rock failure criteria. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2021;(11-1):27—45. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236_1493_2021_111_0_27.

Введение

В 1773 году Кулон предложил знаменитый критерий прочности горных пород, заложив тем самым основы механики прочности и разрушения хрупких материалов — горных пород [1]. Данный критерий, что очень важно, определяет предельное касательное напряжение на площадке среза, то есть записывается в компонентах предельных напряжений, действующих на площадке среза:

$$\tau = \mathrm{tg}\varphi\sigma_n + C\,, \qquad (1)$$

где τ, σ_n — предельные касательные и нормальные напряжения на площадке среза соответственно; C, φ — соответственно сцепление и угол внутреннего трения горной породы.

Критерий Кулона, пожалуй, один из наиболее часто используемых критериев при оценке прочности и устойчивости горных пород и массивов. Главным достоинством критерия является его простота при использовании (линейность) и понятный физический смысл — разрушению препятствуют силы трения и сцепления.

Другим очень популярным в наши дни критерием прочности, о чем свидетельствует обилие современных исследований [2—4], является критерий Хука-Брауна, который для образцов горных пород записывается следующим образом [5—7]:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{сж}\left(m\frac{\sigma_3}{\sigma_{сж}} + 1\right)^{0,5}, \qquad (2)$$

где σ_1, σ_3 — главные напряжения; m — константа Хука-Брауна $4 \le m \le$ ≤ 33.

Как известно, предел прочности на одноосное сжатие может быть выражен через сцепление и угол внутреннего трения зависимостью:

$$\sigma_{сж} = 2C\,\mathrm{tg}\,\omega = 2C\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Таким образом, используя данное выражение для ненарушенного (не трещиноватого) массива, критерий (2) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C\,\mathrm{tg}\,\omega\sqrt{1+\frac{m\sigma_3}{2C\,\mathrm{tg}\,\omega}}. \qquad (3)$$

Необходимо сразу же отметить очень важное различие между критериями Кулона и Хука-Брауна: первый записывается через компоненты напряжений на площадке сдвига, а второй — через главные напряжения. Ниже будет показано, что переход от одних компонент к другим в условиях пластических деформаций (разупрочнение, разуплотнение, дилатансия) не так однозначен, как при упругом деформировании (деформирование без разрыва сплошности) абсолютно сплошной среды.

В работах [8, 9] в рамках модели сплошной среды, обладающей внутренним трением φ и сцеплением C, аналитически получен, экспериментально проверен и подтвержден [8] единый критерий пластичности (на стадии упрочнения) и прочности горных пород (твердых тел) при сдвиге:

– в компонентах главных напряжений σ_1, σ_3:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{tg}\varphi\,\sigma_1}{C}\right)\left(1+\frac{\mathrm{tg}\varphi k\,\sigma_3}{C}\right)}; \qquad (4)$$

– в компонентах напряжений на площадке среза τ, σ_n:

$$\tau = C\left(1+\sin\varphi\right)+\frac{1+k}{1-k}C\sin\varphi\ln\left|\frac{\left(1-k\right)\sigma_n+2kC\cos\varphi}{\left(1+k\right)C\cos\varphi}\right|, \qquad (5)$$

определяющий при $k=0$ – функцию пластического потенциала и начальную поверхность текучести (предел упругости) для горных пород с пластическим характером разрушения; $0 \le k \le 1$ – предел упругости и предел прочности горных пород; $k \to 1$ – теоретическую предельную поверхность или предел прочности при сдвиге (срезе), совпадающую с критерием Кулона (Coulomb, 1773).

И, действительно, используя выражение (5), получим:

$$\lim_{k\to 1}\tau = \left[\frac{0}{0}\right] = C + \mathrm{tg}\varphi\sigma_n.$$

Критерий пластичности и прочности (4), (5) может быть также выражен через другой параметр:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{2\left(C+\mathrm{tg}\varphi\,\sigma_1\right)}{\sigma_1-\sigma_3} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = \mathrm{ctg}\,\psi\left(C+\mathrm{tg}\,\varphi\,\sigma_1\right), \qquad (6)$$

где ψ – угол наклона наиболее слабой сдвиговой площадки к минимальному главному напряжению σ_3 (в общем случае является функцией напряженного состояния).

Механизм пластического деформирования горных пород при сдвиге

Таким образом, уравнение (6) фактически представляет собой критерий пластичности и прочности, выраженный через угол наклона сдвиговой площадки к минимальному главному напряжению. Согласно критерию (6) все время упрочнения вплоть до предела прочности ориентировка наиболее слабых площадок сдвига изменяется, то есть микросдвиговые трещины, возникающие на стадии, должны иметь разные ориентировки.

Уравнения (4) – (6) являются абсолютно равнозначными и представляют собой критерии прочности и пластичности в различных координатных плоскостях. Отметим, что уравнение (5) является решением следующего дифференциального уравнения [9]:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{\frac{C+\dfrac{\sigma_1 d\tau}{d\sigma_n}}{C+\dfrac{k\sigma_3 d\tau}{d\sigma_n}}}=0.$$

В критериях (4) – (6) параметры k (физический или механический параметр) и ψ (геометрический или кинематический параметр) определяют предел упругости и прочности, а также степень развития дилатансии. Что касается физического (механического, геометрического) смысла данных параметров, то для угла ψ он очевиден, при этом с ростом напряженного состояния угол наиболее опасной (критической) площадки сдвига уменьшается, а его наименьшее возможное значение составляет $\psi_{\min}=\pi/4+\varphi/2$. То есть на пределе упругости угол наиболее опасной площадки сдвига всегда больше, чем на пределе прочности. Таким образом, из чисто геометрических соображений понятно, что дефект, образовавшийся при определенном уровне напряжений, будет прорастать при усилении напряженного состояния, а прекращение роста возможно лишь при изменении ориентировки микротрещины к направлениям главных напряжений. Однако направление действия главных напряжений в образце не меняется, поэтому прекращение роста может быть достигнуто разворотом сдвиговых площадок. Можно также предположить, что при таком развороте все время деформационного упрочнения площадки микросдвигов пребывают в условиях специального предельного равновесия.

Напротив, коэффициент упрочнения (дилатансии) k имеет большее значение на пределе прочности и меньшее на пределе упругости. В росте параметра k как раз и заложен глубинный физический смысл процесса упрочнения и явления дилатансии, то есть ответ на поставленные ранее взаимодополняющие друг друга вопроса [9, 10]:

1) почему при достаточно однородном напряженном состоянии в образце не прорастают микросдвиги до полного среза образца при увеличивающемся девиаторе напряжений во время упрочнения?

2) как поврежденная среда может быть прочнее менее поврежденной при меньших неупругих деформациях?

Таким образом, что-то должно останавливать рост трещины микросдвига в растущем поле напряжений.

