

А.Б. Исаев, А. Алнадфа

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

С учетом суммарных случайных погрешностей измерений координат признаков двух классов образов, заданных своими непересекающимися выпуклыми оболочками, построена функция максимального правдоподобия выборки из координат признаков двух классов образов, погрешности измерений которых распределены по нормальному закону. Показано, что квадратичная форма, соответствующая функции правдоподобия задачи, в рассматриваемой конфлюэнтной ситуации является квазивыпуклой, с помощью исследования ее гессиана получены неравенства, ограничивающие ее область строгой выпуклости, содержащей единственную точку глобального минимума задачи, находимую с помощью специальной итерационной процедуры с начальным приближением из конечной ограниченной области строгой выпуклости. Из данной квадратичной формы получена система квазинормальных взвешенных нелинейных уравнений, приведен способ ее решения, сходящийся к точке глобального минимума. Получено кубическое уравнение относительно параметра (углового коэффициента) разделяющей линии.

Ключевые слова: конфлюэнтная ситуация, суммарные случайные погрешности измерений, разделяющая линия, строго выпуклая и квазивыпуклая квадратичная форма, функция максимального правдоподобия, выпуклая оболочка, вогнутость, выпуклость, истинные и измеренные значения величин признаков образов, неравенства – ограничения.

Хорошо известно, что в теории распознавания образов так называемая задача «сильной отделимости» [1] имеет важное теоретическое и практическое значение. Это задача заключается в разделении двух (или более) выпуклых непересекающихся «многогранников» слоем наибольшей толщины [2].

Под «многогранниками» мы в нашей работе понимаем выпуклые оболочки соответствующих классов образов, задаваемых, в частности, символическими точками на плоскости XOY , обладающих измеримыми координатами.

В [3] предложен итерационно-взвешенный алгоритм построения разделяющей линии для двух классов образов, заданных своими непересекающимися выпуклыми оболочками (виде многогранников), а признаки образомотягощены случайными погрешностями, распределенными по нормальному закону. В целях нахождения оптимальных оценок параметров разделяющие линии регрессии сконструирован алгоритм, получаемый из функция максимального правдоподобия, включающий суммарные случайные погрешности измерений координат признаков предъявляемых классов образов. Рассматривается двумерное, некоррелированное нормальное распределение погрешности по осям OX и OY (плоский случай). В [3] рассматривается конфлюэнтная ситуация – случайные погрешности измерений координат признаков двух классов образов присутствуют как по оси OX , так и по оси OY . Для первого класса образов (w_1) справедливо

$$x_i^1 = \xi_i^1 + \sigma_1; y_i^1 = \eta_i^1 + \varepsilon_1 \quad (i = \overline{1, N}), \quad (1)$$

для второго класса образов справедливо

$$x_i^2 = \xi_i^2 + \sigma_1; y_i^2 = \eta_i^2 + \varepsilon_1 \quad (i = \overline{1, N}), \quad (2)$$

и суммарные случайные погрешности σ и ε нормальны –

$$\sigma \sim N(0, \sigma_{x_i}^2); \varepsilon \sim N(0, \sigma_{y_i}^2).$$

В (1) и (2) x_i, y_i – результаты измерений координат признаков, и $\xi_i = Mx_i, \eta_i = My_i$ их истинные значения, M – символ математического ожидания.

В качестве разделяющей линии используется линия регрессии

$$\tilde{Y} = M(y | x) = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1(\xi + \sigma) + \varepsilon_w, \quad (3)$$

оценки параметров которой – \tilde{b}_0 и \tilde{b}_1 демонстрировали свои оптимальные свойства за счет введения погрешностей в функцию максимального правдоподобия (Ф.М.П.) выборки $\{x_i, y_i\}$, из координат измерений признаков образов двух классов.

Напомним, что рассматривалась конфлюэнтная ситуация [4], вследствие чего оценки метода наименьших квадратов (М.Н.К) теряют все свои оптимальные статические свойства [5], поскольку соответствующий им «оператор проектирования» выбывает из класса ортогональных проектирующих операторов [6].

Если при построении несмещенной и состоятельной оценки линейной регрессии М.Н.К. $Y = M(y | x) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x + \varepsilon_y$ должна минимизироваться взвешенная сумма квадратов отклонений в направлении той оси координат (ось OY), которая содер-

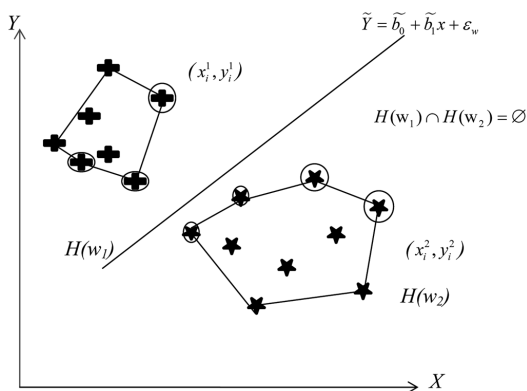


Рис. 1

жит погрешности, то в конфлюэнтной ситуации (погрешности координат признаков образов по осям OX и OY) логично допустить, что необходимо минимизировать суммы квадратов отклонений результатов измерений координат признаков вдоль осей координат.

