

С.В. Дмитриев

РЕШЕНИЕ УПРУГОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ*

Рассмотрено применение численных методов в горном деле и решению задачи теории упругости методом конечных элементов. Изложен основной алгоритм формирования глобальной матрицы жесткости и нахождения тензора напряжений. Представлен возможный вариант трехмерной визуализации результатов расчетов.

Ключевые слова: трехмерная модель, напряженно-деформированное состояние, сечение, сетка конечных элементов, визуализация, численные методы, метод конечных элементов.

DOI: 10.25018/0236-1493-2017-7-0-222-227

Решение задачи методом конечных элементов по нахождению тензора напряжений

Моделирование напряженно-деформированного состояния (НДС) массива горных пород и его поведения при техногенных воздействиях является неотъемлемой частью обоснования параметров систем разработки месторождений полезных ископаемых [1]. Для моделирования изменения напряженного состояния пород в зависимости от порядка ведения очистных работ используется основанный на применении численных методов программный комплекс «SigmaGT». Результатами моделирования являются геомеханическое обоснование и выбор наиболее рационального порядка развития работ в блоке с точки зрения минимизации возможных проявлений горного давления, особенно в динамической форме.

В качестве численного метода определения НДС массива пород выбран метод

конечных элементов, который на протяжении нескольких десятков лет успешно применялся при подготовке практически всех регламентов на отработку новых горизонтов рудников, а также при разработке рекомендаций по запросам рудников при отработке отдельных блоков и участков на подземных рудниках АО «Апатит» [4].

Применение метода конечных элементов для решения практических задач предполагает создание модели объекта, его дискретизацию (разбивку или расчленение на элементы), решение больших систем уравнений, подготовку исходных данных, интерпретацию результатов моделирования и их наглядное представление [3].

Именно посредством разбивки или дискретизации области на элементы, по своей сути, составляющей часть решения задачи, которая заменяет собой аппарат интегрально-дифференциально-го исчисления, необходимый при рас-

* Работа выполнена при поддержке проекта РНФ № 17-77-20055.

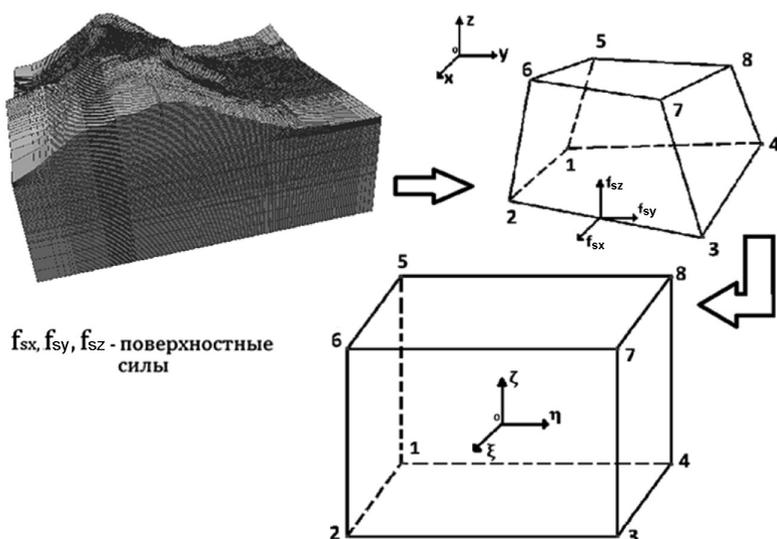


Рис. 1. Восьмиузловой трехмерный конечный элемент

смотрении континуумов, представляется возможным решение методом конечных элементов (МКЭ) сложных дифференциальных уравнений. Фактически МКЭ позволяет решать дифференциальные уравнения, заменяя их системой линейных алгебраических уравнений, что с одной стороны облегчает нахождение решения и кроме этого позволяет решать задачи практически любой сложности [1].

Моделируемое тело разбивается конечным числом объектов меньшего размера. Полученное множество называется сеткой конечных элементов, узлы которых соединены друг с другом.

Для каждого элемента задается аппроксимирующий полином. В случае трехмерной задачи теории упругости три компоненты перемещения аппроксимируются внутри элемента соотношениями:

$$\{U\} = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где u_i, v_i, w_i — это узловые перемещения, а N — матрица функций формы отдельно элемента.

Если задача решается в перемещениях и на границе заданы их значения, то нужно минимизировать потенциальную работу системы. Полная потенциальная энергия упругой системы может быть разделена на две части, одна из которых соответствует энергии деформаций в теле, а другая определяется потенциальной энергией массовых сил и приложенных поверхностных сил. В процессе минимизации получаются интегралы, которые входят в уравнения для элементов [2]:

$$[k^{(e)}] = \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV, \quad (2)$$

где k — это матрица жесткости элемента, B — матрица производных функций формы (матрица связей узлов элемента с его деформацией), D — матрица упругих констант материала элемента.