Коэффициент упрочнения k связывает предельные компоненты напряжений посредством выражений [9]:

$$\sigma_n=\sigma_1\cos^2\psi+k\sigma_3\sin^2\psi;$$

$$\tau=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\sin 2\psi. \qquad (7)$$

Из уравнений (7) следует, что при растущих разрушающих напряжениях σ_1 и τ рост дефектов (микротре-

щин) неизбежен, а затухание роста возможно только при увеличении нормального напряжения на площадке сдвига σ_n, которое и достигается посредством увеличения коэффициента упрочнения k. При этом надо отметить, что при постоянных C и φ рост τ можно компенсировать только ростом σ_n, что следует из критерия прочности Кулона,. Таким образом можно утверждать, что явление упрочнения, то есть возрастание несущей способности образца при непрерывно накапливающихся в нем дефектах (микротрещинах) достигается посредством увеличения нормальных напряжений на вновь образовавшихся сдвиговых площадках, что приводит к затуханию их прорастания (переход на другой иерархический уровень). Образование сдвиговой трещины на стадии деформационного упрочнения должно приводить к резкому перераспределению напряжений в ее окрестности, препятствующему росту трещины и срезу всего образца целиком, что мы обычно наблюдаем на пределе прочности, но уже при более высоком уровне напряжений. На рис. 1 приведена схема деформирования элемента образца в окрестности образовавшейся трещины микросдвига.

Разворот (расклинивание) площадки (элемента, структурного блока) позволяет активировать дополнительные силы упругой природы — силы упругого отпора, позволяющие увеличить силы внутреннего трения посредством увеличения нормального напряжения на площадке сдвига. Препятствующие развороту силы упругого отпора создают в окрестностях концов трещины повышенные значения нормальных

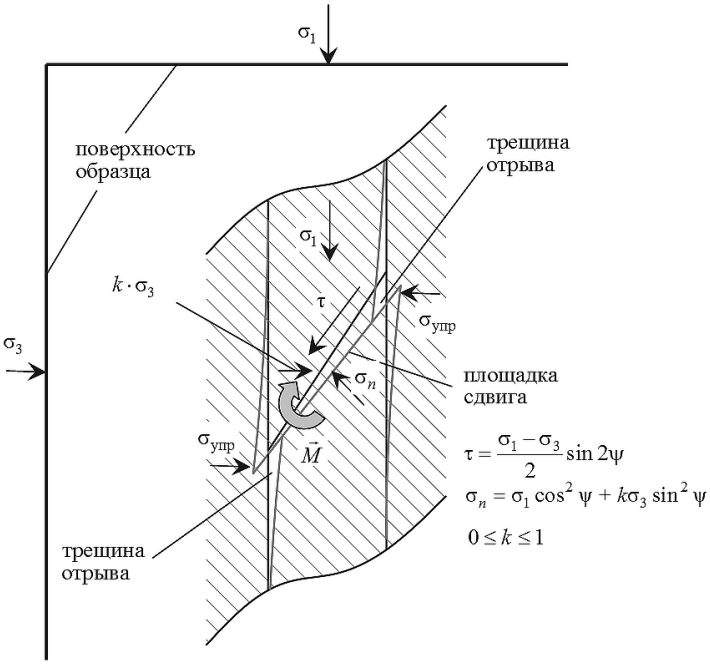


Рис. 1. Схема трансляционно-ротационного деформирования элемента образца в пластической фазе при упрочнении (черным цветом — положение элемента на пределе упругости; серым — в процессе деформационного упрочнения)
Fig. 1. Schematic of translational–rotational deformation of sample element in plastic phase of strengthening (black color—elastic limit; gray color—deformation-induced strengthening)

напряжений (рис. 1), что мгновенно тормозит прорастание микродефектов, то есть срез всего образца. При этом вследствие расклинивания увеличивается боковой обжим (в направлении минимального главного напряжения), то есть возрастает k на вновь образуемых площадках, в том числе на плоскости генерального разлома (сдвиговой площадки разрушения). Разумеется, такое расклинивание сопровождается увеличением объема образца в направлении минимального главного напряжения, что мы и называем дилатансией. А все перечисленное выше составляет явление упрочнения — повышение прочности образца во время пластического деформирования.

Динамика деформационного упрочнения

О трансляционно-ротационном характере пластического деформирования и разрушения в различных науках, таких как геотектоника, сейсмология, геофизика, геомеханика, механика деформируемого твердого тела, материаловедение и др., в последнее время говорится достаточно много [11–15]. Однако главной проблемой при количественном описании данного процесса является отсутствие понимания природы возникновения ротационного движения элементов, то есть природы момента силы, приводящего к их развороту.

Пока среда находится в упругой стадии деформирования, в каждой ее точке выполняется закон парности касательных напряжений, при котором уравновешиваются моменты сил. Однако при появлении площадок микросдвигов (относительном перемещении частей тела) реакции перераспределяются так, чтобы более эффективно препятствовать разрушению, что приводит к нарушению закона парности касательных напряжений и возникновению активного момента сил. Это соответственно приводит к переориентировке осей главных напряжений в окрестности площадки сдвига [9, 10].

В рамках проведенных исследований по созданию теории устойчивости откосов как континуальной среды по методу предельного равновесия [9, 10] автором было доказано, что на стадии пластического деформирования материалов, то есть при сдвиге по трещине (микротрещине), общая упругая реакция должна быть направлена так, как показано на рис. 2, а ее модуль определяется по формуле:

$$R = \left(\tau - \mathrm{tg}\varphi\sigma_n - C\right) l \cos\varphi, \qquad (8)$$

где l – длина площадки среза.

Отметим, что при таком направлении действия реакция совершает минимальную работу при перемещении частей тела [9, 10]. Другими словами, минимизируется работа упругой реакции при пластическом деформировании.

Исходя из рис. 2 и зависимости (8), в точке образования сдвиговой площадки возникает активный момент силы, равный [9, 10]:

$$M = \left(\tau - \mathrm{tg}\varphi\sigma_n - C\right) l \cos\varphi r \cdot$$
$$\cdot \sin\left(\vartheta - \varphi\right) = 0,5\left(\tau - \mathrm{tg}\varphi\sigma_n - C\right) \cdot$$
$$\cdot \cos\varphi \sin\left(\vartheta - \varphi\right) \cos\left(\vartheta - \varphi\right) l^2, \quad ,$$

где r – радиус (средний полуразмер) блока; ϑ – угол наклона площадки к оси, совпадающей с направлением действия минимального главного напряжения в начальный момент зарождения сдвиговой площадки.

Развитая автором теория позволяет выдвинуть модель пластического деформирования горных пород на стадии упрочнения, тем самым ответить на вопросы, поставленные выше.

