

Р.К. Халкечев

**ИЕРАРХИЧЕСКИ-САМОПОДОБНЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕОМАТЕРИАЛОВ
ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ
КАК ОСНОВА ДЛЯ ПЕРКОЛЯЦИОННОГО
МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ**

Разработаны мультифрактальные математические модели геоматериалов различных порядков сложности относительно упругих полей напряжений. Данные модели являются основой для разработки нового метода перколяционного мультифрактального моделирования. Этот метод лежит за пределами традиционной теории перколяции. Так порог перколяции в данном методе связан с конкретными изучаемыми свойствами (в нашем случае – деформационные свойства) и физическими процессами (формирование поля напряжений) в исследуемых объектах.

Ключевые слова: геоматериал, поле напряжений, теория перколяции, объект управления, автоматизированная система.

В последнее время в задачах, связанных с определением напряженного состояния каких-либо объектов, все чаще применяются численные методы с использованием ЭВМ. Одним из таких методов, наиболее распространенных и широко зарекомендовавших себя при решении задач определения напряженного состояния, является метод конечных элементов.

Основная идея данного метода заключается в аппроксимации непрерывной величины дискретной моделью, представляющей собой множество значений заданной функции в некотором конечном числе точек области ее определения в совокупности с кусочными аппроксимациями этой функции на некотором конечном числе подобластей, называемых конечными элементами. При этом необходимо выполнение условия полноты, заключающегося в том, что с увеличением числа конечных элементов и уменьшением их размеров поведение дискретной системы должно приближаться к поведению сплошной среды. Однако для геоматериалов выполнения данного условия полноты ожидать не приходится. В первую очередь это связано с тем, что для геоматериалов существует ограничение на минимально допустимый размер конечных элементов. Этот размер полностью определяется величиной элементарного объема исследуемого геоматериала, континуум которого подвергается конечно-элементной дискретизации.

Ситуацию осложняет и то, что процессы разрушения в геоматериалах, а также связанные с ними динамические проявления, определяются внутренним полем напряжений, испытываемым зернами, размеры которых существенно меньше величины элементарного объема. По этой причине метод конечных элементов дает приемлемые результаты лишь в случае исследования геоматериалов до третьего порядка сложности включительно, для которых величина элементарных объемов исследуемых геоматериалов невелика. Таким образом, для таких геоматериалов как породные массивы, являющихся объектом управления автоматизированных

систем управления технологическими процессами горного производства, метод конечных элементов дает неприемлемые результаты.

В сложившейся ситуации приобретает актуальность разработки математических моделей, определяющих напряженное состояние геоматериалов с учетом их сложной внутренней структуры.

Для разработки таких моделей воспользуемся мультифрактальным подходом [1]. Построим мультифрактальную математическую модель горной породы относительно упругого поля напряжений.

Сплошная среда со структурой, соответствующая породному массиву, описывается следующими системами уравнений, записанными в смещениях в символическом виде:

1) уравнения равновесия:

$$L^{(m)} u^{(m)} = -f, \quad (1)$$

где $L^{(m)} = -\nabla C \nabla$ (∇ – вектор-оператор дифференцирования), $u^{(m)}$ – смещение, f – внешние силы; $C^{(m)}$ – тензор модулей упругости эллипсоида, соответствующего горной породе.

2) кинематические уравнения:

$$\varepsilon^{(m)} = \text{def } u^{(m)}, \quad (2)$$

где оператор def соответствует симметризованному градиенту;

3) определяющие уравнения:

$$\sigma^{(m)} = C^{(m)} : \varepsilon^{(m)}, \quad (3)$$

или

$$\varepsilon^{(m)} = C^{(m)} : \sigma^{(m)}, \quad (4)$$

где символ $(:)$ означает операцию свертки по двум индексам, которые предполагают суммирование по ним; $C^{(m)} = \left(C^{(m)} \right)^{-1}$.