Стоит отметить, что матрица производных функций формы B представлена в глобальных координатах, а сами функции формы элемента в локальных.

Локальные координаты узлов элемента имеют следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \quad (3) \quad U = Nd_e; d_e = \begin{Bmatrix} d_{e1} \\ d_{e2} \\ d_{e3} \\ d_{e4} \\ d_{e5} \\ d_{e6} \\ d_{e7} \\ d_{e8} \end{Bmatrix}; d_{ei} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

Функции формы приведены в локальной системе координат:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 - \xi\xi_i)(1 - \eta\eta_i)(1 - \zeta\zeta_i) \quad (4)$$

В трехмерном восьмиузловом элементе, вектор смещения U является функцией координат (x, y, z) и интерполируется с помощью функций формы элемента:

где d_e — вектор компонент узловых перемещений.

Поскольку функции формы определены в локальных координатах (ξ, η, ζ) , чтобы получить производные по x, y, z в матрице деформации, необходимо использовать матрицу Якобиана:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U_i)}{\partial \xi} & \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U_i)}{\partial \xi} & \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U_i)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i V_i)}{\partial \eta} & \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i V_i)}{\partial \eta} & \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i V_i)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i W_i)}{\partial \zeta} & \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i W_i)}{\partial \zeta} & \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i W_i)}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} & \frac{\partial N_9}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} & \frac{\partial N_9}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_9}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (7)$$

которая затем используется для вычисления матрицы производных функций формы, заменяя глобальную систему координат на локальную в производных функциях формы.

После того, как матрица производных функций формы B будет вычислена, матрица жесткости твердого трехмерного элемента, может быть получена путем ее подстановки в формулу (2), причем объемный интеграл dV примет следующий вид:

$$[k^{(e)}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \cdot [B^{(e)}] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (8)$$

Далее необходимо сформировать глобальную матрицу с помощью матрицы кинематических связей a :

$$[K] = \sum_{e=1}^N (a^e)^T k^e a^e \quad (9)$$

Глобальная матрица жесткости K имеет ленточный вид. Это означает, что ненулевые элементы матрицы сосредоточены вблизи главной диагонали. Для оптимизации матрицы жесткости целесообразно хранить только отличные от нуля значения. Размерность матрицы определяется числом узлов сетки.

Система линейных алгебраических уравнений получается из матричного уравнения связывающего глобальную матрицу жесткости с векторами объемных и поверхностных сил.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (10)$$

Вектор деформации может быть выражен через узловые перемещения и матрицу связей узлов элемента с его деформацией, полученную дифференцированием надлежащим образом матрицы функций формы элемента.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [B]d_e =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U_i)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i V_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i W_i)}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U_i)}{\partial y} + \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U V_i)}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i V_i)}{\partial z} + \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U W_i)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U_i)}{\partial z} + \frac{\partial(\sum_{i=1}^8 N_i U W_i)}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Закон Гука, связывающий компоненты тензоров напряжений с полной и начальной деформацией, в общей форме имеет вид:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_0\} \quad (12)$$

Трехмерная визуализация тензора напряжений

При анализе результатов моделирования НДС несомненно важной является форма их представления. Наиболее привычными для горного инженера яв-

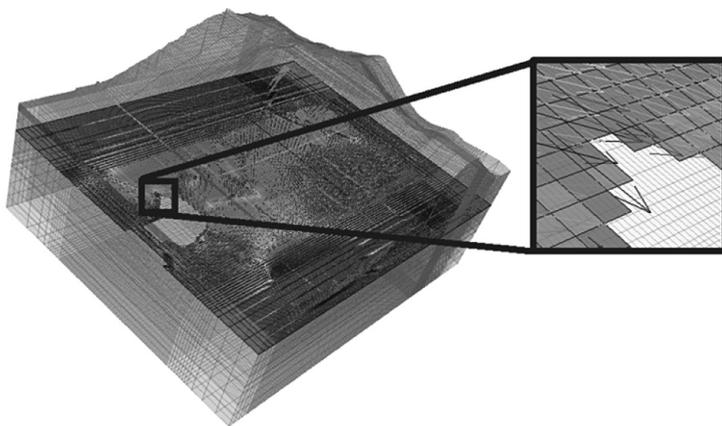


Рис. 2. Трехмерное отображение векторов главной компоненты напряжения модели

ляются планы горизонтов и разрезы, то есть двумерное представление. Однако во многих случаях трехмерное представление распределения напряжений и деформаций помогает лучше понять причины формирования зон их концентрации.