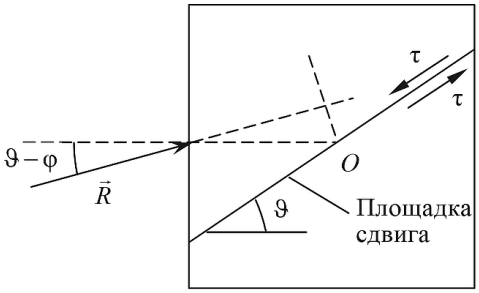


Рис. 2. Схема, объясняющая природу момента сил при пластическом деформировании
Fig. 2. Scheme to explain the nature of the moment of forces in plastic deformation

Модель пластического деформирования горных пород на стадии упрочнения

После достижения материалом предела упругости в нем начинают накапливаться микросдвиговые площадки (дефекты), которые не реализуются в полноценные плоскости скольжения даже при возрастании девиатора напряжений, что связано с перераспределением напряжений в окрестности концов трещины, вызванным разворотом сдвиговой площадки и упругим отпором боковых пород. Разворот структурных элементов создает в образце расклинивающий эффект, тем самым повышая нормальные напряжения на вновь образовывающихся площадках, что и называется упрочнением — повышение прочности в процессе накопления дефектов (пластического деформирования). И так вплоть до прорастания генерального разлома, нормальное напряжение на котором всегда выше, чем на площадках микродефектов.

Данная модель деформирования пород на стадии упрочнения достаточно убедительно объясняет природу упрочнения и дилатансии, снижения прочности блочных массивов вследствие их трещиноватости [10], а, быть может, взглянуть с несколько иных позиций на механизм горных ударов (рис. 3).

Такой характер деформирования при упрочнении полностью меняет механизм накопления потенциальной энергии деформации за пределом упругости, объясняет возникновение активных горизонтальных напряжений. Разрушение вследствие разворота (изгиба) самих структурных блоков [10] при высоких боковых напряжениях объясняет появление толчков и крупных динамических трещин (землетрясений) в массиве [16].

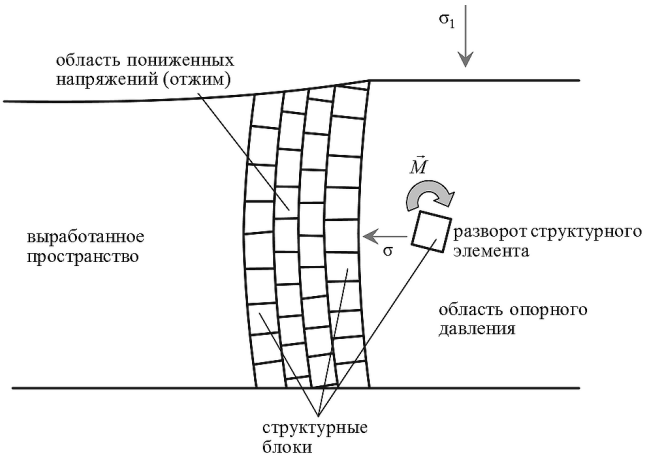
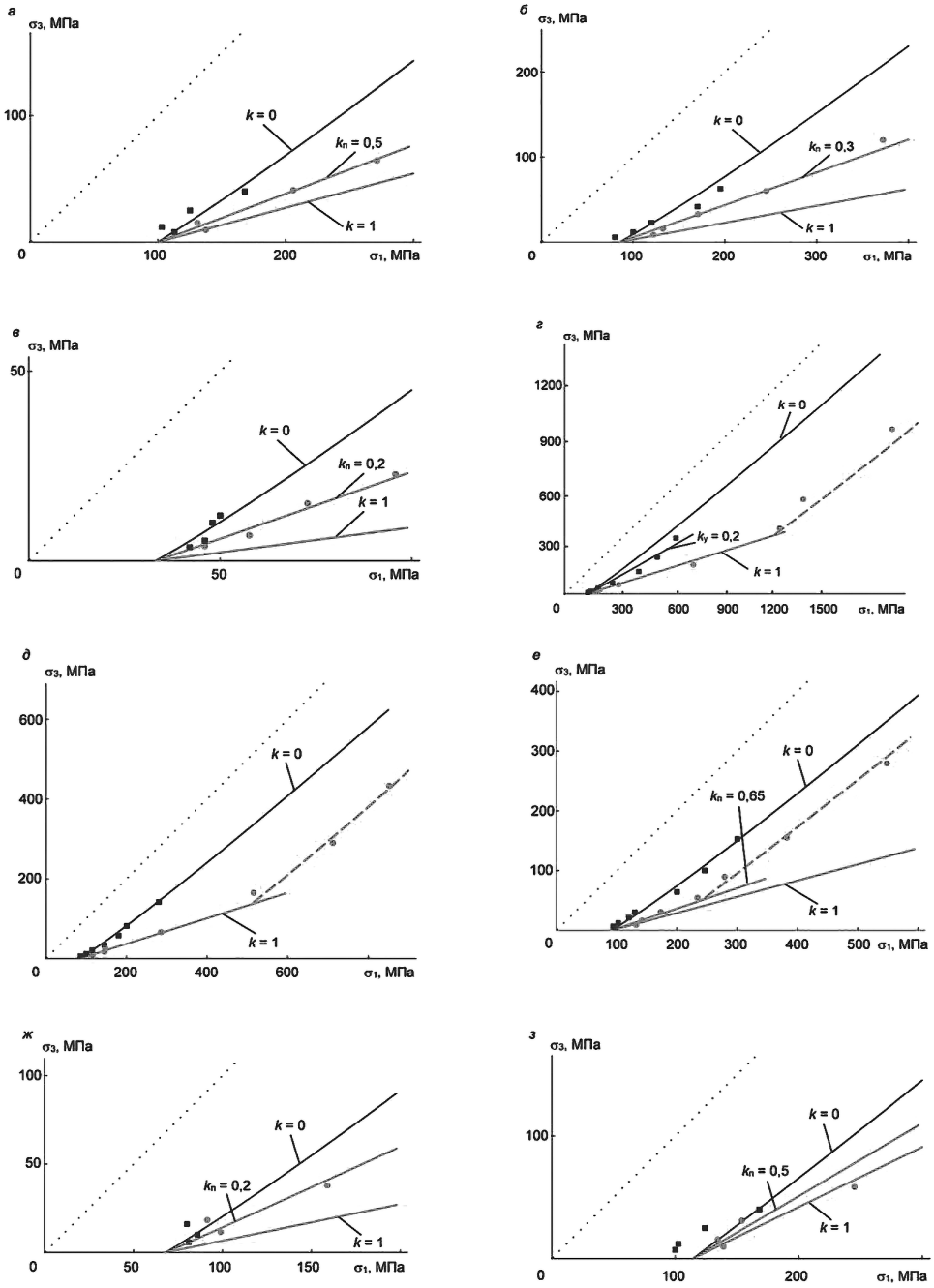
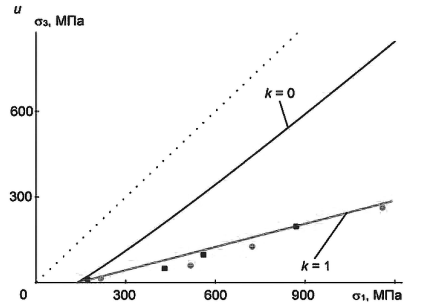


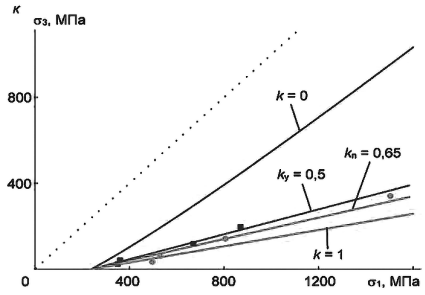
Рис. 3. Схема к объяснению возможного механизма горного удара
Fig. 3. Explanation of the possible mechanism of rock burst

