

Б.Т. Сазамбаева, Ш.Д. Ахметова, Г.И. Куанышев, Ю.Н. Самогин

## РАСЧЕТ ТРУБЧАТОГО ЛЕНТОЧНОГО КОНВЕЙЕРА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрен подход, основанный на методе конечных элементов, позволяющий проводить оценку основных параметров кручения ленты трубчатых ленточных конвейеров и оценить их влияние на различные конструктивные и эксплуатационные характеристики. Предложена конечно-элементная модель для исследования свободных крутильных колебаний трубчатого ленточного конвейера. Рассмотрен линейный участок ленточного трубчатого конвейера, с учетом жесткости сечения при кручении, массового момента инерции, плотности материала ленты трубчатого конвейера, груза, полярного момента инерции. Для описания движения конвейера использован принцип Гамильтона–Остроградского, включающий кинетическую энергию колебаний участка грузовой ветви ленты между роликкоопорами и потенциальную энергию упругой деформации ленты. Вычислена вариация квадратичного функционала варьированием угла поворота трубчатой ленты, где углы поворота — вариации по Гамильтону: малые; совместимые со связями, изохронные. Показана эквивалентность вариационного принципа Гамильтона–Остроградского и краевой задачи. Рассмотрен участок ленточного трубчатого конвейера в виде двух конечных элементов, содержащих три узла. Составлены матрицы инерции и жесткости отдельных конечных элементов ленты. Удовлетворяя граничным условиям, получены характеристическое уравнение для определения собственных частот крутильных колебаний ленты. Представлены графики зависимостей безразмерной низшей собственной частоты от скорости ленты при различных значениях расстояния между роликкоопорами.

Ключевые слова: конечный элемент, собственная частота, трубчатый ленточный конвейер, скорость ленты, роликковые опоры, крутильные колебания, опора, формы колебаний.

---

DOI: 10.25018/0236-1493-2017-7-0-93-102

### Введение

Широкое применение ленточных конвейеров в машиностроении особо выделило проблему надежности по отношению к вибрации. Вибрационные поломки, как правило, сопровождаются дорогостоящими ремонтами, значительными внеплановыми простоями и приводят к нарушению работоспособности и снижению надежности конвейеров. Используемый в работе подход позволяет сравнительно просто, без использования дорогостоящих пакетов программ проводить анализ вибрации ленточных трубчатых конвейер и оценить влияние на них различных конструктивных и эксплуатационных факторов. Знание подобных закономерностей позволяет в кратчайшие сроки проектировать и производить конвейеры с низким уровнем вибрации и высокой эксплуатационной надежностью.

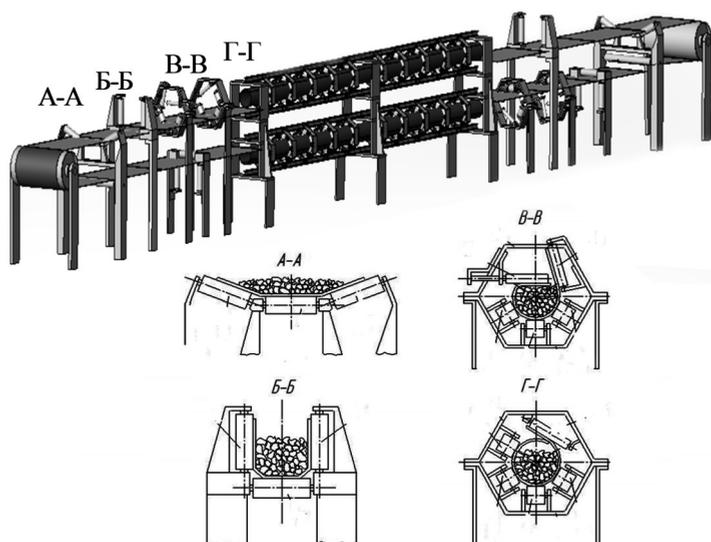


Рис. 1. Конструкция ленточного трубчатого конвейера

### Конечно-элементная модель вращательного движения ленты трубчатого конвейера

Рассмотрим ленточный трубчатый конвейер (рис. 1) [2, 3, 4, 8].

