ГИАБ. Горный информационно-аналитический бюллетень /
MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin, 2020;(11-1):213-220
ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ / ORIGINAL PAPER

УДК 622.4 DOI: 10.25018/0236-1493-2020-111-0-213-220

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ Л. ПРАНДТЛЯ

А.Н. Фомин[1], С.Н. Кузнецов[2]

[1] Северо-Кавказский горно-металлургический институт
(государственный технологический университет;
[2] Администрация Главы Республики Северная Осетия – Алания и Правительства
Республики Северная Осетия – Алания

Аннотация: Рассмотрена задача определения динамической скорости в системе уравнений Прандтля для закрытых вентиляционных трубных каналов системы шахтно-рудной вентиляции. Для исследования процессов в зоне взаимодействия жидкости, стекающей вниз по внутренним стенкам вертикальной вентиляционной трубы шахтно-рудного ствола, с восходящим вверх вентиляционным воздушным потоком, что приводит к образованию волнового эффекта и уменьшению сечения вентиляционного канала [1], разработан метод для определения динамической скорости, основанный на средней скорости турбулентного потока и применимый для всего диапазона чисел Рейнольдса. Учтены турбулентное ядро, ламинарный и переходный подслои. Приведено сравнение определения динамической скорости воздушного потока, основанного на установлении касательного напряжения и коэффициента гидравлического сопротивления, и предложенного нового метода определения динамической скорости по средней скорости воздушного потока в уравнениях Прандтля. Представлены графики расчета динамической скорости воздушного потока классическим и новым точным методом.

Ключевые слова: воздушный поток, динамическая скорость воздушного потока, средняя скорость воздушного потока, система уравнений Л. Прандтля, ламинарный подслой, переходный подслой, турбулентное ядро.

Для цитирования: *Фомин А.Н., Кузнецов С.Н.* Определения динамической скорости в системе уравнений Л. Прандтля // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2020. — № 11-1. — С. 213–220. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-111-0-213-220.

Determination of dynamic velocity in the Prandtl equations

A.N. Fomin[1], S.N. Kuznetsov[2]

[1] North Caucasus mining and metallurgical Institute (state technological University, Russia;
[2] Administration of the Head of the Republic of North Ossetia-Alania and the Government
of the Republic of North Ossetia-Alania, Russia

Abstract: The purpose of this paper is to describe the developed method for determining the dynamic velocity (friction velocity) in the equations of L. Prandtl for the entire range of adequacy of the semi-empirical theory of turbulent flow. A widely used classical approach to determining the dynamic speed of air flow in a closed loop, based on the coefficient of hydraulic resistance and tangent stress, is considered. This article describes a precise method of determining dynamic velocity equation of Prandtl, based on the average air flow speed in the

© А.Н. Фомин, С.Н. Кузнецов. 2020.

pipe, and taking into account the characteristics of laminar, transitional and turbulent layers of the vent stream. A graphical comparison of the calculation of the dynamic air flow velocity in a smooth pipe is made without taking into account and taking into account the influence of the near-wall laminar layer and the transition sub layer. The presented graphs clearly demonstrate that for a purely turbulent flow, as the Reynolds number increases, the calculated data of the classical method approaches the calculated parameters of the proposed method, which is explained by a decrease in the influence of the laminar layer and the transition sublayer on the resulting air flow velocity. The proposed method for calculating the dynamic air flow velocity is accurate, since it takes into account the influence of wall sub layers, so it can be used to solve problems where it is necessary to understand and account for the physical properties and influence of the laminar and transition layers of the General flow of both gas and liquid flows. For example, this method is applicable when considering the countercurrent interaction of the liquid flowing down the inner wall of the pipe and the upward air flow.

Key words: air flow, dynamic air flow velocity, average air flow velocity, L. Prandtl's system of equations, laminar sub layer, transition sub layer, turbulent core.

For citation: Fomin A.N., Kuznetsov S.N. Determination of dynamic velocity in the Prandtl equations. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* 2020;(11-1):213-220. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-111-0-213-220.

Введение

Целью статьи является разработка метода определения динамической скорости (скорости трения) в уравнениях Л. Прандтля для всего диапазона адекватности полуэмпирической теории турбулентного течения.