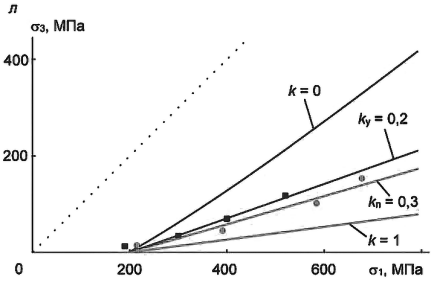
Экспериментальная проверка критерия прочности

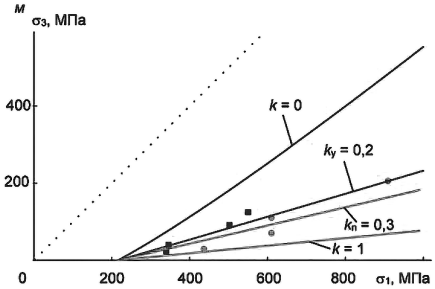
Критерий пластичности и прочности (4, 5, 6), полученный строго аналитически, был проверен экспериментально, результаты верификации представлены на рис. 4 [8]. Как следует из рис. 4, предлагаемый критерий (4) — (6) хорошо

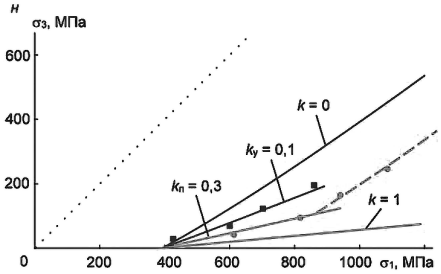


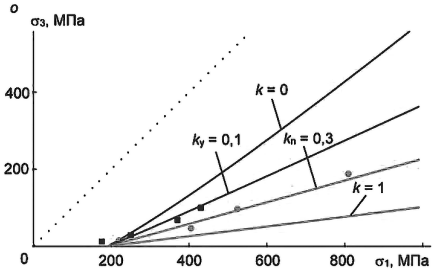

и
σ3, МПа
600
300
0
300
600
900
σ1, МПа
k = 0
k = 1

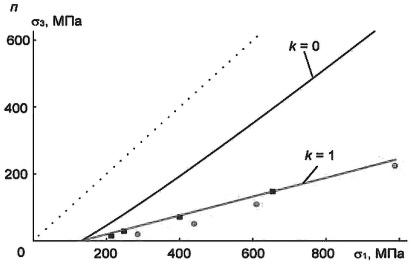

к
σ3, МПа
800
400
0
400
800
1200
σ1, МПа
k = 0
kп = 0,65
ky = 0,5
k = 1

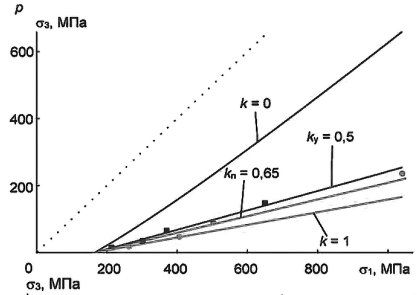

л
σ3, МПа
400
200
0
200
400
600
σ1, МПа
k = 0
ky = 0,2
kп = 0,3
k = 1

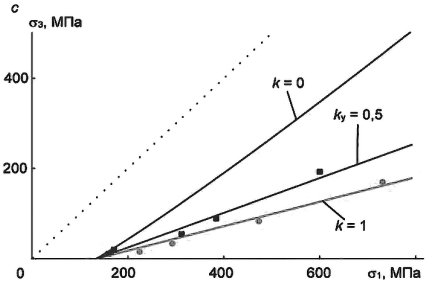

м
σ3, МПа
400
200
0
200
400
600
800
σ1, МПа
k = 0
ky = 0,2
kп = 0,3
k = 1

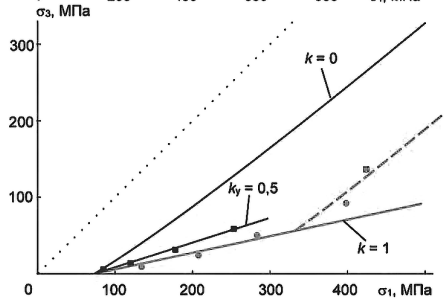

н
σ3, МПа
600
400
200
0
200
400
600
800
1000
σ1, МПа
k = 0
ky = 0,1
kп = 0,3
k = 1