Покажем эквивалентность вариационного принципа Гамильтона–Остроградского и краевой задачи [1]. Рассмотрим линейный участок ленточного трубчатого конвейера длиной  $a$ , жесткость сечения при кручении  $Gl_k$ , погонный массовый момент инерции  $\rho l_0$ , где  $\rho$  — плотность материала ленты трубчатого конвейера;  $l_0$  — полярный момент инерции сечения трубы конвейера с учетом транспортируемого груза. Лента конвейера движется со скоростью (рис. 2).

Напомним формулировку принципа Гамильтона–Остроградского. Среди всех движений, совместимых со связями, достаточно близких к истинному и совпадающих с истинным в начальный  $t_0$  и конечный  $t_1$  моменты времени, истинное движение сообщает интегралу действия

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

стационарное значение, т.е.  $\delta I = 0$ . В интеграле действия  $T$  — кинетическая энергия при крутильных колебаниях стержня;  $U$  — потенциальная энергия упругой деформации.

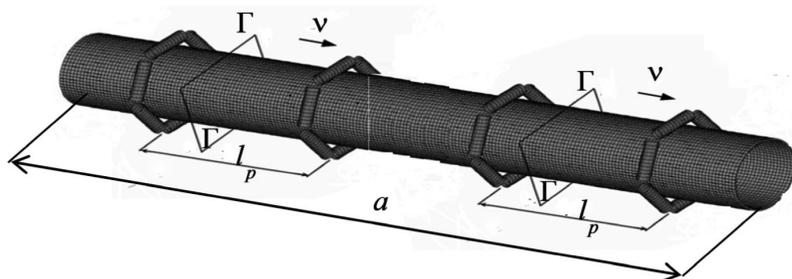


Рис. 2. Линейный участок ленточного трубчатого конвейера

Запишем выражение для интеграла действия в виде [1, 3]

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a L dz dt; \quad L = \frac{1}{2} \rho l_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} v \right)^2 - \frac{1}{2} G l_k \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2, \quad (1)$$

где через  $L$  обозначена линейная плотность лагранжиана.

Вычислим вариацию квадратичного функционала (1), варьируя угол поворота  $\tilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi$ . Здесь  $\delta\varphi$  — вариации по Гамильтону: малые; совместимые со связями, изохронные (возможна перестановка операций дифференцирования и варьирования); в начале и в конце движения  $\delta\varphi$  равны нулю

$$\delta\varphi(0, t) = 0, \quad \delta\varphi(z, t_0) = 0, \quad \delta\varphi(z, t_1) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \delta\varphi.$$

Согласно правилам вычисления вариации функционала имеем

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \frac{\partial}{\partial z} \delta\varphi + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \frac{\partial}{\partial t} \delta\varphi \right] dz dt.$$

Преобразуем второй член этого выражения, используя правило вычисления производной от произведения и проводя интегрирование с учетом граничного условия при  $z = 0$ ,  $\varphi(0, t) = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \frac{\partial}{\partial z} (\delta\varphi) dz &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \delta\varphi \right) dz - \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \right) \delta\varphi dz = \\ &= \left. \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \right|_{z=a} \cdot \delta\varphi(a, t) - \int_0^a \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \right) \delta\varphi dz \end{aligned}$$

Для третьего члена применим правило интегрирования по частям по времени

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\varphi) dt = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \delta\varphi \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right) \delta\varphi dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right) \delta\varphi dt$$

поскольку  $\delta\varphi(z, t_0) = \delta\varphi(z, t_1) = 0$ .

После проведенных преобразований выражение для вариации функционала  $\delta I$  примет вид

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \left[ \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right] \delta\varphi dz dt + \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \right|_{z=a} \delta\varphi(a, t) dt$$

Из необходимого условия стационарности функционала  $\delta I = 0$  в силу произвольности вариаций  $\delta\varphi$  на основании основной леммы вариационного исчисления имеем уравнение Эйлера—Остроградского

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} = 0 \quad \text{при } 0 < z < a$$

$$\text{И естественное (силовое) граничное условие при } z = a: \left. \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)} \right|_{z=a} = 0$$

Учитывая выражения для линейной плотности лагранжиана  $L$ , получим уравнения свободных крутильных колебаний трубчатого ленточного конвейера

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - (v_0^2 - v^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad v_0 = \sqrt{\frac{Gl_k}{\rho l_0}} \quad (2)$$

и граничное условие при  $z = a$

$$Gl_k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Кроме того, краевая задача (2), (3) должна быть дополнена начальными условиями.