В инженерной практике широко применяется полуэмпирическая теория турбулентности, созданная [2] Джеффри Тэйлором (1915 год, 1932 год), Людвигом Прандтлем (1925 год) и Теодором фон Карманом (1930 год).

Для описания турбулентного течения в трубах и каналах используют уравнения Прандтля. Как правило, рассчитывают касательное напряжение возле стенки трубы и среднюю скорость потока только для турбулентного ядра, пренебрегая ламинарным и переходным подслоями.

Можно предложить и другой подход, основанный на использовании средней скорости потока. Он состоит в определении динамической скорости (скорости трения) и учитывает как турбулентное ядро, так и ламинарный и переходной подслой.

Прежде чем описывать разработанный метод определения динамической скорости в уравнении Прандтля, необходимо рассмотреть широко применяемые, классические подходы, основанные на коэффициенте гидравлического сопротивления и касательном напряжении.

Теория вопроса

В полуэмпирической теории Прандтля воздушный поток разделяется на три области [3—9]:

ламинарный пограничный слой у стенок (ламинарный подслой), где движение ламинарное и формируется за счет действия сил вязкости; переходный слой от ламинарного к турбулентному течению; турбулентное ядро, в котором влияние сил вязкости весьма мало.

Относительную скорость потока описывает следующая система уравнений [3, 4]:

$$\begin{cases} v^*_{пz} = y^*; 0 < y^* \le 5 \\ v^*_{пz} = 5,0\ln\left(y^*\right) - 3,05; 5 < y^* \le 30 \\ v^*_{пz} = 2,5\ln\left(y^*\right) + 5,5; y^* > 30 \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение представленной системы (1) — это уравнение ламинарного подслоя, второе уравнение — уравнение переходного слоя и третье — уравнение турбулентного ядра.

Для приведенной системы уравнений относительная скорость воздушного потока [10] в трубе

$$v^*_{пz} = \frac{v_{пz}}{\sqrt{\tau_{ст}/\rho_в}},$$

где $v_{пz}$ — скорость течения воздуха вдоль трубы.

Приведенное расстояние от стенки трубы [3]

$$y^* = \frac{(R-y)\sqrt{\tau_{ст}/\rho_в}}{\nu},$$

где ν — кинематическая вязкость, R — радиус трубы.

В выражении относительной скорости потока [4] неизвестной величиной является касательное напряжение возле стенки трубы $\tau_{ст}$, которое определяется исходя из следующего соотношения:

$$\tau_{ст} = \zeta \frac{\rho_в v_{ср\,пz}^2}{8}.$$

Для вычисления касательного напряжения необходимо установить гидравлическое сопротивление [4, 12], приближенное значение коэффициента гидравлического которого для гладкой трубы можно определить следующим образом [4, 11, 13, 14]:

$$\zeta = 0,0056 + \frac{0,5}{\mathrm{Re}^{0,32}}.$$

Метод применим для чисел Рейнольдса, лежащих в интервале $3 \cdot 10^3 < \mathrm{Re} < 3 \cdot 10^6$.

Есть и другие известные уравнения для определения коэффициента гидравлического сопротивления при различных числах Рейнольдса [4]. Например,

$$\zeta = \frac{3,16}{\mathrm{Re}^{0,}}.$$

Метод дает хорошую точность для чисел Рейнольдса, лежащих в интервале $5 \cdot 10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$.

Все ранее разработанные методы учитывают только турбулентное ядро, не принимая во внимание ламинарный и турбулентный подслои.

Можно предложить и иной поход для определения неизвестного коэффициента (динамической скорости) в уравнениях Прандтля, который основан на значении средней скорости потока в трубе с учетом влияния турбулентного ядра, ламинарного и переходного подслоев. Этот подход можно использовать для расчетов депрессии шахтной вентиляции [15, 16] и решения задач, связанных с поведением мелких частиц пыли и влаги в вентиляционном потоке [17].