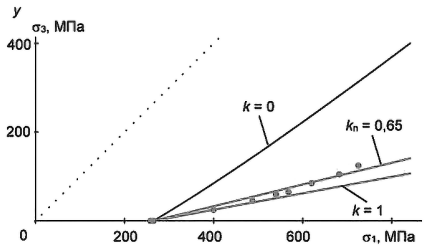

о
σ3, МПа
400
200
0
200
400
600
800
σ1, МПа
k = 0
ky = 0,1
kп = 0,3
k = 1

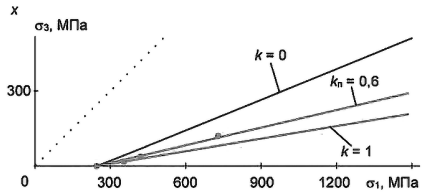

п
σ3, МПа
600
400
200
0
200
400
600
800
σ1, МПа
k = 0
k = 1

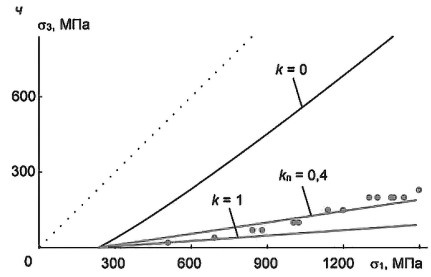

р
σ3, МПа
600
400
200
0
200
400
600
800
σ1, МПа
k = 0
ky = 0,5
kп = 0,65
k = 1

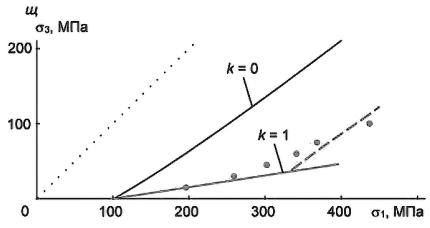

с
σ3, МПа
400
200
0
200
400
600
σ1, МПа
k = 0
ky = 0,5
k = 1

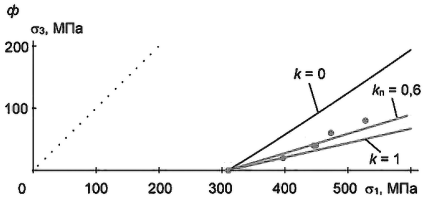

σ3, МПа
300
200
100
0
100
200
300
400
σ1, МПа
k = 0
ky = 0,5
k = 1

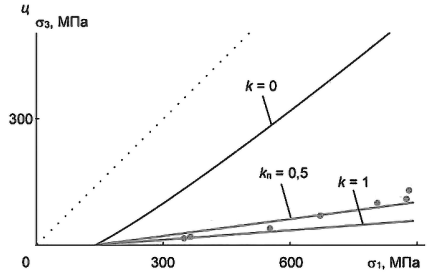












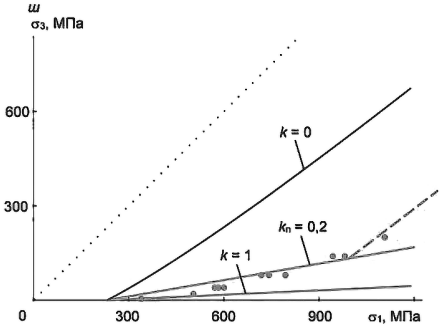


Рис. 4. Теоретические и экспериментальные предельные поверхности и поверхности текучести. Серые квадраты — экспериментальные значения предела упругости; серые круги — экспериментальные значения предела прочности; сплошная черная линия — критерий А. В. Жабко (4) при k = 0; сплошная черная линия — критерий А. В. Жабко (4) при k = 1 или аппроксимирующая экспериментальные данные линия с подбором значений 0 < k < 1: а – бетон; б — известняк (Эстонсланец); в – каменная соль; г — мрамор 1; д — мрамор 2; е — талькохлорит; ж — уголь; з — цемент; и – фойяит; к – кварцевый диорит Д-2; л — диабаз 5,7; м — диабаз; н — диорит 11; о – известняк Д-6; п — песчаник выбросоопасный; р — песчаник, не опасный по выбросам; с – песчаник Д-8; т — песчаник П-04; у – доломит; ф — известняк; х — мрамор; ц — андезит; ч — гранит; ш — монацит; щ — трахит

Fig. 4. Theoretical and experimental limit surfaces and yield surfaces (green squares — experimental values of elasticity limit; red circles — experimental values of limit strength; solid green line — Zhabko's criterion (4) at k = 0; solid red line — Zhabko's criterion (4) at or the experimental data approximation line with selection of values): (a) concrete; (b) limestone; (c) rock salt; (d) marble 1; (e) marble 2; (f) talcochlorite; (g) hard coal; (h) cement; (i) foyaite; (j) quartz diorite D-2; (k) diabase 5.7; (l) diabase; (m) diorite 11; (n) limestone D-6; (o) sandstone 1; (p) sandstone 2; (q) sandstone D-8; (r) sandstone P-04;(s) dolomite; (t) limestone; (u) marble; (w) andesite; (w) granite; (x) monazite; (y) trachitis

согласуется с результатами экспериментальных исследований как в части предела упругости, так и в части предела прочности. Более подробный анализ приведен в работе [8].

Таким образом, согласно теоретическим исследованиям автора и экспериментальным данным, все горные породы по характеру предельных состояний (разрушения) можно классифицировать следующим образом:

1. Идеально-пластические — предел упругости и предел прочности достигаются на нижней границе предельных состояний, то есть при $k_у = k_п = 0$ (рис. 4 *ж*).

2. Идеально-хрупкие — предел упругости и предел прочности достигаются на верхней границе предельных состояний, то есть при $k_у = k_п = 1$ (рис. 4 *и, п*).

3. Идеально-хрупко-пластические — предел упругости достигается на нижней границе предельных состояний $k_у = 0$, а предел прочности достигается на верхней границе предельных состояний, то есть при $k_п = 1$ (рис. 4 *д, е*).

4. Хрупкие — предел упругости практически совпадает с пределом прочности, при этом выполняется неравенство $0 < k_у \approx k_п < 1$ (рис. 4 *к-м, р*).

5. Хрупко-пластические (данных пород большинство) — всевозможные сочетания $k_у$ и $k_п$ при выполнении условия $0 < k_у < k_п < 1$ (рис. 4 *а-г, з, н, о, с, т*).

Необходимо отметить, что при высоком боковом обжатии (σ_3) все горные породы проявляют свойства идеальной пластичности, разумеется, для каждой горной породы предел перехода с одного характера разрушения на другой различен (рис. 4 *г-е, н, т, ш, щ*).

Выражение (7) физически означает, что на пределе упругости и в процессе упрочнения минимальное главное напряжение не в полной мере передается на нормаль к площадке сдвига, что снижает эффект внутреннего трения (подобно поровому давлению). При этом $0 \le k_у \le k_п \le 1$. Таким образом, и предел упругости, и предел прочности — это разрушение породы, но на разных иерархических уровнях и при различных значениях коэффициента упрочнения (дилатансии) k. Увеличение коэффициента k, то есть рост прочности на стадии упрочнения, достигается посредством разворота площадок микросдвигов (структурных элементов), что, в свою очередь, приводит к разуплотнению и росту объема образца — дилатансии.

Значение коэффициента k на пределе упругости $k_у$ для горных пород, по-видимому, зависит только от первичной структуры самой породы. В первом приближении можно выделить однородное (сплошное) строение породы и неоднородное (пористое). Разрушения в образце на пределе упругости начинают появляться там, где порода в силу своей неоднородности (пустотности) имеет меньшее боковое обжатие. При равномерной пустотности в образце может произойти срез всего образца сразу. В этом случае дилатансии в образце не возникает. Минимальные значения k на пределе упругости и прочности равны нулю $k_у = k_п = 0$, что, исходя из первой формулы (7), соответствует условию одноосного сжатия в отдельной точке образца (дилатансия при одноосном сжатии не протекает). Таким образом, исходя из предложенной классификации, такие породы нужно отнести к идеально-пластическим. Идеально-хрупкие горные породы ($k_у = k_п = 1$) подразумевают идеальную сплошность (однородность) и также отсутствие дилатансии. Срез всего образца наступает сразу после появления первых микросдвигов, при этом угол сдвига минимально возможный и составляет