Таким образом, для определения функции  $\varphi(z, t)$  вместо рассмотрения краевой задачи (2), (3) можно воспользоваться условием стационарности интеграла действия (1). Существенное различие дифференциальной и интегральной формулировок заключается в том, что функционал  $I[u(z, t)]$  содержит производные от функции до 1-го порядка вместо производных до 2-го порядка в краевой задаче.

Пусть линейная часть трубчатого ленточного конвейера (рис. 2) разбита на  $p$  конечных элементов. В силу [1, 3] поле перемещений в каждом конечном элементе  $\varphi_k(z, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$  определяется вектором смещений узловых точек  $\mathbf{f}_k$

$$\varphi_k(z, t) = \mathbf{H}_k^T(z) \mathbf{f}_k(t). \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{H}_k(z)$  — вектор интерполирующих функций [1, 3].

Суммируя кинетическую и потенциальную энергию по всему ансамблю конечных элементов вместо выражения (1) приходим к следующему выражению для интеграла действия [1]:

$$\begin{aligned} I[\varphi(z, t)] &= \sum_{k=1}^p I_k[\varphi_k(z, t)] = \sum_{k=1}^p I_k[\mathbf{H}_k^T(z) \mathbf{f}_k(t)] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \frac{d\mathbf{f}_k^T}{dt} \left\{ \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{H}_k^T(z) (\rho l_0)_k \mathbf{H}_k(z) \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} dz \right\} \frac{d\mathbf{f}_k^T}{dt} dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} v^2 \sum_{k=1}^p \mathbf{f}_k^T \left\{ \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{B}_k^{*T}(z) (\rho l_0)_k \mathbf{B}_k^*(z) dz \right\} \mathbf{f}_k dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^p \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{f}_k^T \mathbf{B}_k^T(z) (Gl)_k \mathbf{B}_k(z) \mathbf{f}_k dz dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Если ввести матрицы жесткости  $\mathbf{K}_k$  и инерции  $\mathbf{M}_k$ , вычисленные по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{B}_k^T(z) (Gl)_k \mathbf{B}_k(z) dz - v^2 \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{B}_k^{*T}(z) (\rho l_0)_k \mathbf{B}_k^*(z) dz; \\ \mathbf{M}_k &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \mathbf{H}_k^T(z) (\rho l_0)_k \mathbf{H}_k(z) dz, \end{aligned} \quad (6)$$

то выражение (5) приводится к виду

$$I(\mathbf{f}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{d\mathbf{f}_k^T}{dt} \mathbf{M}_k \frac{d\mathbf{f}_k}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \mathbf{f}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{f}_k \right\} dt.$$

Это выражение можно также записать в матричной форме

$$I(\mathbf{f}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dt} \mathbf{M} \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} \right\} dt. \quad (7)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  называются глобальными матрицами инерции и жесткости. Их элементы составлены из элементов матриц  $\mathbf{M}_k$ ,  $\mathbf{K}_k$  путем суммирования по общим узлам, принадлежащим соседним конечным элементам.

Условие стационарности интеграла действия (7) эквивалентно условию

$$\delta I(\mathbf{f}) = \delta \left( \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dt} \mathbf{M} \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} \right\} dt \right) = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathbf{f}^T \left\{ -\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} - \mathbf{K} \mathbf{f} \right\} dt = 0. \quad (8)$$

На основании основной леммы вариационного исчисления выполнение условия (8) возможно, когда коэффициенты при вариациях  $\delta \mathbf{f}$  обращаются в нуль, т.е.

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{f}(t)}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{f}(t) = 0. \quad (9)$$

Данная система разрешающих дифференциальных уравнений метода конечных элементов (9) должна быть дополнена начальными условиями

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_*(0), \quad \frac{d\mathbf{f}(0)}{dt} = \dot{\mathbf{f}}_*(0).$$

### Типичный конечный элемент. Матрицы инерции и жесткости

Типичный конечный элемент показан на рис. 3. В качестве неизвестных принимаются углы поворота узловых сечений  $\varphi_1^{(n)}(t)$ ,  $\varphi_2^{(n)}(t)$ .