Материалы и методы анализа

Метод определения динамической скорости в уравнениях Прандтля, учитывающий как турбулентное ядро, так и ламинарный и переходный подслой

Для определения неизвестной динамической скорости в уравнениях Прандтля для скорости потока в трубе запишем систему уравнений (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{пz}}{v_*} = \dfrac{v_*}{\nu}(R-y); 0 < \dfrac{v_*}{\nu}(R-y) \le 5 \\ \dfrac{v_{пz}}{v_*} = 5{,}0\ln\left(\dfrac{v_*}{\nu}(R-y)\right) - 3{,}05; 5 < \dfrac{v_*}{\nu}(R-y) \le 30, \\ \dfrac{v_{пz}}{v_*} = 2{,}5\ln\left(\dfrac{v_*}{\nu}(R-y)\right) + 5{,}5; \dfrac{v_*}{\nu}(R-y) > 30 \end{cases}$$

где v_* — динамическая скорость, величина постоянная, которую и следует определить.

После некоторых преобразований получим:

$$v_{пz} = \begin{cases} \dfrac{v_*^2}{\nu}(R-y); 0 < \dfrac{v_*}{\nu}(R-y) \le 5 \\ 5{,}0v_*\ln\left(\dfrac{v_*}{\nu}(R-y)\right) - 3{,}05v_*; 5 < \dfrac{v_*}{\nu}(R-y) \le 30 \\ 2{,}5v_*\ln\left(\dfrac{v_*}{\nu}(R-y)\right) + 5{,}5v_*; \dfrac{v_*}{\nu}(R-y) > 30 \end{cases} \qquad (2)$$

Представим расход воздуха в вентиляционном трубопроводе шахтно-рудной вентиляционной системы как интеграл по площади от скорости потока в трубе

$$Q = \int_S v_{пz} dS.$$

Но расход воздуха равен средней скорости воздушного потока, умноженной на площадь сечение трубопровода

$$Q = v_{пz\,ср} S = v_{пz\,ср} \pi R^2 .$$

Приравнивая первое и второе выражение и представляя интеграл по площади в виде двойного интеграла, получим выражение для средней скорости потока:

$$v_{пz\,ср} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi R}\int_0 v_{пz}(r)\,r dr d\varphi = \frac{2}{R^2}\int_0^R v_{пz}(r)\,r dr .$$

Подставляя в полученное соотношение $r = R - y_*$ и $y_* = R - r$, окончательно получим уравнение для средней скорости потока в виде интеграла

$$v_{пz\,ср} = \frac{2}{R^2}\int_0^R v_{пz}(R-y_*)\cdot(R-y_*)\,dy_*$$

Таким образом, подставив в полученный интеграл соотношение (2), среднюю скорость можно записать как сумму трех интегралов:

$$v_{пz\,ср} = \left(\frac{2}{R^2}\int_0^{5\frac{\nu}{v_*}} \frac{v_*^2}{\nu} y_* \cdot (R-y_*)\,dy_* + \int_{5\frac{\nu}{v_*}}^{30\frac{\nu}{v_*}} \left(5{,}0v_*\ln\left(\frac{v_*}{\nu}y_*\right) - 3{,}05v_*\right)\cdot(R-y_*)\,dy_* + \right.$$

$$\left. + \int_{30\frac{\nu}{v_*}}^{R} \left(2{,}5v_*\ln\left(\frac{v_*}{\nu}y_*\right) + 5{,}5v_*\right)\cdot(R-y_*)\,dy_* \right).$$

Все три интеграла вычисляются аналитически.

Таким образом, после взятия интегралов для определения значения динамической скорости в уравнениях Прандтля, получено следующие нелинейное уравнение

$$v_{п\,z\,ср} = 1146{,}40\frac{\nu^2}{R^2 v_*} - 127{,}79\frac{\nu}{R} + 2{,}5v_*\ln\left(\frac{v_*}{\nu}R\right) + 1{,}75v_* \qquad (3)$$

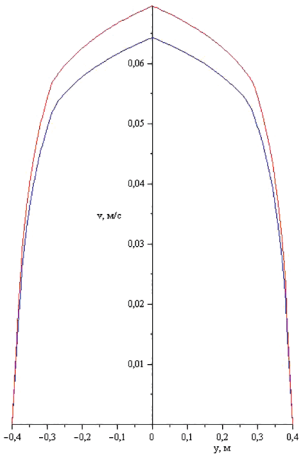
Уравнение (3) не решается аналитически. Решение возможно получить только численными методами, причем точность определения динамической скорости в уравнениях Прандтля определяется лишь точностью численного метода.