Таблица 1

Сравнение критериев прочности горных пород

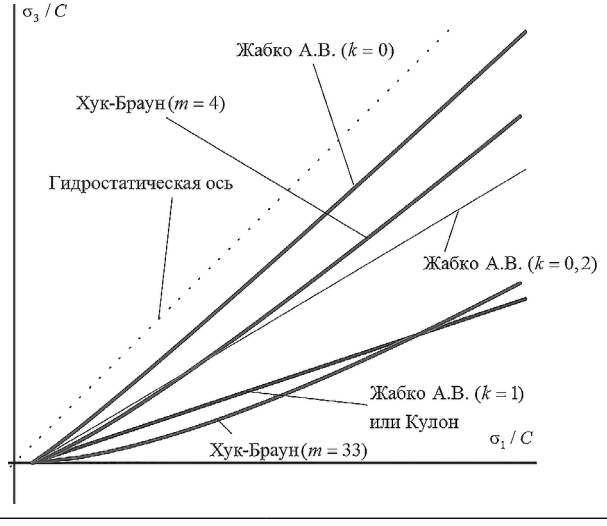
Comparison of rock strength criteria

Информация о критерии	Критерий Кулона	Критерий Хука-Брауна	Критерий А. В. Жабко
Формула	$\tau = \mathrm{tg}\varphi\sigma_n + C$	$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{сж}\left(m\frac{\sigma_3}{\sigma_{сж}} + 1\right)^{0,5}$ $\sigma_1 = \sigma_3 + 2\mathrm{Ctg}\,\omega\sqrt{1 + \frac{m\sigma_3}{2\mathrm{Ctg}\,\omega}}$	$\tau = C(1+\sin\varphi) + \frac{1+k}{1-k}C\sin\varphi\ln\left\lvert\frac{(1-k)\sigma_n + 2kC\cos\varphi}{(1+k)C\cos\varphi}\right\rvert$ $\sigma_1 = \sigma_3 + 2C\sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{tg}\,\varphi\,\sigma_1}{C}\right)\left(1+\frac{\mathrm{tg}\,\varphi k\,\sigma_3}{C}\right)}$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mathrm{ctg}\psi\left(C + \mathrm{tg}\varphi\,\sigma_1\right)$
Год первой публикации критерия в конечном варианте	1773	1980 ...	2017
Способ получения критерия	Эмпирический	Эмпирический	Аналитический (на основе механики сплошной среды, но с учетом дилатантных изменений)
Вид связи предельных параметров	Линейный	Нелинейный	Нелинейный
Компоненты напряжений, связанные критерием	Касательные и нормальные напряжения на площадке сдвига τ, σ_n	Главные напряжения σ_1, σ_3	Касательные и нормальные напряжения на площадке сдвига τ, σ_n. Главные напряжения σ_1, σ_3
Что определяет критерий	Только предел прочности*	Только предел прочности	1. Предел упругости (критерий пластичности)**. 2. Предел прочности. 3. При $k = 0$ определяет минимальные значения предельных напряжений σ_1, при которых возможно образование сдвиговых дефектов или срез всего образца. При $k = 1$ определяет максимально возможные значения предельных напряжений σ_1, при которых образовываются

Продолжение табл. 1

Информация о критерии	Критерий Кулона	Критерий Хука-Брауна	Критерий А. В. Жабко
			дефекты или происходит срез всего образца. Другими словами, критерий определяет интервал максимального главного напряжения σ_1, при котором возникают площадки сдвига при заданном σ_3. 4. Функцию пластического потенциала (связь между приращениями напряжений и деформаций на стадии деформационного упрочнения)***
Общность критерия	–	–	В пределе переходит в критерий Кулона $\lim\limits_{k\to 1}\tau = \left[\frac{0}{0}\right] = C + \mathrm{tg}\varphi\sigma_n$
Идеально связные породы $\varphi = 0$	$\tau = C = const$	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C\sqrt{1 + \frac{m\sigma_3}{2C}}$ Противоречит экспериментальным и теоретическим данным.	$\tau = C = const$ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C = const$ – критерий Треска Сен-Венана, 1868 г.
Идеально сыпучие породы $C = 0$	$\tau = \sigma_n \mathrm{tg}\varphi$ (аналог закона Амонтона)	$\sigma_1 = \sigma_3$ Противоречит экспериментальным и теоретическим данным.	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mathrm{tg}\varphi\sqrt{k\sigma_3\sigma_1} = \mathrm{tg}\varphi\mathrm{ctg}\psi\,\sigma_1$ При $k = 1$, $\tau = \sigma_n \mathrm{tg}\varphi$ (аналог закона Амонтона), $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ и $\sigma_1 = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\sigma_3$
$\varphi = 0; C = 0$ – идеальные жидкости	$\tau = 0$	$\sigma_1 = \sigma_3$	$\tau = 0$ $\sigma_1 = \sigma_3$
Учет структурных (дилатансия) изменений при деформационном упрочнении в критерии прочности	Нет	Да	Да

Продолжение табл. 1

Информация о критерии	Критерий Кулона	Критерий Хука-Брауна	Критерий А. В. Жабко
Угол наклона площадки среза к минимальному главному напряжению	Постоянный $\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$	Не определен	Переменный, в зависимости от уровня напряженного состояния: $\mathrm{tg}\psi = \sqrt{\frac{1 + \frac{\mathrm{tg}\varphi\,\sigma_1}{C}}{1 + \frac{\mathrm{tg}\varphi k\,\sigma_3}{C}}} \geq \mathrm{tg}\omega$. При $k = 1$ $\psi = \omega = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$
Физический смысл параметра	–	Отсутствует $4 \leq m \leq 33$	Определяет степень дилатансии и связности (сплошности) породы $0 \leq k \leq 1$
Графическое сравнение ($\varphi = 30^\circ$)			

Окончание табл. 1

Информация о критерии	Критерий Кулона	Критерий Хука-Брауна	Критерий А. В. Жабко
Примечание: **Серым* цветом в таблице выделены пункты, накладывающие ограничение на применение критериев и определяющие их недостатки. ***Критерий пластичности* (критерий, определяющий предел упругости) для сдвигового характера разрушения предложен впервые. В геомеханической практике в качестве критерия пластичности (начала пластических деформаций или предела упругости) обычно используется критерий прочности (например, Кулона), что справедливо только для идеально хрупких пород. **** Функция* пластического потенциала для сдвигового характера разрушения предложена впервые. В геомеханической практике в качестве функции пластического потенциала обычно используется критерий прочности Кулона (ассоциированный закон пластического течения), что приводит к значительному (в несколько раз) завышению деформационных (дилатансионных или объемных) изменений при расчете напряженно-деформированного состояния. ** *The* plasticity criterion (the criterion determining the elasticity limit) for the shear fracture is proposed for the first time. In geomechanical practice, the strength criterion (for example, the Coulomb strength criterion) is usually used as a plasticity criterion (of initial plastic deformations or elasticity limit), which is true only for ideally brittle rocks. **** *The* function of the plastic potential for the shear fracture is proposed for the first time. In geomechanical practice, the Coulomb strength criterion (associated law of plastic yielding) is usually used as the plastic potential function, which results in a significant overestimation (by several times) of deformation (dilatancy or volumetric) changes in the calculation of the stress-strain state.			

$\psi = \pi / 4 + \varphi / 2$. Идеально-хрупко-пластические породы ($k_у = 0$; $k_п = 1$) характеризуются длительным процессом деформационного упрочнения (дилатансии). Хрупкий характер разрушения горных пород ($0 < k_у \approx k_п < 1$) также подразумевает близость предела упругости и предела прочности, но, в отличие от идеальной хрупкости, не совпадает с верхней границей предельных состояний.

Сравнение критериев прочности

В табл. 1 приведено сравнение рассматриваемых критериев прочности.

Обсуждение результатов

Необходимо отметить несколько принципиальных замечаний по практическому использованию критерия Кулона, а точнее по построению паспорта прочности с использованием кругов Мора.