Для конечного элемента используется индивидуальная локальная нумерация и локальная система координат  $O_n y_n z_n$  ось  $O_n z_n$  совпадает с осью стержня.

При движении ленты по конвейеру (сечения А-А, сечения Б-Б, сечения В-В, сечения Г-Г,) лента скручивается в трубу (рис. 4). Средний радиус окружности трубы равен  $R = (R_1 + R_2) / 2 = R_2 + \delta / 2$ , где  $\delta$  — толщина ленты. Свернутая в трубу лента является открытым профилем, поэтому

$$J_k = \frac{1}{3} S \delta^3 = \frac{2\pi}{3} \left( R_2 + \frac{\delta}{2} \right) \delta^3,$$

где  $S$  — развернутая длина средней линии сечения трубы.

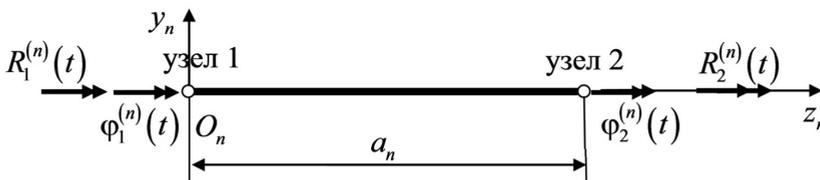


Рис. 3. Конечный элемент для линейного участка ленточного трубчатого конвейера

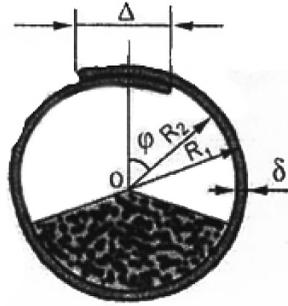


Рис. 4. Скручивание ленты в трубу

Будем считать, что лента выполнена из ортотропного материала с модулями упругости  $E_1$ ,  $E_2$  и модулем сдвига  $G$  [5, 6, 8]. Суммарный момент инерции вращения трубы с грузом равен

$$\rho l_0 = \rho_{гр} l_{гр} + \rho_{\Lambda} l_{\Lambda} = l_{гр} (\rho_{гр} + \rho_{\Lambda} l_{\Lambda} / l_{гр}),$$

где  $\rho = (\rho_{гр} + \rho_{\Lambda} l_{\Lambda} / l_{гр})$  — некоторая приведенная плотность. Кроме того, отметим, что момент инерции трубы равен

$$l_{гр} = \frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_2^4)$$

Матрицы инерции и жесткости  $n$ -го стержневого элемента, имеющего длину  $a_n$ , жесткость сечения при кручении  $(Gl_k)^{(n)}$  и погонный массовый момент инерции  $(\rho l_0)^{(n)}$ , где  $\rho$  — приведенная плотность трубы с грузом;  $l_0$  — полярный момент инерции сечения трубы с грузом, с учетом (6) равны [1]:

$$\mathbf{M}_n = \rho l_0 \int_0^{a_n} \mathbf{H}_n(z)^T \mathbf{H}_n(z) dz_n = \rho l_0 \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} (1 - \frac{z_n}{a_n}) \\ \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \frac{z_n}{a_n}) & \frac{z_n}{a_n} \\ \frac{z_n}{a_n} & \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} dz_n = \frac{(\rho l_0)_n a_n}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \mathbf{B}_n^T(z) (Gl)_n \mathbf{B}_n(z) dz - v^2 \int_0^{a_n} \mathbf{B}_n^T(z) (\rho l_0)_n \mathbf{B}_n(z) dz =$$

$$= \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \frac{Gl_n}{a_n} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, v_0 = \sqrt{\frac{Gl_n}{\rho l_0}}.$$