Используя работу [2] в рамках метода аналогии, разрешая систему уравнений (1–4), получим следующее уравнение для тензора $\varepsilon^{(tmq)}(x)$, описывающего кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями:

$$\varepsilon^{(tmq)}(x) + \int K^{(tmq)}(x-x') C^{(1tmq)} \varepsilon^{(tmq)}(x') W(x') dx' = \varepsilon^{(0tmq)}, \quad (5)$$

где оператор $K^{(tmq)} = -\text{def } G^{(dmq)} \text{ def}$; $G^{(dmq)}$ – тензорная функция Грина матрицы, соответствующей породному массиву; $\varepsilon^{(0tmq)}$ – непрерывное внешнее поле деформаций, действующее на породный массив; $C^{(1tmq)}$ – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов.

Используя комплексный метод самосогласованного поля [3], а также работу [2] в рамках метода аналогии, получим поле деформаций внутри произвольных неоднородностей, соответствующих горным породам, составляющим породный массив:

$${}^{(nmf)}\varepsilon = \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot {}^{(0tmq)}\varepsilon, \quad (6)$$

где $H = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} K(Ak) dS$; A – тензор, определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства, переводящее эллипсоидальную область, занятую включением, в единичный шар;

$K(k)$ – преобразование Фурье-ядра $K_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l G_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$;

S_1 – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве; $\Phi(x-x')$ – часть среднего по ансамблю полей неоднородностей, связанная с попаданием точек в разные неоднородности; ε – определяется экспериментально посредством выражения:

$${}^{(0tmq)}\varepsilon = C' \cdot \sigma, \quad (7)$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$;

$P = \gamma h$ – вес вышележащей толщи породного массива; γ – средний удельный вес горных пород.

Умножая обе части уравнения (6) на эффективный тензор модулей упругости горной породы C слева, для напряжения внутри любой неоднородности, соответствующей горной породе, получим:

$$\sigma = C \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot {}^{(0tmq)}\varepsilon, \quad (8)$$

где $\sigma = C \cdot \varepsilon$. Эффективный тензор C определяется посредством следующего выражения [1]:

$$C = C + \left\langle \frac{EL_{tmf}}{BV_{tmf}} C \cdot \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \times \left(I - H \cdot \left\langle \frac{EL_{tmf}}{BV_{tmf}} C \cdot \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}.$$

Перейдем к разработке мультифрактальной математической модели минерала с наполненными газом (или жидкостью) включениями относительно упругого поля напряжений.

Сплошная среда со структурой, соответствующая горной породе, описывается следующим интегральным уравнением [1]:

$$\varepsilon(x) + \int K(x-x') C \varepsilon(x') W(x') dx' = \varepsilon,$$

где оператор $K = -def G def$; G – тензорная функция Грина матрицы, соответствующей горной породе; ε – непрерывное внешнее поле деформаций, действующее на горную породу; C – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов.

Используя комплексный метод самосогласованного поля [3], а также работу [2] в рамках метода аналогии, получим поле деформаций внутри произвольных эллипсоидальных неоднородностей, соответствующих минералам с включениями, составляющим горную породу:

$$\varepsilon^{(nmt)} = \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot \varepsilon^{(0tmf)}, \quad (9)$$

где $H = \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} K(Ak) dS$; $\Phi(x-x')$ – часть среднего по ансамблю полей неоднородностей, связанная с попаданием точек в разные неоднородности. Умножая обе части уравнения (9) на эффективный тензор модулей упругости минерала с включениями C слева, для напряжения внутри любой неоднородности (соответствующей минералу с включениями) получим:

$$\sigma^{(nmt)} = C^{(efmt)} \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot \varepsilon^{(0tmf)}, \quad (10)$$