1. Несмотря на всеобщую практику построения паспорта прочности с использованием кругов Мора, необходимо констатировать неправильность этого подхода. Согласно экспериментальным данным (рис. 4) значения пределов прочности горных пород (серые круги) в своем большинстве не расположены на предельной поверхности ($k = 1$). Это означает, что на пределе прочности $k < 1$, однако круги Мора получены из формул (7) при $k = 1$. То есть использование кругов Мора для построения паспорта завышает область прочности. Их применение оправдано только для идеально хрупких пород, то есть пород, для которых на пределе прочности $k = 1$, каковых подавляющее меньшинство.

2. Подтверждением сказанному выше является весьма существенное несовпадение паспортов прочности, полученных методом косого среза и стабилометрическими испытаниями с использованием кругов Мора. Как

указывалось выше, огибающая кругов Мора в системе координат τ, σ_n расположена выше паспорта прочности, полученного методом косого среза. То есть несовпадение паспортов является результатом не корректного пересчета предельных главных напряжений, полученных при стабилометрических испытаниях, в компоненты τ, σ_n с использованием формул (7) и подставкой в них $k = 1$, что противоречит результатам эксперимента (см. рис. 4).

3. Еще одним некорректным использованием кругов Мора является построение паспорта посредством круга растягивающих напряжений. Угол внутреннего трения, определенный исходя из такого паспорта прочности, будет, как правило, значительно превышать 45°, что не соответствует действительности. Необходимо отметить, что формулы для кругов Мора выведены сугубо для сдвигового разрушения, то есть работают только в области комбинаций напряжений, где происходит срез пород, но не растяжения. По кругам напряжений может быть определен наклон критической площадки сдвига, но не растяжение. Поэтому круг напряжений, построенный по растягивающим напряжениям, не может быть использован для построения паспорта прочности.

По результатам сравнения критериев необходимо сделать следующие замечания.

1. Необходимо отметить поразительное сходство формул предлагаемого критерия (А. В. Жабко) и критерия Хука-Брауна, ведь один получен чисто аналитически, а другой — подобран эмпирически.

2. Интервалы значений переменных, описывающие прочности по предлагаемому критерию $0,2 \le k \le 1$ и критерию Хука-Брауна $4 \le m \le 33$, достаточно хорошо совпадают.

3. Кривая Хука-Брауна при $m = 33$ выходит за предельную (критерий А. В. Жабко при $k = 1$ или критерий Кулона), что невозможно. Однако, очевидно, что это является результатом того, что единая эмпирическая зависимость Хука-Брауна описывает два участка с принципиально различным характером деформирования. И действительно, согласно экспериментальным данным, при небольших значениях бокового обжатия (минимального главного напряжения) критерий прочности имеет один вид, а при превышении определенного значения бокового обжатия паспорт прочности резко преломляется (рис. 4 *г-е, н, т, ш, щ)*. При этом после преломления он становится параллельным кривой идеальной пластичности (зависимость (4) при $k = 0$), это же можно сказать и про кривую Хука-Брауна. Таким образом, данный участок также может быть описан критерием прочности (4) с незначительными математическими преобразованиями.

Увеличение прочности[1] σ_1, τ при повышении минимального главного напряжения σ_3 от опыта к опыту обусловлено увеличением нормального напряжения на площадке сдвига σ_n (увеличение силы трения по площадке) и собственно подпорной составляющей (подпорная стенка). Перегиб паспорта прочности при высоких значениях бокового обжима σ_3 может быть вызван отсутствием прироста нормальных напряжений на площадке сдвига от опыта к опыту с ростом σ_3 (см. зависимости (7)) либо отсутствием самого эффекта (угла) внутреннего трения (как у сталей). То есть сила трения по площадке равна нулю как в случае низкого коэффициента трения, так и в случае

[1] Не путать упрочнение образца или материала в одном испытании с увеличением прочности при различной степени обжатия минимальным главным напряжением от испытания к испытанию.

отсутствия нормальной реакции (в предлагаемом критерии $k \to 0$ либо $\varphi \to 0$). В этой связи идентичность (параллельность) паспортов прочности для рассматриваемых случаев (ветвей паспортов прочности) объясняется отсутствием эффекта трения на площадке сдвига, хотя и в силу разных причин. Кроме того, известно [8], что с ростом σ_3 от опыта к опыту относительные объемные (дилатансионные) деформации сначала возрастают, а при некотором пороговом значении обжатия падают до нуля. В этой связи можно предположить, что именно "запрещенная дилатансия" приводит к исчезновению эффекта трения, вызывающегося минимальным главным напряжением. Впрочем, в работе [16] снижение прочности пород и массивов при высокой степени обжатия объясняется «веерным механизмом» разрушения, при котором развитию магистральной трещины не предшествует беспорядочное накопление микротрещин, а пластинки породы между отрывными трещинами подвержены вращению при сдвиге [16]. Такой механизм разрушения принципиально схож с концепцией разрушения блочных сред [10].

Выводы

Главным достоинством критерия Кулона является его математическая и физическая простота, а главным недостатком — большие погрешности для всего спектра пород (критерий Кулона достоверно описывает предел прочности только для идеально хрупких пород, для которых предел упругости близок или совпадает с пределом прочности).

Главным достоинством критерия Хука-Брауна является его практичность (достаточная точность) и универсальность (применим как для низких значений минимального главного напряжения, так и для высоких), а главным недостатком — полное отсутствие физической интерпретации, то есть критерий никак не объясняет физики процесса разрушения, причиной чего является его эмпирическая природа. Отсутствие физической модели построения критерия и приводит к тому, что в частных случаях (идеально связные или идеально сыпучие породы) критерий противоречит экспериментальным данным и физическим (техническим) представлениям. Кроме того, упомянутая выше универсальность, то есть возможность описания предела прочности для хрупкого и пластического разрушения, может приводить к погрешностям в локальных областях из-за невозможности подобрать единую эмпирическую функцию для хрупкого и пластического характера разрушения.

Главными достоинствами предлагаемого критерия является математическая строгость его получения и учет явления дилатансии при пластическом деформировании и разрушении. Более того, полученные в рамках расчетной модели зависимости позволяют количественно описать процесс пластического деформирования и качественно объяснить явления, сопровождающие эти процессы, то есть дать их физическую интерпретацию. Кроме того, в отличие от своих аналогов, предлагаемый критерий определяет не только предел прочности, но также предел упругости, функцию пластического потенциала и гарантированные границы участка деформационного упрочнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Coulumb C.* Application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de staticue relatifs a l'architecture / C. Coulumb // Memoires de savants entranges de l'Academie des scieces. P.,1773.