Этот алгоритм соответствует минимизации некоторой обобщенной квадратичной формы

$$S_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k \omega(x_i)(x_i - \xi_i)^2 + \sum_{i=1}^k \omega(y_i)(y_i - \eta_i)^2, \quad (k \leq N), \quad (4)$$

где $\omega(x_i)$ и $\omega(y_i)$ – некоторые весовые функции результатов измерений координат признаков вдоль осей OX и OY соответственно. На рис. 1 схематически изображена рассматриваемая ситуация, где $H(w_1)$ и $H(w_2)$ – непересекающиеся выпуклые оболочки классов образов w_1 и w_2 , т.е. $H(w_1) \cap H(w_2) = \emptyset$, а линия $\tilde{Y} = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 x + \varepsilon_w$ (см. (3)) – разделяющая линия (регрессии).

Заметим что в (4) суммирования разумно проводить не по всем точкам выборки из классов w_1 и w_2 , но по тем точкам двух оболочек, которые являются «ближайшими соседями» [7] по отношению друг к другу. На рис. 1 они выделены кружками.

Именно в этом смысле трактуется суммирование по « i » от 1 до k , где $k < N$ – это число точек из разных классов, ближе всего расположенных друг к другу («ближайшие соседи» [7]), и такие точки можно виртуально относить к некоторой одной выборке

$$\{x_i, y_i\}_{i=1}^k, \quad k < N \quad (5)$$

Считая, что погрешности результатов измерений координат признаков независимы нормально распределены, ясно, что мак-

симизация функции максимального правдоподобия (Ф.М.П.) выборки (5)

$$L_{\Sigma} = C(\sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2, \pi, N) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\{ \left(\frac{x_i - \xi_i}{\sigma_{xi}} \right)^2 + \left(\frac{y_i - \widetilde{b}_0 - \widetilde{b}_1 \xi_i}{\sigma_{yi}} \right)^2 \right\} \right\} \quad (6)$$

по параметрам $\xi_i = Mx_i, \widetilde{b}_0, \widetilde{b}_1$ эквивалентна, в большинстве практических случаев, обращению в минимум обобщенной квадратичной формы S_{Σ} , состоящей в показателе степени экспоненты из (6)

$$S_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{k < N} \left\{ \left(\frac{x_i - \xi_i}{\sigma_{xi}} \right)^2 + \left(\frac{y_i - \widetilde{b}_0 - \widetilde{b}_1 \xi_i}{\sigma_{yi}} \right)^2 \right\} \rightarrow \min(extr), \quad (7)$$

но, в принципе, знак S_{Σ} может указывать как на ее выпуклость, так и на ее вогнутость.

В (6) $C(\sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2, \pi, N)$ – константа, не зависящая от ξ_i, b_0, b_1 , и которую в дальнейшем можно опустить в расчетах, при этом можно считать, что $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ ($N > k$) – вектор истинных значений координат признака X .

Положив веса (весовые функции) $w_i(x) = \frac{1}{\sigma_{xi}^2}, w_i(y) = \frac{1}{\sigma_{yi}^2}$

(напомним, что σ_{xi}^2 и σ_{yi}^2 – это экспериментальные дисперсии признаков) – легко видеть, что оценки $\{\xi_i (i = 1, k), \widetilde{b}_0, \widetilde{b}_1\}$ найдется из системы уравнений:

$$\frac{\partial S_{\Sigma}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad \frac{\partial S_{\Sigma}}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial S_{\Sigma}}{\partial b_1} = 0,$$

которая в развернутом виде имеет вид

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\xi}_i = \frac{\sigma_{yi}^2 x_i + \widetilde{b}_1 \sigma_{xi}^2 (y_i - \widetilde{b}_0)}{\sigma_{yi}^2 x_i + \widetilde{b}_1^2 \sigma_{xi}^2} \quad (*1) \\ \sum_{i=1}^k \frac{y_i - b_0 - b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^k \frac{(y_i - b_0 - b_1 \xi_i) \xi_i}{\sigma_{yi}^2} = 0 \end{array} \right.$$