### Решение тестовой задачи

В качестве иллюстрации применения, разработанного подхода, рассмотрим прямолинейный участок ленточного трубчатого конвейера (рис. 2) при следующих значениях параметров:  $a = 16$  м — длина линейного участка конвейера;  $R = 0,108$  м — средний радиус окружности трубы;  $\delta = 0,06$  м — толщина ленты;  $G = 0,6 \cdot 10^6$  Па — модуль сдвига;  $\psi = \pi$  — угол, характеризующий степень заполнения поперечного сечения ленты грузом;  $\rho_{гр} = 800$  кг/м<sup>3</sup> — плотность каменного угля;  $\rho_{\Lambda} = 14$  даН/м — линейная нагрузка от массы ленты;  $\rho_0 = 17,9$  даН/м — линейные нагрузки от массы вращающихся роликоопор;  $l_{тр} = 5,12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$  — момент инерции вращения трубы;  $l_{гр} = 0,15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$  — момент инерции вращения груза;  $\rho l_0 = 0,63$  кг · м —

погонный массовый момент инерции;  $GI_k = 29,3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$  — жесткость сечения при кручении;  $v = 0 \div 5 \text{ м/с}$  — скорость движения ленты конвейера.

Матрицы инерции и жесткости  $n$ -го стержневого элемента, имеющего длину  $a_n$ , жесткость сечения при кручении  $(GI_k)^{(n)}$  и погонный массовый момент инерции  $(\rho I_0)^{(n)}$ , где  $\rho$  — приведенная плотность трубы с грузом;  $I_0$  — полярный момент инерции сечения трубы с грузом, с учетом (6) равны [1, 3]:

$$\mathbf{M}_n = \rho I_0 \int_0^{a_n} \mathbf{H}_n(z)^T \mathbf{H}_n(z) dz = \rho I_0 \int_0^{a_n} \begin{bmatrix} 1 - \frac{z_n}{a_n} \\ \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{z_n}{a_n} & \frac{z_n}{a_n} \end{bmatrix} dz = \frac{(\rho I_0)_n a_n}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \int_{a_{n-1}}^{a_n} \mathbf{B}_n^T(z) (GI_k)_n \mathbf{B}_n(z) dz - v^2 \int_0^{a_n} \mathbf{B}_n^T(z) (\rho I_0)_n \mathbf{B}_n(z) dz = \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \frac{GI_k}{a_n} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Представим участок ленточного трубчатого конвейера в виде двух конечных элементов, содержащих три узла. Матрицы инерции и жесткости отдельных конечных элементов с использованием формул (11) равны:

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \tilde{\mathbf{M}}_2 = \frac{\rho I_0 a}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \tilde{\mathbf{K}}_2 = \frac{2GI_k}{a} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие глобальные степени свободы имеют вид

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{bmatrix}.$$

Матрицы инерции и жесткости ансамбля конечных элементов в глобальной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{\rho I_0 a}{12} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} = \frac{\rho I_0 a}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{K} &= \frac{2GI_k}{a} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{2GI_k}{a} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

В узле 1 ленточного трубчатого конвейера угол поворота  $\varphi_1(t)$  равен нулю.

Удовлетворяя граничным условиям, получим характеристическое уравнение для определения собственных частот крутильных колебаний в виде:

$$\det \left\{ \frac{2GI_k}{a} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho I_0 a}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} = 0$$

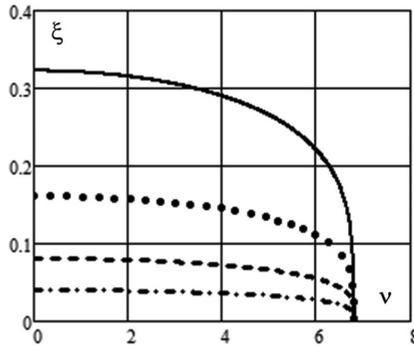


Рис. 5. Зависимостей безразмерной низшей собственной частоты от скорости движения ленты конвейера

В промежуточных случаях на рис. 5 представлены графики зависимостей безразмерной низшей собственной частоты  $\xi = \frac{\omega_1 a}{v_0}$  от параметра  $v$  при различных значениях  $a$ . Сплошная линия соответствует  $a = 5$  м, точечная —  $a = 10$  м, штриховая —  $a = 20$  м, штрихпунктирная —  $a = 40$  м.