Это означает, что из нелинейного уравнения находится неизвестная динамическая скорость v_* по известной средней скорости потока $v_{п\,z\,ср}$, для всего диапазона адекватности полуэмперической модели турбулентного течения Прандтля для гладких трубопроводов.

Для численного решения нелинейного уравнения как метода, основанного на значении расстояния для точки средней скорости потока, так и точного метода, использовался программный пакет Maple 12, в котором представлены широкие возможности для численного решения нелинейных уравнений.

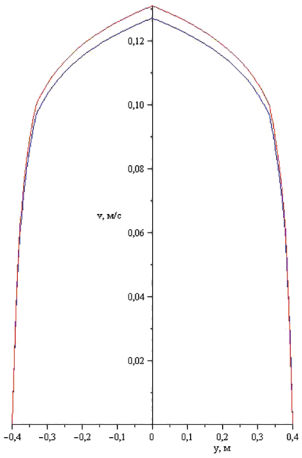
Для решения полученных нелинейных уравнений использовался метод Ньютона. Точность вычисления корней для нелинейных уравнений меньше 10^{-10}.

На графиках (рис. 1—3): синяя линия — метод, основанный на вычислении гидравлического сопротивления, красная линия — разработанный точный метод, учитывающий как турбулентное ядро, так и ламинарный и переходный подслои.



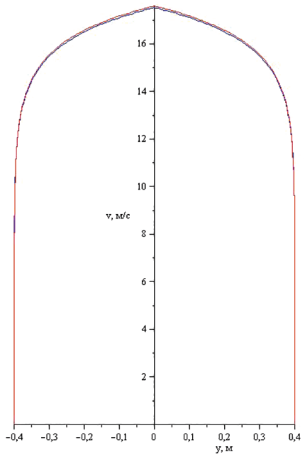
R = 0,4 м; $v_{п\,z\,ср}$ = 0,05 м/с; Re = 2651,93

Рис. 1
Fig. 1



R = 0,4 м; $v_{п\,z\,ср}$ = 0,1 м/с; Re = 5303,87

Рис. 2
Fig. 2



R = 0,4 м; $v_{п\,z\,ср}$ = 15,3 м/с; Re = $7{,}956 \cdot 10^5$

Рис. 3
Fig. 3

Из представленных графиков (рис. 1—3) следует, что при значениях чисел Рейнольдса Re, характерных для переходного течения от ламинарного к турбулентному (рис. 1), точность у классического метода низкая.

Но при чисто турбулентном течении по мере увеличения числа Рейнольдса Re (рис. 2, 3) точность классического метода приближается по точности к предложен-

ному методу, что объясняется уменьшением влияния ламинарного и переходных подслоев на скорость воздушного потока.

Заключение

Для гладкой трубы разработан новый метод для определения динамической скорости в уравнениях Прандтля, основанный на значении средней скорости течения воздуха в трубе и учитывающий характеристики ламинарного, переходного и турбулентного слоев вентиляционного потока.

Ошибка разработанного метода нахождения динамической скорости определяется только ошибкой используемого численного метода решения нелинейных уравнений и может стремиться к нулю при бесконечно большом числе итераций численного метода.

К недостатку разработанного метода следует отнести необходимость численного решения нелинейного уравнения.