Мы, таким образом, должны решить задачу построения разделяющей линии (регрессии) $\overline{Y} = \widetilde{b}_0 + \widetilde{b}_1 \overline{X} + \varepsilon_s$, в рамках конфлюэнтной ситуации, описываемой (1), (2), где $\overline{X} = \overline{\xi} + \sigma; \overline{Y} = \overline{\eta} + \varepsilon; \overline{\xi} = M\overline{X}, \overline{\eta} = M\overline{Y}, \varepsilon_s$ – невязка, заключающая в себе информацию о наличии невязок σ и ε . Напомним,

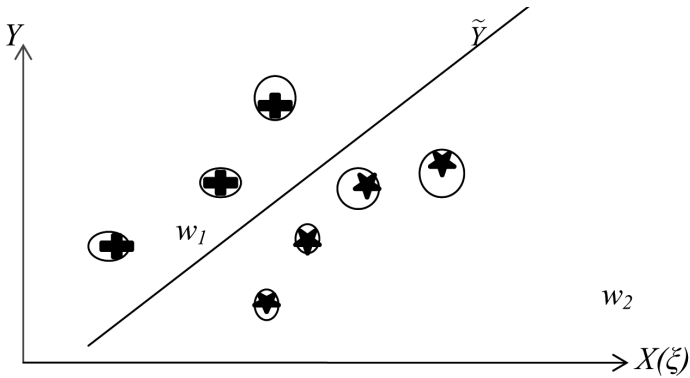


Рис. 2

что понятие «невязка» — это виртуальный символ приближенного характера искомого уравнения регрессии. А точки над и под линией, это отобранные ранее так называемые «ближайшие соседи» [7] — такие «точки» (или образы) из разных классов образов w_1 и w_2 , наименее удаленные друг от друга

Исследуем выпуклость квадратичной формы S_{Σ} . Вычислим ее вторые производные по переменным ξ, b_0, b_1 :

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S_{\Sigma}}{\partial \xi_i^2} = \frac{2}{\sigma_{xi}^2} + \frac{2}{\sigma_{yi}^2} b_1^2 > 0 \quad (\forall i \in \overline{1, k}), \\ \frac{\partial^2 S_{\Sigma}}{\partial b_0^2} = 2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_{yi}^2} > 0 \\ \frac{\partial^2 S_{\Sigma}}{\partial b_1^2} = 2 \sum_{i=1}^k \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} > 0 \end{array} \right.$$

Данные три неравенства является классическим указанием на унимодальный характер функции S_{Σ} и позволяют сделать вывод, что у функции S_{Σ} возможно существует конечная область унимодальности (строгого минимума), внутри которой функция S_{Σ} выпукла (строго) по каждой из переменных ξ, b_0, b_1 .

Таким образом, S_{Σ} , даваемая(7) в точке $\{\xi_m, \overline{b_{0m}}, \overline{b_{1m}}\}^T$ имеет глобальный минимум [8]. В силу этого, итерационный процесс сконструированы на базе (*), если он сходится, то сходятся в точке глобального минимума поверхности S_{Σ} (7). Ниже эта проблема будет подробно исследована.

Заметим, что в рассматриваемой итерационной процедуре, на некотором m -ом шаге, из (*) вычисляем вектор весов (его компоненты) — $\xi^m(b_0^{m-1}, b_1^{m-1})$, причем такого, что

$$\bar{\xi}^m(b_0^{m-1}, b_1^{m-1}) = \arg \min S_{\Sigma}(b_0, b_1).$$

Подчеркнем, что, например, при выборе начального приближения для b_0, b_1 в виде оценок $\widehat{b}_0, \widehat{b}_1$ метода наименьших квадратов (М.Н.К.), по-прежнему

$$\widehat{b}_0, \widehat{b}_1, \sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2, u \bar{\xi}_m \in \mathbb{R}_2, \text{ а } \dim \xi_i = \dim x_i (\forall i = 1, \infty).$$

Поскольку $x_i \in OX$ это результат реального измерения координаты признака, а ξ_i — это неизвестное нам истинное значение этой координаты, то практически $\|x_i - \xi_i\| \leq l \sigma_{xi}^2$, где $l \in [1, 5], i \in \overline{1, k}$. Данное ограничения выполняется при внимательном отношении экспериментатора к вычислительной процедуре.

Нетрудно видеть, что последние два уравнения в (*) представляют собой систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов (М.Н.К.) с двумя неизвестными $\widehat{b}_0, \widehat{b}_1$. Эта система в подавляющем большинстве практических случаев имеет численное решение (ее определитель не равен нулю). Напомним, что $x_i, \xi_i, \sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2, b_0, b_1$ — действительные числа.