Или с учетом безразмерного параметра частоты  $v_0 = \sqrt{\frac{G l_k}{\rho l_0}}$  уравнение переписывается в виде

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \left( \frac{\omega}{v_0} \right)^2 \beta \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad \beta = \frac{a^2}{24 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right]}. \quad (12)$$

Решая квадратное уравнение (12), получим собственные частоты  $\omega_1 \leq \omega_2$  для конечно-элементной модели ленточного трубчатого конвейера

$$\omega_1 = \frac{v_0}{a} \sqrt{\frac{5 - 3\sqrt{2}}{7} 24 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right]}, \quad \omega_2 = \frac{v_0}{a} \sqrt{\frac{5 + 3\sqrt{2}}{7} 24 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right]}$$

Эти значения являются оценкой сверху для истинных собственных частот.

Рассмотрим некоторые предельные случаи:

1. При  $v \rightarrow 0$  (конвейер останавливается), а  $\omega_1 \rightarrow \frac{v_0}{a} \sqrt{\frac{5 - 3\sqrt{2}}{7} 24}$ .

2. При  $v \rightarrow v_0$ ,  $\omega_1 \rightarrow 0$ , что означает колебательное движение ленточного трубчатого конвейера как абсолютно твердого тела (колебательное движение не возможно).

3. При  $v \geq v_0$  движение монотонно возрастающее.

Из рис. 5 видно, что с ростом скорости ленты конвейера низшая собственная частота убывает и стремится к нулю. С увеличением длины прямолинейного участка конвейера низшая частота убывает.

### Основные результаты и выводы

Рассмотрен подход, основанный на методе конечных элементов, позволяющий сравнительно просто, без использования дорогостоящих пакетов программ проводить оценку основных параметров вибрации ленточных трубчатых конвейеров и оценить их влияние на различные конструктивные и эксплуатационные характеристики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радин В. П., Самогин Ю. Н., Чирков В. П. Метод конечных элементов в динамических задачах сопротивления материалов. — М.: Физматлит, 2013. — 316 с.
2. Шахмейстер Л. Г., Дмитриев В. Г. Теория и расчет ленточных конвейеров. — М.: Машиностроение, 1987. — 336 с.
3. Галкин В. И., Дмитриев В. Г., Дьяченко В. П. и др. Современная теория ленточных конвейеров горных предприятий. — М.: МГГУ, 2005. — 543 с.
4. Дмитриев В. Г., Сергеева Н. В. Методика тягового расчета ленточного трубчатого конвейера // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2011. — № 7. — С. 218—228.
5. Дмитриев В. Г., Сергеева Н. В. Определение распределенных сопротивлений движению ленты на прямолинейных участках трассы ленточного трубчатого конвейера // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2008. — № 9. — С. 245—249.
6. Дмитриев В. Г., Ефимов М. С. Влияние различных факторов на угловые отклонения ленты трубчатого конвейера // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2008. — № 8. — С. 235—237.
7. Мишенков Г. В., Самогин Ю. Н., Чирков В. П. Метод конечных элементов в курсе сопротивления материалов. — М.: Физматлит, 2015. — 536 с.
8. Сазамбаева Б. Т., Куанышев Г. И., Хадеев Н. Т., Жуманов М. А. К вопросу исследования трубчатых ленточных конвейеров для транспортирования экологически вредных грузов / Materials of XI International Research and Practice Conference. Science and Education Ltd, Registered in England & WAES «Science without borders», 2015. Volume 23. Technical sciences. Sheffield. pp. 60—66. **ИДБ**

## КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Сазамбаева Баян Токушевна<sup>1</sup> — доктор технических наук, профессор, e-mail: a.sazambaeva\_t@mail.ru,

Ахметова Шолпан Даулетовна<sup>1</sup> — кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой, e-mail: Ahmetona\_sh\_58@mail.ru,

Куанышев Ганижан Имранович<sup>1</sup> — кандидат технических наук, доцент, e-mail: gkuanishev@yandex.ru,

Самогин Юрий Николаевич — кандидат технических наук, доцент, НИУ «МЭИ», e-mail: samogin1812@yandex.ru,

<sup>1</sup> Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева (КазННТУ).

---

ISSN 0236-1493. Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'. 2017. No. 7, pp. 93–102.