Данная модель позволяет более точно рассчитывать скоростные режимы в трубных элементах разного диаметра, что подтверждается проведенными лабораторными исследованиями скоростей воздушного потока в гладких трубах разного сечения и диаметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фомин А.Н.*, *Выскребенец А.С.*, *Свердлик Г.И.* Проблемы, возникающие при образовании капель в вертикальных вентиляционных трубопроводах, расположенных в стволах глубоких шахт, и способ их решения. // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). — 2017. — № 12. — СВ 30. — С. 19 — 26.
2. *Монин А.С.*, *Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. / Механика турбулентности. — М.: Наука, 1992. — Т.1. — 695 с.
3. *Беннетт К.*О, Майерс Дж. Е. Гидродинамика, теплообмен и массообмен. — М.: Недра, 1966. — 726 с.
4. *Маньковский О.Н.*, *Толчинский А.Р.*, *Александров М.В.* Теплообменная аппаратура химических производств. — Ленинград: Химия, 1976. — 368 с.
5. *Емцев Б.Т.* Техническая гидромеханика. 2-е изд. — М.: Машиностроение, 1987. — 440 с.
6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. 4-е изд. — М.: Наука, 1973. — 847 с.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
8. *Кутателадзе С.С.*, *Леонтьев А.И.*, Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. — М.: Энергоиздат, 1972. — 320 с.
9. *Чорин А.Ж.* Теория турбулентности / Странные аттракторы (Сборник статей). — М.: МИР, 1981. — С. 30 — 36.
10. V. Popov, J.A.T. Gray. Prandtl-Tomlinson Model: A Simple Model Which Made History. From book E. Stein «The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics — Mathematics Meets Mechanics and Engineering». — 2014. — pp.153 — 168.
11. *Альтшуль А.Д.*, *Киселев П.Г.* Гидравлика и аэродинамика / Основы механики жидкости. — М.: Стройиздат, 1964. — 273 с.
12. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады Академии Наук СССР. 1941. — 30. — № 4. — С. 299–303.
13. *Колмогоров А.Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // Доклады Академии Наук СССР. 1942. — 32. — № 1. — С. 19–21.
14. *Колмогоров А.Н.* Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости // УМН, 2004. — Т.59, выпуск 1(355). — С. 5–10. DOI: https://doi.org/10.4213/rm697

15. *Клюев Р.В., Босиков И.И., Майер А.В., Гаврина О.А.* Комплексный анализ применения эффективных технологий для повышения устойчивого развития природно-технической системы // Устойчивое развитие горных территорий. 2020. – №2. – С. 283–290.

16. *Клюев Р.В., Босиков И.И., Егорова Е.В., Гаврина О.А.* Оценка горно-геологических и горнотехнических условий карьера «Северный» с помощью математических моделей // Устойчивое развитие горных территорий. 2020. – №3. – С. 418–427.

17. *Фомин А.Н., Кузнецов С.Н.* Математическое моделирование движения капель воды в вертикальном вентиляционном стволе шахты // Устойчивое развитие горных территорий. — 2019. – Т. 11. –№ 4. – С. 528–534. ГИАБ

REFERENCES

1. Fomin A. N., Sverdlik, G. I., Vyscrebenets A. S. *Problemy, voznikayushchie pri obrazovanii kapel' v vertikal'nyh ventilyacionnyh truboprovodah, raspolozhennyh v stvolah glubokih shaht, i sposob ih resheniya* [Capture of liquid and solid particles in the air stream in the ventilation of mines]. *MIAB. Mining Inf. Anal. Bull.* Moscow, 2013, no 2, pp. 279-281. [In Russ]

2. Monin A.S., Yaglom, A. M., *Statisticheskaya gidromekhanika. Mekhanika turbulentnosti* [Statistical hydromechanics: theory of turbulence], Moscow, Science, 1992, 695 p. [In Russ]

3. Bennett K. Oh, Myers J. E. *Gidrodinamika, teploobmen i massoobmen* [Hydrodynamics, heat transfer and mass transfer], Moscow, Nedra, 1966, 726 p. [In Russ]

4. Mankovsky O.N., Tolchinsky, A.R., Alexandrov M.V. *Teploobmennaya apparatura himicheskih proizvodstv* [Heat-exchange equipment for chemical production], Leningrad, Chemistry, 1976, 368 p. [In Russ]

5. Emtsev B.T., *Tekhnicheskaya gidromekhanika* [Technical hydromechanics], Moscow, Mashinostroenie, 1987, 440 p. [In Russ]

6. Loitsyansky L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Mechanics], Moscow, Nauka, 1973, 847 p. [In Russ]

7. Schlichting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Theory of boundary layer], Moscow, Nauka, 1974, 712 p. [In Russ]