После выполнения элементарных преобразований над двумя последними уравнениями из системы (*) мы приходим к уравнениям:

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \frac{y_i - b_0 - b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} = \widetilde{b}_0 \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right) + \widetilde{b}_1 \left(\sum_{i=1}^k \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right) = \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{\sigma_{yi}^2} \right. \quad (8)$$

$$\left. \sum_{i=1}^k \frac{(y_i - \widetilde{b}_0 - \widetilde{b}_1 \widetilde{\xi}_i) \widetilde{\xi}_i}{\sigma_{yi}^2} = \widetilde{b}_0 \left(\sum_{i=1}^k \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right) + \widetilde{b}_1 \left(\sum_{i=1}^k \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} \right) = \sum_{i=1}^k \frac{y_i \xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right. \quad (9)$$

Почеркнем, что все коэффициенты системы из уравнений (8) и (9) — действительные числа.

Введем обозначения:

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_{yi}^2} = \alpha_{11}; \sum_{i=1}^k \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} = \alpha_{12}; \sum_{i=1}^k \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} = \alpha_{21}; \sum_{i=1}^k \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} = \alpha_{22};$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{y_i}{\sigma_{yi}^2} = c_1; \sum_{i=1}^k \frac{y_i \xi_i}{\sigma_{yi}^2} = c_2,$$

тогда получим систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{12} = c_1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} = c_2 \end{cases} \quad (10)$$

для взвешенного М.Н.К., имеющую численные решения при отличном от нуля ее определителе, с хорошо известным из литературы аналитическим решением [8]

$$\begin{cases} \widehat{b}_0 = \frac{c_1 \alpha_{21} - c_2 \alpha_{12}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12}} \\ \widehat{b}_1 = \frac{c_2 \alpha_{11} - c_1 \alpha_{21}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12}} \end{cases} \quad (11)$$

Сделаем существенное замечание относительно выбора начального приближения рассмотренного итерационного процесса. Учитывая возможное нарушения характера выпуклости (ее возможного перехода к «вогнутости»), начальное приближение следует разместить там, где все производные

$$\frac{\partial S_\Sigma}{\partial \xi_i} > 0 \quad (i = \overline{1, k}), \quad \frac{\partial S_\Sigma}{\partial b_0} > 0, \quad \frac{\partial S_\Sigma}{\partial b_1} > 0$$

Другими словами, надо решить задачу минимизация с ограничениями сверху на величину ординаты S_Σ :

$$\min S_\Sigma = 2; \quad \frac{\partial S_\Sigma}{\partial \xi_i} > 0 \quad \frac{\partial S_\Sigma}{\partial b_0} > 0, \quad \frac{\partial S_\Sigma}{\partial b_1} > 0.$$

и двигаться по этой области «вниз» к экстремуму, в направлении убывания производных. Это должно быть реализовано наилучшим образом в применяемом нами методе покоординатного спуска [8] в качестве «отправной точки» (начального приближения). Нетрудно видеть, что определитель системы (10) равен нулю тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_k$, то есть измерения проводятся только в одной точке (что нереально).

Следовательно, система (10) в реальных ситуациях всегда имеет численное решение (единственное) для $\forall (\xi_i, x_i) \in I \subset \mathbb{R}_2$, где I — интервал измерений.

Поэтому мы можем доказать сходимость итерационного процесса решений системы (*). На первом шаге, на основании неизвестной нам выборки $\{x_i, y_i\}^N$, по формулам (11) рассчитаем оценки \widehat{b}_0 , \widehat{b}_1 , взвешенного М.Н.К. и подставляем их в формулу (*1) из системы (*).

Возьмем первое приближение для ξ_i :

$$\widehat{\xi}_i^{(1)} = \frac{\sigma_{yi}^2 x_i + \widehat{b}_1 \sigma_{xi}^2 (y_i - \widehat{b}_0)}{\sigma_{yi}^2 + \widehat{b}_1^2 \sigma_{xi}^2} \quad (12)$$

На втором шаге найденные $\widehat{\xi}_i^{(1)}$ подставляем в $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ (см. выше) и из (10) находим $\widehat{b}_0^{(2)}, \widehat{b}_1^{(2)}$, подставляем их в (*1) и рассчитываем $\widehat{\xi}_i^{(2)}$.