UDC 531.17.001.2

**B.T. Sazambaeva, Sh.D. Akhmetova, G.I. Kuanyshev, Yu.N. Samogin**

## **CALCULATION OF TUBULAR BELT CONVEYOR DESIGN BY THE FINITE ELEMENT METHOD**

Method of calculating natural frequencies and forms of free oscillations of mechanical systems based on a special combination of decomposition with condensation is proposed in this article. Condensation upon a frequency feature allows the use of only those equations of oscillations, natural frequencies and forms of which belong to a predetermined frequency range, that makes possible a substantial reduce of dimension of an original problem. Moreover, decomposition in combination with condensation lead to the account's improved stability, as the condition of the matrix that determines the stability depends on the ratio of the highest natural frequency of the system to the lowest.

For the description of the movement of the conveyor Hamilton's principle — Ostrogradsky, including kinetic energy of fluctuations of a site of a cargo branch of a tape between rolkoop and potential energy of elastic deformation of a tape is used. The variation of square functionality by a variation of an angle of rotation of a tubular tape, where turn corners — variations across Hamilton is calculated: the small; compatible to communications, isochronous. Equivalence of the variation principle of Hamilton — Ostrogradsky and a regional task is shown.

The site of the tape tubular conveyor in the form of two final elements containing three knots is considered. Matrixes of inertia and rigidity of separate final elements of a tape are made. Satisfying boundary conditions, are received the characteristic equation for determination of own frequencies of torsional fluctuations of a tape. Schedules of dependences of dimensionless lowest own frequency on tape speed at various values of distance between rolkoop are submitted.

Key words: quasidiagonalization, decomposition, condensation, natural frequency, accuracy, oscillations, frequency range.

---

DOI: 10.25018/0236-1493-2017-7-0-93-102

## AUTHORS

Sazambaeva B.T.<sup>1</sup>, Doctor of Technical Sciences,  
Professor, e-mail: a.sazambaeva\_t@mail.ru,

Akhmetova Sh.D.<sup>1</sup>, Candidate of Technical Sciences,  
Assistant Professor, Head of Chair,  
e-mail: Ahmetona\_sh\_58@mail.ru,

Kuanyshev G.I.<sup>1</sup>, Candidate of Technical Sciences,  
Assistant Professor, e-mail: gkuanishev@yandex.ru,

Samogin Yu.N., Candidate of Technical Sciences,  
Assistant Professor, e-mail: samogin1812@yandex.ru,  
National Research University «Moscow Power Engineering Institute»,  
111250, Moscow, Russia,

<sup>1</sup> Kazakh National Research Technical University named after K.I. Satpayev,  
050013, Almaty, Kazakhstan.

## REFERENCES

1. Radin V.P., Samogin Yu.N., Chirkov V.P. *Metod konechnykh elementov v dinamicheskikh zadachakh soprotivleniya materialov* (Finite element method in dynamic problems on strength of materials), Moscow, Fizmatlit, 2013, 316 p.

2. Shakhmeyer L. G., Dmitriev V. G. *Teoriya i raschet lentochnykh konveyerov* (Theory and calculation of belt conveyors), Moscow, Mashinostroenie, 1987, 336 p.

3. Galkin V.I., Dmitriev V.G., D'yachenko V.P. *Sovremennaya teoriya lentochnykh konveyerov gornyykh predpriyatiy* (Modern theory of mine belt conveyors), Moscow, MGGU, 2005, 543 p.

4. Dmitriev V.G., Sergeeva N.V. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2011, no 7, pp. 218–228.

5. Dmitriev V.G., Sergeeva N.V. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2008, no 9, pp. 245–249.

6. Dmitriev V.G., Efimov M.S. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2008, no 8, pp. 235–237.

7. Mishenkov G.V., Samogin Yu.N., Chirkov V.P. *Metod konechnykh elementov v kurse soprotivleniya materialov* (Finite element method in the training course on strength of materials), Moscow, Fizmatlit, 2015, 536 p.

8. Sazambaeva B.T., Kuanyshev G.I., Khadeev N.T., Zhumanov M.A. *Materials of XI International Research and Practice Conference*. Science and Education Ltd, Registered in England & WAES «Science without borders», 2015. Volume 23. Technical sciences. Sheffield. pp. 60–66.