2. *Marinos V. A.* Revised geotechnical classification GSI system for tectonically disturbed rock masses, such as flysch. Bulletin of Engineering Geology and the Environment 2017; № 19: pp 1—14.
3. *Bewick R. P.*, *Kaiser P. K.*, *Amann F.* Strength of massive to moderately jointed hard rock masses. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering 2019; №11(3): pp 562—575.
4. Marinos V, *Carter T. G.* Maintaining geological reality in application of GSI for design of engineering structures in rock. Journal of Engineering Geology 2018; № 239: pp 282—297.
5. *Hoek E.*, *Carter T.* & *Diederichs M.* Quantification of the GSI Chart / Geomechanics Symposium held in San Francisco, USA, 2013.
6. *Hoek E.*, *Martin C. D.* / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering № 6 (2014): pp 287—300.
7. *E. Hoek, E. T. Brown* / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering №XXX (2018): pp 1—19.
8. *Жабко А. В.* Теоретические и экспериментальные аспекты пластического деформирования и разрушения горных пород / А. В. Жабко // Известия УГГУ. — 2018. — № 1 (49). — С. 68–79.
9. *Жабко А. В.* Континуальная концепция сдвиговой дезинтеграции твердых тел / А. В. Жабко // Известия УГГУ. — 2019. — № 3 (55). — С. 111–123.
10. *Жабко А. В.* Критерий прочности блочных сред и обратные геомеханические расчеты / А. В. Жабко // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2020. № 6. С. 37—47.
11. *Макаров П. В.* Самоорганизованная критичность деформационных процессов и перспективы прогноза разрушения / П. В. Макаров // Физическая мезомеханика. — 2010. — № 13 (5). — С. 97—112.
12. *Панин В. Е.* Основы физической мезомеханики пластической деформации и разрушения твердых тел как нелинейных иерархически организованных систем / В. Е. Панин, В. Е. Егорушкин // Физическая мезомеханика. — 2015. — № 18 (5). — С. 100—113.
13. *Викулин А. В.* О волновых и реидных свойствах земной коры / А. В. Викулин, Х. Ф. Махмудов, А. Г. Иванчин и др. // Физика твердого тела. — 2016. — Т. 58. — Вып. 3. — С. 547—557.
14. *Гарагаш И. А.* Уединенные тектонические волны в верхней мантии / И. А. Гарагаш // Тектонофизика и актуальные вопросы наук о Земле. Четвертая тектонофизическая конференция ИФЗ РАН. — 2016. — С. 456—460.
15. *Быков В. Г.* Нелинейные волны и солитоны в моделях разломно-блоковых геологических сред / В. Г. Быков // Геология и геофизика. — 2015. — Т. 56. — № 5. — С. 1008—1024.
16. *Тарасов Б. Г.* Веерный механизм как инициатор землетрясений и горных ударов на глубоких горизонтах / Б. Г. Тарасов // Горный журнал. — 2020. — № 3 (2272). — С. 18 — 23. ГИАБ

REFERENCES

1. Coulumb C. Application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de staticue relatifs a l'architecture. Memoires de savants entranges de l'Academie des scieces. P., 1773.
2. Marinos V. A. Revised geotechnical classification GSI system for tectonically disturbed rock masses, such as flysch. Bulletin of Engineering Geology and the Environment 2017; № 19: pp 1—14.
3. Bewick R. P., Kaiser P. K., Amann F. Strength of massive to moderately jointed hard rock masses. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering,* 2019; №11(3): pp 562—575.
4. Marinos V, Carter T. G. Maintaining geological reality in application of GSI for design of engineering structures in rock. *Journal of Engineering Geology,* 2018; 239: 282—297.
5. Hoek E., Carter T. & Diederichs M. Quantification of the GSI Chart. Geomechanics Symposium held in San Francisco, USA, 2013.

6. Hoek E., Martin C. D. / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering № 6 (2014): pp 287 — 300.
7. E. Hoek, E. T. Brown / Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering №XXX (2018): pp 1 — 19.
8. Zhabko A. V. *Teoreticheskiye i eksperimental'nye aspekty plasticheskogo deformirovaniya i razrusheniya gornykh porod* [Theoretical and experimental aspects of plastic deformation and destruction of rocks]. *Izvestia UGGU* [Bulletin of the Ural State Mining University],2018, no. 1 (49), pp. 68–79. [In Russ]
9. Zhabko A. V. *Kontinual'naya kontseptsiya sdvigovoy dezintegratsii tverdykh tel* [Continual concept of shear disintegration of solids]. *Izvestia UGGU* [Bulletin of the Ural State Mining University], 2019, no. 3 (55), pp. 111 — 123. [In Russ]
10. Zhabko A. V. *Kriteriy prochnosti blochnykh sred i obratnye geomekhanicheskiye raschety* [Strengh criterion of block media and reverse geomechanical calculations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyj zhurnal* [Bulletin of higher educational institutions. Mining Journal], 2020, no. 6, pp. 37 — 47. [In Russ]
11. Makarov P. V. *Samoorganizovannaya kritichnost' deformacionnyлh processov i perspektivy prognoza razrusheniya* [Self-organized criticality of deformation processes and prospects of fracture prediction]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2010, no. 13 (5), pp. 97 — 112. [In Russ]
12. Panin V. E., Egorushkin V. *E. Osnovy fizicheskoy mezomekhaniki plasticheskoy deformatsii i razrusheniya tverdykh tel kak nelineynykh ierarkhicheski organizovannykh sistem* [Fundamentals of physical mesomechanics of plastic deformation and fracture of solids as nonlinear hierarchically organized systems]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2015, no. 18 (5), pp. 100 — 113. [In Russ]
13. Vikulin A. V., Makhmudov A. G. Ivanchin et al. *O volnovykh i reidnykh svoystvakh zemnoy kory* [On wave and reid properties of the earth's crust*]. Fizika tverdogo tela* [Solid State Physics],2016, vol. 58, issue. 3, pp. 547 — 557. [In Russ]
14. Garagash I. A. *Uedinyonnyye tektonicheskiye volny v verkhney mantii* [Solitary tectonic waves in the upper mantle]. *Tektonofizika i aktual'nyye voprosy nauk o Zemle. Chetvertaya tektonofizicheskaya konferentsiya IFZ RAN* [Tectonophysics and topical issues of earth sciences. The fourth tectonophysical conference of the IPE RAS], 2016, pp. 456 — 460. [In Russ]
15. Bykov V. G. *Nelinejnye volny i solitony v modelyakh razlomno-blokovykh geologicheskikh sred* [Nonlinear waves and solitons in the models of fault-block geological media]. *Geologiya i geofizika* [Geology and Geophysics], 2015, vol. 56, no. 5, pp. 1008 — 1024. [In Russ]
16. Tarasov B. G. *Veernyi mekhanizm kak initsiator zemletryaseniy i gornykh udarov na glubokikh gorizontakh* [Fan mechanism as an initiator of earthquakes and rock bumps on deep horizons]. *Gornyy zhurnal* [Mining Journal], 2020, no. 3 (2272), pp. 18 — 23. [In Russ]

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Жабко Андрей Викторович — докт. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой марк-шейдерского дела, Уральский государственный горный университет, 620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, д.30, Россия, zhabkoav@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Zhabko A. V., Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Mine Surveying Department, zhabkoav@mail.ru, Ural State Mining University, ul. Kuibysheva 30, Yekaterinburg, 620144 Russia.

Получена редакцией 01.06.2021; получена после рецензии 17.06.2021; принята к печати 10.10.2021.
Received by the editors 01.06.2021; received after the review 17.06.2021; accepted for printing 10.10.2021.