Вычисления и сами аналитические выражения довольно громоздки и мы приведем систему (10) лишь для второго шага

$$\begin{cases} \widetilde{b}_0^{(2)} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right) + \widetilde{b}_1^{(2)} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\widetilde{\xi}_i^{(1)}}{\sigma_{yi}^2} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_{yi}^2} \\ \widetilde{b}_0^{(2)} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\widetilde{\xi}_i^{(1)}}{\sigma_{yi}^2} \right) + \widetilde{b}_1^{(2)} \left(\sum_{i=1}^N \frac{[\widetilde{\xi}_i^{(1)}]^2}{\sigma_{yi}^2} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{y_i \widetilde{\xi}_i^{(1)}}{\sigma_{yi}^2} \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\widetilde{b}_0^{(2)}, \widetilde{b}_1^{(2)}$, подставляем их в (12) и вычисляем

$$\widetilde{\xi}_i^{(2)} = \frac{\sigma_{yi}^2 x_i + \widetilde{b}_1^{(2)} (y_i - \widetilde{b}_0^{(2)})}{\sigma_{yi}^2 + [\widetilde{b}_1^{(2)}]^2 \sigma_{xi}^2}, \quad (13)$$

где $\widetilde{\xi}_i^{(1)}$ дается из (12), $\widehat{b}_0, \widehat{b}_1$ — это оценки М.Н.К. ($\widehat{b}_0 \equiv \widetilde{b}_0^{(1)}, \widehat{b}_1 \equiv \widetilde{b}_1^{(1)}$), найденные $\widetilde{\xi}_i^{(2)}$ подставляем в $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, c_1, c_2$ (см. (10)) и из (10) или (11) находим $\widehat{b}_0^{(3)}, \widehat{b}_1^{(3)}$.

Проводим далее аналогичные вычисления и операции вплоть до остановки процесса при достижении требуемой точности вычислений производных

$$\frac{\partial S_\Sigma}{\partial \xi_i} < \varepsilon_s \quad (\varepsilon_s \ll 1), \quad \frac{\partial S_\Sigma}{\partial b_0} < \varepsilon_p \quad (\varepsilon_p \ll 1), \quad \frac{\partial S_\Sigma}{\partial b_1} < \varepsilon_e \quad (\varepsilon_e \ll 1)$$

Нам остается доказать, что в этих условиях с ростом числа итераций процесс сойдется к точке единственного глобального минимума квадратичной формы S_Σ . Очевидно что нами в этом процессе реализуется метод покоординатного спуска [8].

На первом шаге мы ищем $\min S_\Sigma$ по переменной ξ_i , осуществляя сечение S_Σ плоскостью $\xi_i = \text{const}$, находим

$$\min S_\Sigma(\xi_i, \widehat{b}_0, \widehat{b}_1) \equiv S_\Sigma^1(\xi_i^1, b_0, b_1)$$

при зафиксированных $\widehat{b}_0, \widehat{b}_1$ оценках метода наименьших квадратов ($\sigma_{xi}^2 = 0 \forall i$). Далее аналогичным образом ищем

$$\min S_\Sigma(\xi_i^1, b_0, \widehat{b}_1) = S_\Sigma(\xi_i^1, b_0^1, b_1^1),$$

далее, аналогичным образом, на следующем шаге находим величину $b_i = \arg \min S_\Sigma(\xi_i, b_0^1, b_1^1)$ и цикл, описываемый формулами (8)–(13) завершен. Как видим, выполнены все условия сходимости метода покоординатного спуска: S_Σ имеет конечную область строгой выпуклости (это (**), показано выше), дважды дифференцируема, а начальное приближение можно выбирать

в окрестности решение М.Н.К., из которого мы осуществляли «спуск» последовательно по координатам i , а затем b_0 , затем b_1 [8].

Однако вопрос о сходимости итерационного процесса требует тщательного исследования, поскольку топологический вид квадратичной формы S_Σ достаточно разнообразен – она может быть строго, слабо и сильно выпукла, псевдо выпукла, не выпукла (вогнута) другие виды.

Образует матрицу Гессе – G_s^{3*3} , и рассчитаем аналитические выражения для ее угловых миноров M_1, M_2 и определителя $DetG$

$$\text{Гессиан } G_s^{3*3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial \xi_i^2} & \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial \xi_i \partial b_0} & \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial \xi_i \partial b_1} \\ \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial b_0 \partial \xi_i} & \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial b_0^2} & \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial b_0 \partial b_1} \\ \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial b_1 \partial \xi_i} & \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial b_1 \partial b_0} & \frac{\partial^2 S_\Sigma}{\partial b_1^2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Опуская громоздкие выражения для вторых и первых производных, получаем

$$G_s^{3*3} = \begin{bmatrix} 2\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + 2b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & 2b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & -2\sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} \\ 2b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \\ -2\sum \frac{y_i - b_0 - b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее везде понимается суммирование от $\overline{1, N}$, поэтому индексы суммирования опущены.