где $\sigma = C \varepsilon$. Эффективный тензор C определяется посредством следующего выражения [1]:

$$C^{(efmt)} = C^{(efms)} + \left\langle \frac{(ELmt)}{(BVmt)} C \cdot \left(I + Z \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \times \left(I - Z \cdot \left\langle \frac{(ELmt)}{(BVmt)} C \cdot \left(I + Z \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}.$$

Учитывая, что $\varepsilon = \varepsilon$ и используя (6), окончательно для поля напряжений внутри неоднородности, соответствующей минералу с включением получим:

$$\sigma^{(nft)} = C^{(efmt)} \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \times \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot \varepsilon^{(0tmq)}. \quad (11)$$

Воспользовавшись аналогичным подходом, получим оставшиеся мультифрактальные математические модели геоматериалов меньшего порядка структурной сложности.

1) Мультифрактальная математическая модель минерала с наполненными газом (или жидкостью) порами относительно упругого поля напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma^{(nms)} = & \langle C^{(nfm)} \left(I + B \cdot C^{(1nfm)} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left(I + B \cdot C^{(1nfm)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \times \\ & \times \left(I + H \cdot C^{(tmf)} \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \times \\ & \times \left(I + H \cdot C^{(tmq)} \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot \varepsilon^{(0tmq)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\sigma^{(nms)}$ – поле напряжений внутри неоднородности, соответствующей минералу с наполненными газом (или жидкостью) порами; $C^{(nfm)}$ – тензор модулей

упругости зерна с порой; $C^{(1nfm)} = C^{(nfm)} - C^{(efmt)}$; $B = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} K(Ak) dS$;

$K(k)$ – преобразование Фурье-ядра $K_{ijkl}(x-x')$; $K = -def G def$;

G – тензорная функция Грина эффективной матрицы, соответствующей минералу с наполненными газом (или жидкостью) включениями.

2) Мультифрактальная математическая модель минерала относительно упругого поля напряжений :

$$\begin{aligned} \sigma^{(nm)} = & \langle C^{(nf)} \left(I + B \cdot C^{(1nf)} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left(I + B \cdot C^{(1nf)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \times \\ & \times \left(I + H \cdot C^{(tmf)} \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \times \\ & \times \left(I + H \cdot C^{(tmq)} \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot \varepsilon^{(0tmq)}. \end{aligned} \quad (13)$$

где $\sigma^{(nm)}$ – поле напряжений внутри минерала; $C^{(nf)}$ – тензор модулей упругости

зерна; $C^{(1nf)} = C^{(nf)} - C^{(efms)}$; $B = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} K(Ak) dS$;

$K(k)$ – преобразование Фурье-ядра $K_{ijkl}(x-x')$;

$K = -def G def$ имеет ядро $K_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l G_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$;

G – тензорная функция Грина матрицы, соответствующей минералу с наполненными газом (или жидкостью) порами.

3) Мультифрактальная математическая модель зерна как природного фрактала относительно упругого поля напряжений:

$$\begin{aligned}
& \sigma = C \left(I + B \cdot C \right)^{-1} \cdot < C \left(I + B \cdot C \right)^{-1} >^{-1} \times \\
& \times < C \left(I + B \cdot C \right)^{-1} > \cdot < \left(I + B \cdot C \right)^{-1} >^{-1} \times \\
& \times \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \times \\
& \times \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot C' \sigma
\end{aligned} \tag{14}$$

где σ – поле напряжений внутри неоднородности, соответствующей зерну.

б) Мультифрактальная математическая модель зерна с порой как природно-го фрактала с микровключением относительно поля давлений:

$$p\delta^{ij} = p_0 I^{ijkl} \left(I^{klmn} + B^{klpq} \cdot \left(p_0 I^{pqmn} - C^{pqmn} \right) \right)^{-1} \cdot \left(C^{mnsd} \right)^{-1} \sigma_{sd} \tag{15}$$

$p\delta^{ij}$ – поле давлений в неоднородности, соответствующей наполненной газом (или жидкостью) поре; p_0 – первоначальное давление в поре.