8. Kutateladze S.S., Leontiev A.I., *Teplomassoobmen i trenie v turbulentnom pogranichnom sloe* [Heat and mass Transfer and friction in turbulent boundary layer], Moscow, Energoizdat, 1972, 320 p. [In Russ]

9. Chorin A.Zh. *Teoriya turbulentnosti. Strannye attraktory (Sbornik statej)* [Theory of turbulence. Strange attractors (Collection of articles)], Moscow, MIR, 1981, pp. 30—36. [In Russ]

10. Popov V., Gray J.A.T. Prandtl-Tomlinson Model: A Simple Model Which Made History. From book E. Stein «The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics — Mathematics Meets Mechanics and Engineering», (2014), pp.153-168.

11. Altshul D.A., Kiselev P.G., *Gidravlika i aerodinamika. Osnovy mekhaniki zhidkosti* [Hydraulics and aerodynamics (Fundamentals of fluid mechanics)], Moscow, Stroizdat, 1964, 273 p. [In Russ]

12. Kolmogorov, A.N. *Lokal'naya struktura turbulentnosti v neszhimaemoj zhidkosti pri ochen' bol'shih chislah Rejnol'dsa* [Local structure of turbulence in incompressible fluid at very large Reynolds numbers], Doklady Akademii Nauk SSSR, 1941, 30, no. 4, pp. 299—303. [In Russ]

13. Kolmogorov, A.N. *Rasseyanie energii pri lokal'no izotropnoj turbulentnosti* [Dissipation of energy in locally isotropic turbulence], Doklady Akademii Nauk SSSR, 1942, 32, no. 1, pp. 19—21. [In Russ]

14. Kolmogorov A.N. *Matematicheskie modeli turbulentnogo dvizheniya neszhimaemoj vyazkoj zhidkosti* [Mathematical models of turbulent motion of incompressible viscous fluid], UMN, 2004, Vol. 59, issue 1(355), pp. 5-10. DOI: https://doi.org/10.4213/rm697 [In Russ]

15. Klyuev R.V., Bosikov I.I., Mayer A.V., Gavrina O.A. Comprehensive analysis of the effective technologies application to increase sustainable development of the natural-technical system. *Sustainable Development of Mountain Territories*. 2020, no. 2, pp. 283–290. [In Russ]

16. Klyuev R.V., Bosikov I.I., Egorova E.V., Gavrina O.A. Assessment of mining-geological and mining technical conditions of the Severny pit with the use of mathematical models. *Sustainable Development of Mountain Territories*. 2020, no. 3, pp. 418–427. [In Russ]

17. Fomin A.N., Kuznetsov S.N. *Matematicheskoe modelirovanie dvizheniya kapel' vody v vertikal'nom ventilyacionnom stvole shahty* [Mathematical simulation of water drop motion in vertical shaft ventilation], Sustainable Development of Mountain Territories. 2019, no. 4, pp. 528–534. [In Russ]

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Фомин Андрей Николаевич — младший научный сотрудник, старший преподаватель кафедры «Технологические машины и оборудование» e-mail: an_fomin@mail.ru, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет)», 362021, Российская Федерация, Республика Северная Осетия — Алания, г. Владикавказ, ул. Николаева, 44;

Кузнецов Сергей Николаевич — канд. техн. наук, e-mail: skuz2006@yandex.ru, Администрация Главы Республики Северная Осетия — Алания и Правительства Республики Северная Осетия — Алания, 362000, Российская Федерация, Республика Северная Осетия — Алания, Владикавказ, пл. Победы, 1.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Fomin A.N., research associate, senior lecturer of the Department «Technological machines and equipment», e-mail: an_fomin@mail.ru, Federal state budgetary educational institution of higher education «North Caucasus mining and metallurgical Institute (state technological University)», 362021, Vladikavkaz, Russia;

Kuznetsov S.N., Cand. Sci. (Eng.), Administration of the Head of the Republic of North Ossetia-Alania and the Government of the Republic of North Ossetia-Alania, 362000, Vladikavkaz, Russia.

Получена редакцией 26.05.2020; получена после рецензии 02.08.2020; принята к печати 10.10.2020.
Received by the editors 26.05.2020; received after the review 02.08.2020; accepted for printing 10.10.2020.