Легко видеть, что

$$M_{11} = 2\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + 2b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} > 0$$

$$M_{22} = 4\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} * \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} > 0 \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}_2) \quad (15)$$

Исследуем $DetG$, разлагая его по третьему столбцу, придем к выражению:

$$DetG = 2\sum \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} \det A - 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B - 2\sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det C \quad (16)$$

$$\text{Здесь } A = \begin{bmatrix} 2\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + 2b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & 2b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \\ 2b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + 2b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & 2b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \\ -2\sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \\ -2\sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} & 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \end{bmatrix}$$

Анализируя выражения для $\det B$, $\det C$ и, учитывая их множители в разложении (6), имеем:

$$\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B \gg 0, \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \gg 0,$$

в зависимости от случайных значений и знаков величин

$$y_i, \xi_i, \sigma_{xi}^2, \sigma_{yi}^2, \bar{b}_0, \bar{b}_1 (i = 1, N).$$

Другими словами, $DetG$ в одной области определения может быть > 0 , а в другой области < 0 . Напомним, что как было показано выше, в точке экстремума (см. (**)),

$$\frac{\partial^2 S_{\Sigma}}{\partial \xi_i^2} > 0 (i = \overline{1, N}), \frac{\partial^2 S_{\Sigma}}{\partial b_0^2} > 0, \frac{\partial^2 S_{\Sigma}}{\partial b_1^2} > 0,$$

поэтому в области определения Ω_S^T , где справедливы последние три неравенства, функция S_{Σ} должна быть строго выпукла.

Одним из вариантов области строгой выпуклости, где должно быть выполнено: $M_{11} > 0, M_{22} > 0, DetG > 0$, является вариант, получаемый из

$$DetG > 0 \Rightarrow 2\sum \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} \det A - 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B - 2\sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det C > 0$$

например, при такой случайной комбинации знаков:

$$\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} < 0, \det B > 0; \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} > 0, \det C < 0. \quad (17)$$

Возможны, естественно, и другие варианты сочетания знаков неравенств $><$, но, естественно, все эти варианты необходимо исследовать на совместимость системы неравенств, соответствующих каждому варианту $\text{Det}G > 0$ как для данного конкретного варианта, так и всех (или их части) вариантов совместно.

Раскроем первое слагаемое в (16), получим:

$$2\sum \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} (\det A) = 2\sum \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} * \left(2\sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * 2\sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right) > 0$$

Раскрывая второе слагаемое в разложении (16):

$$2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B = 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \left[\left(2\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + 2b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right) * 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} + \right. \\ \left. + \left(2\sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right) * 2b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right] > 0$$

над которым выполним ряд преобразований, с учетом (17), и, не забывая о том, что нам необходима строгая положительность

$$2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B = -2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \left\{ \left[2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * 2\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + 2b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right] + \right. \\ \left. + \left[4\sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right] \right\} = \\ = -2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \left\{ \left[4\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + 4b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right] + \right. \\ \left. + 4b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right\} = -2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} 4\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} - \\ - 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} 4b_1^2 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} - 2\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} 4b_1 \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} = \\ = -8 \left(\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right)^2 * \left[\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right] - 8b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2}$$

Необходимо заметить, что строгая положительность гарантируется, если $\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B < 0$.

Итак, данное выражение $-2 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B > 0$, что возможно, если

$$\begin{aligned} & -8b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} > \\ & > -8 \left(\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right)^2 * \left[\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть этого неравенства > 0 всегда, то в таком случае и левая часть вся > 0 , т.е., опуская $\sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} > 0$, приходим к ограничению

$$-8b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} > 0$$

Возвращаясь назад, получили:

$$\begin{aligned} -2 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B > 0 & \Leftrightarrow -8b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} > \\ & > -8 \left(\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right)^2 * \left[\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right] > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим далее выражение третьего слагаемого

$$\begin{aligned} & -2 \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det C = \\ & = \left[4b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} + 4 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right] \left(-2 \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right) = \\ & = 4b_1 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \left[b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} + \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right] * (-2) = \\ & = -8 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \left[b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} + \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right] < 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow -8 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \left[b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} + \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right] > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, объединяя (16)–(19), приходим к системе неравенств, требований, гарантирующих $\det S_{\Sigma} > 0$:

$$(I) 2 \sum \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} (\det A) > 0;$$

$$(II) -2 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det B > 0;$$

$$(III) -2 \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} \det C > 0;$$

Раскрывая $\det A$, $\det B$, $\det C$, получаем в итоге

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) : 2 \sum \frac{\xi_i^2}{\sigma_{yi}^2} * \left(2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * 2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right) > 0; \\ (II) : -8 \left(\sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right)^2 * \left[\sum \frac{1}{\sigma_{xi}^2} + b_1^2 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} \right] - \\ - 8b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} > 0; \\ (III) : -8 \sum \frac{1}{\sigma_{yi}^2} * \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} * \left[b_1 \sum \frac{\xi_i}{\sigma_{yi}^2} + \sum \frac{y_i - b_0 - 2b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}^2} \right] > 0; \end{array} \right.$$

Данная система неравенств-ограничений гарантирует нам строгую положительность выражений (17) для определителя гесс-сиана G_{Σ}^{3*3} , соответствующего обобщенной квадратичной форме S_{Σ} (см. (7)), описывающего область строгой выпуклости S_{Σ} . Напомним, что в основе аналитического выражения для S_{Σ} лежит предположение о нормальном (двумерном) распределении погрешностей измерения координат признаков, предъявляемых для распознавания *a priori* не пересекающихся классов образов, в рамках рассматриваемой в работе конфлюэнтной ситуации.