Полученные результаты, а также работы [4, 5] позволяют представить перколяционный мультифрактальный метод математического моделирования породного массива как объекта управления в виде следующей последовательности действий:

1) Сформировать трехмерную перколяционную решетку, длина, ширина и высота которой, равны соответствующим размерам исследуемого породного массива. При этом объем каждого кубика равен среднему объему зерна из породного массива.

2) Разделить трехмерную решетку на совокупность слоев параллельных одной из трех плоскостей. Каждый слой при этом соответствует двумерной перколяционной решетке.

3) Определить конфигурацию бесконечных кластеров в каждой двумерной решетке, которая приводит к реализации исследуемого явления. Например, при решении задачи внезапных выбросов пород и газа, такой конфигурацией является объединенный бесконечный кластер, состоящий из одного горизонтального и двух вертикальных бесконечных кластеров [4].

4) Посредством компьютерного эксперимента определить комплексный порог перколяции. Этот эксперимент заключается в следующем.

Вначале величине вероятности разрушения P_D присвоить начальное значение 0,01 и все квадраты в двумерных перколяционных решетках установить в состоянии «свободно от трещины» и закрасить в белый цвет. Далее, для каждого квадрата из рассматриваемых решеток с помощью генератора равномерно распределенных случайных чисел сгенерировать случайное число P от 0 до 1. Если полученное значение P окажется меньше вероятности разрушения P_D , то квадрат переходит в состояние «занято трещиной» и закрашивается в черный цвет. В противном случае, квадрат сохраняет свое состояние – «свободно от трещины». Если в каждой двумерной перколяционной решетке не реализова-

лась конфигурация бесконечных кластеров, то повторить компьютерный эксперимент, при этом увеличив значение P_D на 0,01. В противном случае эксперимент завершается, и полученное значение P_D является комплексным порогом перколяции P_C , т.е. $P_C \leftarrow P_D$.

5) Определить текущее значение вероятности разрушения в исследуемой трехмерной перколяционной решетке. Посредством математических моделей (14) и (15) определить: количество состояний q_A , при которых происходит разрушение зерна с порой посредством поля напряжений; количество состояний q_B , при которых происходит разрушение зерна посредством поля давлений. Текущее значение вероятности разрушения P_{RD} в этом случае равно $\frac{q_A + q_B}{w}$, где w – число возможных состояний отдельного зерна с газонаполненной порой в рамках рассматриваемой задачи.

6) Проверить условие – текущее значение вероятности разрушения P_{RD} больше или равно комплексному порогу перколяции P_C . Если да, то исследуемое явление реализуется в породном массиве. В противном случае – явление не проявит себя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халкечев Р.К. Теоретические основы мультифрактального моделирования трудноформализуемых объектов // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Прикладная и промышленная математика. – 2013. – № 9. – С. 8–16.
2. Канаун С.К. О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1977. – № 2. – С. 160–170.
3. Халкечев Р.К. Об одной распространенной ошибке при математическом моделировании трудноформализуемых объектов мультифрактальной структуры. Комплексный метод самосогласованного поля при исследовании мультифрактальных сред // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Прикладная и промышленная математика. – 2013. – № 9. – С. 20–23.
4. Халкечев Р.К. Динамические проявления напряженно-деформированного состояния природных мультифрактальных объектов. Внезапные выбросы горных пород и газа // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Прикладная и промышленная математика. – 2013. – № 9. – С. 23–27.
5. Халкечев Р.К. Динамические проявления напряженно-деформированного состояния природных мультифрактальных объектов. Оползни // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Прикладная и промышленная математика. – 2013. – № 9. – С. 28–32. **ПЛАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Халкечев Руслан Кемалович – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: syrus@list.ru, МГИ НИТУ «МИСиС».