В двумерном виде значения напряжений удобно изображать в виде изолиний или полей напряжений. В объемном варианте можно получить изоповерхности или вектора отдельной компоненты.

В качестве платформы для визуализации было использовано приложение ParaView. Оно обладает открытым исходным кодом и достаточным набором фильтров обработки расчетных данных.

Чтобы отобразить напряжения в виде векторов, необходимо по найденному тензору напряжений найти три главных компоненты напряжений (собственные числа) и соответствующие им направляющие косинусы для нормалей к трем главным площадкам (собственные век-

торы). Сам вектор напряжений получается в результате перемножения полученных значений для каждого из элементов:

$$[\text{Sigma}] = \text{eigenvalue}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) * \text{eigenvector}(\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) \quad (13)$$

Полученный вектор значений используется в качестве входных данных фильтра Glyph к основной модели. По данным визуализации можно определить не только концентрацию полей и значения компонент напряжений, но и пространственное направление векторов напряжений относительно всей модели и каждого элемента в отдельности.

На данный момент, полученные в результате моделирования в программном комплексе «SigmaGT» данные могут быть отображены в виде векторных полей. Дальнейшее развитие модуля визуализации направлено на получение трехмерных изоповерхностей напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриев С. В. Применение численных методов для моделирования напряженно-деформированного состояния массивов горных пород с учетом неоднородности / Современная тектонофизика. Методы и результаты. Материалы четвертой молодежной тектонофизической школы-семинара. Т. 1. — М.: ИФЗ, 2015. — 282 с.

2. Козырев А. А., Енютин А. Н., Мальцев В. А., Семенова И. Э. Методика регионального прогноза удароопасности и состояния массива пород и выбора технических решений по обеспечению безопасности и эффективности горных работ. — ГИ КНЦ РАН.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
4. Семенова И. Э. Исследование закономерностей обрушений подработанных пород в скальных тектонически напряженных массивах (на примере апатитовых рудников Хибин). — Дис. канд. техн. наук. — Апатиты, 2006. — 177 с. **ИВАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Дмитриев Сергей Владимирович — аспирант,
e-mail: dsvofficialmail@mail.ru,
Горный институт Кольского научного центра РАН.

ISSN 0236-1493. Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'. 2017. No. 7, pp. 222–227.

UDC 004.42, 550.8.05

S.V. Dmitriev

FINITE ELEMENT METHOD-BASED SOLUTION OF ELASTIC PROBLEM. STRESS TENSOR VISUALIZATION

The article is devoted to the application of numerical methods in mining and the solution of the problem of elasticity theory by the finite element method. The basic algorithm for the formation of a global stiffness matrix and for finding the stress tensor is presented. The possible variant of a three-dimensional visualization of calculation results is presented.

Key words: three-dimensional model, stress-strain state, cross-section, finite element grid, visualization, numerical methods, finite element method.

DOI: 10.25018/0236-1493-2017-7-0-222-227

AUTHOR

Dmitriev S.V., Graduate Student,
e-mail: dsvofficialmail@mail.ru,
Mining Institute of Kola Scientific Centre
of Russian Academy of Sciences, 184209, Apatity, Russia.

ACKNOWLEDGEMENTS

This study has been supported by the Russian Science Foundation, Project No. 17-77-20055.

REFERENCES

1. Dmitriev S.V. *Sovremennaya tektonofizika. Metody i rezul'taty. Materialy chetvertoy molodezhnoy tektonofizicheskoy shkoly-seminara*. Т. 1 (Modern tectonophysics. Methods and results. Materials of the fourth youth tectonophysical school-seminar, vol. 1), Moscow, IFZ, 2015, 282 p.
2. Kozyrev A.A., Enyutin A.N., Mal'tsev V.A., Semenova I.E. *Metodika regional'nogo prognoza udaroopasnosti i sostoyaniya massiva porod i vybora tekhnicheskikh resheniy po obespecheniyu bezopasnosti i effektivnosti gornykh rabot* (The technique of regional forecast of impact and rock mass status and selection of technical solutions for ensuring safety and efficiency of mining operations), GI KNTs RAN.
3. Segerlind L. *Primenenie metoda konechnykh elementov: Per. s angl.* (Application of the finite element method: English–Russian translation), Moscow, Mir, 1979, 392 p.
4. Semenova I.E. *Issledovanie zakonomernostey obrusheniy podrobotannykh porod v skal'nykh tektonicheskii napryazhennykh massivakh (na primere apatitovykh rudnikov Khibin)* (Investigation of the regularities of collapses of subsoil rocks in rock tectonically tense massifs (on the example of the Hibiny Apatite mines)), Candidate's thesis, Apatity, 2006, 177 p.