Если снова обратиться к системе уравнений (*) и решить ее методом последовательного исключения переменных, то в результате придем к кубическому уравнению [9] относительно искомого углового коэффициента b_1 разделяющие линии регрессии:

$$\begin{aligned} b_1 \sum_{i=1}^N \sigma_{xi}^2 \widetilde{x}_i^2 \widetilde{\omega}_i^2 - 2b_1^2 \sum_{i=1}^N \sigma_{xi}^2 \widetilde{x}_i \widetilde{y}_i \widetilde{\omega}_i^2 - b_1 \left\{ \sum_{i=1}^N x_{xi}^2 \widetilde{\omega}_i - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^N \sigma_{xi}^2 \widetilde{y}_i^2 \widetilde{\omega}_i^2 \right\} + \sum_{i=1}^N \widetilde{x}_i \widetilde{y}_i \widetilde{\omega}_i = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } \widetilde{x}_i^2 = x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_{xi} \widetilde{\omega}_i}{\sum_{i=1}^N \widetilde{\omega}_i} \right), \widetilde{y}_i^2 = y_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^N y_{xi} \widetilde{\omega}_i}{\sum_{i=1}^N \widetilde{\omega}_i} \right), \widetilde{\omega}_i = (\sigma_{yi}^2 + b_i \sigma_{xi}^2).$$

Из данного уравнения были получены практически все его частные случаи, касающиеся всех частых случаев комбинаций отношения двух величин дисперсий σ_{xi}^2 и σ_{yi}^2 ($i = 1, N$) друг с другом:

$$(\sigma_{xi}^2 = 0, \sigma_{yi}^2 \neq 0), (\sigma_{xi}^2 \neq 0, \sigma_{yi}^2 = 0), \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(y)} = C,$$

$$\text{где } C = \text{const}, \omega_i(x) = \frac{1}{\sigma_{xi}^2}, \omega_i(y) = \frac{1}{\sigma_{yi}^2} - \text{веса измерений.}$$

Заметим, что широко известные регрессии y на x , и x на y , с их традиционными оценками метода наименьших квадратов соответствует упомянутым выше комбинациям

$$\sigma_{xi}^2 = 0 \vee \sigma_{yi}^2 \neq 0; \sigma_{xi}^2 \neq 0, \sigma_{yi}^2 = 0 \forall i = \overline{1, N}.$$

В [9] впервые приведен список инвариантов рассмотренной задачи относительно перестановки $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, имеющий большое практическое значение.

Поскольку кубическое уравнение (20) может, в частности, иметь три действительных корня, необходима существенная дополнительная информация для идентификации «наилучшей» прямой (наилучшего углового коэффициента b_1^* или, что равносильно, наилучшего корня (20) из его трех корней), который будет однозначно соответствовать минимуму S_Σ .

Относительно существования глобального минимума у S_Σ приведем фундаментальную теорему [5]: «Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена снизу числом B . Тогда, если найдется такая точка $x_0 \in \mathbb{R}_m$, в которой $\varphi(x_0) \leq B$, то абсолютный минимум функции $\varphi(x)$ достигается». В нашей задаче в качестве функции $\varphi(x)$ должна рассматриваться S_Σ (см. (7)), которая будет ограничена снизу и

$$B_1 > 0 \left(B_1 < \min \sum \left(\frac{x_i - \xi_i}{\sigma_{xi}} \right)^2 < \min \sum \left(\frac{y_i - b_0 - b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}} \right) \right)$$

или же числом

$$B_2 > 0 \left(B_2 < \min \sum \left(\frac{y_i - b_0 - b_1 \xi_i}{\sigma_{yi}} \right)^2 < \min \sum \left(\frac{x_i - \xi_i}{\sigma_{xi}} \right)^2 \right)$$

и, как видно, найдется число $\beta_1 > 0$, такое, что $0 < \beta_1 < B_1$, или найдется такое число $\beta_2 > 0$, такое, что $0 < \beta_2 < B_2$.