UDC 004.9; 004.41; 51–74; 622

HIERARCHICAL AND SELF-SIMILAR MATHEMATICAL MODELS OF GEOMATERIALS CONCERNING FIELDS OF TENSION AS THE BASIS FOR PERCOLATED MULTIFRACTAL MODELLING OF CONTROL OBJECTS

Khalkhechev R.K., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, e-mail: syrus@list.ru, Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia.

In the presented article multifractal mathematical models of geomaterial of complexity various orders concerning fields of tension are developed. These models are a basis for development of a new method of percolated multifractal modeling. This method lies outside the traditional theory of a percolation. So the percolation threshold in this method is connected with the concrete studied properties (in our case – deformation properties) and physical processes (formation of a field of tension) in the studied objects.

Key words: geomaterial, field of tension, the theory of a percolation, object of management, the automated system.

REFERENCES

1. Khalkechev R.K. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. Special edition. Prikladnaya i promyshlennaya matematika. 2013, no 9, pp. 8–16.
2. Kanaun S.K. *Zhurnal prikladnoy mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki*. 1977, no 2, pp. 160–170.
3. Khalkechev R.K. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. Special edition. Prikladnaya i promyshlennaya matematika. 2013, no 9, pp. 20–23.
4. Khalkechev R.K. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. Special edition. Prikladnaya i promyshlennaya matematika. 2013, no 9, pp. 23–27.
5. Khalkechev R.K. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. Special edition. Prikladnaya i promyshlennaya matematika. 2013, no 9, pp. 28–32.



ОТДЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ ГОРНОГО ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО БЮЛЛЕТЕНЯ (СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК)

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ТУННЕЛЕЙ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИИ КРЕПИ

Нгуен Зуен Фонг – аспирант, e-mail: nguyenduyenphong@gmail.com, МГИ НИТУ «МИСиС».

Рассмотрена количественная сторона зависимости отпора крепи (контактного напряжения на границе крепь-массив) от общего смещения контура выработки. Для выбора оптимальности параметров крепи в свете теории взаимовлияющей деформации представляет интерес только случай образования вокруг выработки одной области пластических деформаций без разрушения, так как при отсутствии этой области массив находится в устойчивом упругом состоянии и крепь применяется только как ограждающая конструкция. Для обоснованного выбора конструктивных и технологических параметров крепи необходима предварительная оценка степени развития механических процессов в конкретной геомеханической обстановке. Предложен критерий для классификации породных обнажений по их состоянию устойчивости, который основан на исследовании положений обобщенной диаграммы равновесных состояний породного массива.

Ключевые слова: строительство туннелей, напряженно-деформированное состояние пород, отделка выработки, смещение контура породных массивов.

ASSESSMENT OF THE IMPACT OF GEOMECHANICAL PROCESSES IN THE CONSTRUCTION OF TUNNELS FOR JUSTIFICATION OF DESIGN PARAMETERS LINING

Nguyen Duyen Phong, Graduate Student,

Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia.

When tunneling initial stress state of the rock mass is broken and in the vicinity of the educated generation is the process of redistribution of stresses, which in turn can lead to the formation of the zone of plastic deformation. Values rock displacement loop tunnels which depends on the dimensions of the tunnels themselves and the development of plastic deformation zone can vary from several to tens of centimeters. Let us now consider the quantitative side, depending rebuff bolting (contact stress at the interface crepearay) of the total bias circuit output. To select parameters optimatsii lining in the light of the theory of interdependent deformation is of interest only to the case of education around the development of one area of plastic deformation without breaking, as in the absence of this mass is in a stable condition and elastic lining is used only as a cladding. In order to make informed choices of design and technological parameters of lining to preassess the extent of mechanical processes in concrete geomechanical situation. The criterion for classification of rock outcrops by their state of stability, which is based on a study of the provisions of the generalized diagram of the equilibrium state of a rock mass.

Key words: tunnel construction, stress strain state of rocks lining tunnel.