Но если вернуться к начальной части статьи, где установлена квазивыпуклость S_Σ и, одновременно, существование единственной ограниченной замкнутой области строгой выпуклости Ω_s (см. (**)), то вопрос о существовании глобального минимума у S_Σ решается положительно, в полном соответствии с ее квазивыпуклостью.

Не лишне вспомнить [4, 5] «что всякая монотонно-убывающая (возрастающая) последовательность, ограниченная снизу (сверху) имеет предел».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ершова А. В., Скопинская И. М.* Исследование устойчивости параллельного алгоритма решения задачи сильной отделимости // Вестник ЮУрГУ. — 2012. — № 18.
2. *Еремин И. И.* Фейеровские методы сильной отделимости выпуклых полиэдральных множеств // Известия высших учебных заведений. Серия Математика. — 2006. — № 12. — С. 33–43.
3. *Исаев А. Б., Алнадфа А.* Итерационно-взвешенный алгоритм построения линейной разделяющей функции регрессии в задаче классификации образов, признаки которых отягощены погрешностями измерений // Горный информационно-аналитический бюллетень. — 2015. — № 5. — С. 336–341.
4. *Грешилов А. А.* Математические методы построения прогнозов. — М.: Радио и связь, 1997.
5. *Демиденко Е. З.* Линейная и нелинейная регрессии. — М.: Финансы и статистика, 1981.
6. *Исаев А. Б., Аль-Харази.* Нарушение идемпотентности ортогонального проектирующего оператора в задачах распознавания образов в рамках конфлюэнтной ситуации // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Инженерные исследования. — 2009. — № 4. — С. 86–88.
7. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Математические принципы распознавания образов. — М.: Мир, 1978.
8. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров. 2-е изд., доп. — М.: Изд-во МЭИ, 2003.
9. *Исаев А. Б.* Измерительная техника. — 1982. — № 10. — С. 13. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

*Алнадфа А.*¹ — аспирант,
e-mail: antwan.tiger@gmail.com,

*Исаев А. Б.*¹ — профессор, e-mail: a.borisovich@mail.ru,
Финансовый университет при правительстве РФ,

¹ Российский университет дружбы народов.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF QUADRATIC FORM IN IMAGE IDENTIFICATION PROBLEMS

Considering overall imprecision of measuring coordinates of attributes for two classes of images preset as disjoint shells, the function of the highest likelihood has been plotted for sampling of the coordinates of attributes for images of two classes with the normal law distribution of the measurement errors.

It is shown that the quadratic form consistent with the likelihood function of the problem is quasi-convex in the considered confluent situation. Based on the analysis of the Hessian of the function, the inequalities are derived, that limit the function's strict convexity domain containing the single point of the absolute minimum of the problem, which is found using a special iterative procedure with the initial approximation from a finite limited domain of strict convexity.

Using this quadratic form, a system of quasi-normal weighted nonlinear equations is obtained, and the system solution converging to the absolute minimum point is given. A cubic equation is derived relative to a parameter (slope ratio) of the separating line.

Key words: confluent situation, overall random measuring errors, separating line, strictly convex and quasi-convex quadratic form, maximum likelihood function, convex shell, concavity, convexity, true and measured values of attributes of images, inequalities–constraints.

AUTHORS

*Isaev A.B.*¹, Graduate Student, e-mail: antwan.tiger@gmail.com,

*Alnadfa A.*¹, Professor, e-mail: a.borisovich@mail.ru,

Financial University under the Government of Russian Federation,
Moscow, Russia,

¹ Peoples' Friendship University of Russia,
113093, Moscow, Russia.

REFERENCES

1. Ershova A. V., Skopinskaya I. M. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta*. 2012, no 18.

2. Eremin I. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Seriya Matematika*. 2006, no 12, pp. 33–43.

3. Isaev A. B., Alnadfa A. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2015, no 5, pp. 336–341.

4. Greshilov A. A. *Matematicheskie metody postroeniya prognozov* (Mathematical methods of forecasting), Moscow, Radio i svyaz', 1997.

5. Demidenko E. Z. *Lineynaya i nelineynaya regressii* (Linear and nonlinear regression), Moscow, Finansy i statistika, 1981.

6. Isaev A. B., Al'-Kharazi. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya Inzhenernye issledovaniya*. 2009, no 4, pp. 86–88.

7. Tu Dzh., Gonsales R. *Matematicheskie printsipy raspoznavaniya obrazov* (Mathematical principles of image identification), Moscow, Mir, 1978.

8. Amosov A. A., Dubinskiy Yu. A., Kopchenova N. V. *Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov* (Computational methods for engineers, 2nd edition), Moscow, Izd-vo MEI, 2003.

9. Isaev A. B. *Izmeritel'naya tekhnika*. 1982, no 10, pp. 13.