УДК 004.9; 004.41; 51-74; 622

*Р.К. Халкечев*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

*Разработаны теоретические основы и методы математического моделирования, позволяющие определить деформационные свойства и поле напряжений в геоматериалах различного порядка структурной сложности. Полученные значения эффективного тензора модулей упругости и тензора напряжений являются результатами функциональных задач автоматизированной системы научных исследований физических процессов горного производства.*

*Ключевые слова: функциональная задача, автоматизированная система, научное исследование, мультифрактальное моделирование, геоматериал.*

Основными функциональными задачами автоматизированной системы научных исследований физических процессов горного производства являются: 1) установление деформационных свойств геоматериалов различных порядков структурной сложности; 2) определение напряженного состояния геоматериалов.

Рассмотрим математические методы и модели первой функциональной задачи. В работе [1] предложен мультифрактальный метод математического моделирования, заключающийся в построении для исследуемого объекта мультифрактальной модели, представляющей собой совокупность связанных между собой математических моделей фрактальных сред. При этом каждая из данных сред описывает фрактальные объекты, входящие в состав изучаемого объекта мультифрактальной структуры.

Анализ работ [2–4] показывает, что в основу разработанных мультифрактальных математический моделей геоматериалов различных порядков сложности относительно деформационных свойств лежит одна из двух математических моделей фрактальных сред.

Разработаем первую из них – математическую модель однокомпонентной фрактальной среды относительно деформационных свойств. В зависимости от входных данных рассматриваемая среда будет соответствовать одному из следующих типов геоматериалов – минералу, мономинеральной горной породе или породному массиву.

Итак, рассмотрим однокомпонентную фрактальную среду, представляющую собой трехмерную неограниченную анизотропную упругую сплошную среду со случайно-ориентированными в пространстве неоднородностями в эллипсоидальных областях $V$, которые соответствуют природным фракталам. Обозначим через $\overset{(ok)}{C}$ тензор модулей упругости эллипсоида, который является случайной величиной. Здесь и далее, буквенно-числовое сочетание, заключенное в скобки над тензорной величиной, является пометой, а не индексом, и указывает на семантическое значение данной величины.

Поместим в матрицу, с упругими свойствами равными усредненным значениям $<\overset{(ok)}{C}>$, указанные эллипсоидальные неоднородности и тем самым получим модель сплошной среды со структурой. Тогда полученную среду с неоднородностями будем характеризовать тензором модулей упругости

$$\overset{(ok)}{C}(x) = <\overset{(ok)}{C}> + \overset{(1ok)}{C} V(x),$$

где $x(x_1, x_2, x_3)$ – точка среды; $V(x)$ – характеристическая функция области $V$, т.е. $V(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in V \\ 0 \text{ при } x \notin V \end{cases}$

(поскольку неоднородности вплотную прилегают к друг другу, то $V(x) = 1$);

$\overset{(1ok)}{C} = \overset{(ok)}{C} - <\overset{(ok)}{C}>$ – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате $\overset{(ok)}{C}(x)$ является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидов. Обозначим через тензор $\overset{(0ok)}{\varepsilon}(x)$ непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при $\overset{(1ok)}{C} = 0$ в матрице при заданных внешних силах. А через тензор $\overset{(ok)}{\varepsilon}(x)$ – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Рассматриваемая среда описывается следующими системами уравнений, понимаемых в смысле обобщенных функций:

1) уравнения равновесия:

$$\partial_j[\overset{(ok)}{C}{}^{ijkl}(x)\partial_k \overset{(ok)}{u}_l(x)] = -f^i(x), \quad \overset{(ok)}{u}_l(x) \to \overset{(0ok)}{u}_l(x), \text{ при } x \to \infty, \tag{1}$$

где $\partial_{(k}\overset{(ok)}{u}_{l)}(x) = \overset{(0ok)}{\varepsilon}_{kl}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{(ok)}{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \overset{(ok)}{u}_l}{\partial x_k}\right)$, $f^i(x)$, – внешние силы, которые в силу непрерывности $\overset{(0ok)}{\varepsilon}_{kl}(x)$ не содержат сингулярностей типа простого и двойного слоев;

2) кинематические уравнения:

$$\overset{(ok)}{\varepsilon}_{ij}(\overset{(ok)}{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{(ok)}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{(ok)}{u}_j}{\partial x_i}\right); \tag{2}$$

3) определяющие уравнения:

$$\overset{(ok)}{\sigma}_{ij} = \overset{(ok)}{C}{}^{ijkl}\overset{(ok)}{\varepsilon}_{kl}\,. \tag{3}$$

Отсутствие простых слоев в уравнении (1) является причиной непрерывности нормальной составляющей напряжений $\overset{(ok)}{\sigma}_{ij}(x) = \overset{(ok)}{C}{}^{ijkl}(x)\overset{(ok)}{\varepsilon}_{kl}(x)$ на границе $S$

области $V$. Поскольку уравнения записаны в аффинной инвариантной форме, то без ограничения общности можно считать, что $S$ – единичная сфера, т.е. $x_i \cdot x^i = 1$.

Используя работу [5] в рамках метода аналогии, сведем систему (1) к следующему интегральному уравнению:

$$\overset{(1ok)}{\varepsilon}_{ij} + \int_V \overset{(0ok)}{K}_{ijkl}(x-x')\overset{(1ok)}{C}_{klmn}\overset{(1ok)}{\varepsilon}_{mn}(x')dx' = -\int_V \overset{(0ok)}{K}_{ijkl}(x-x')\overset{(1ok)}{C}_{klmn}\overset{(0ok)}{\varepsilon}_{mn}(x')dx', \quad (4)$$

где $\overset{(0ok)}{K}_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i\partial_l \overset{(0ok)}{G}_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$, $\overset{(0ok)}{G} = \left(-\nabla < \overset{(ok)}{C} > \nabla\right)^{-1}$ – тензорная функция Грина матрицы, $\nabla$ – градиент по $x$.

Применяя метод аналогии с исследованиями из работы [5] получим решение уравнения (4) для поля деформаций внутри изолированного включения $\overset{(iok)}{\varepsilon}$ в области $V$, наведенного постоянным внешним полем деформаций $\overset{(0ok)}{\varepsilon}$:

$$\overset{(iok)}{\varepsilon} = \left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1} \cdot \overset{(0ok)}{\varepsilon}, \quad (5)$$

где $I$ – единичный четырехвалентный тензор; $\overset{(ok)}{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{4\pi}\int_{S_1} \overset{(0ok)}{K}(Ak)dS$; $A$ – тензор, определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства; $\overset{(0ok)}{K}(k)$ – преобразование Фурье-ядра $\overset{(0ok)}{K}_{ijkl}(x-x')$; $S_1$ – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Для учета взаимодействия неоднородностей и влияния его на поле деформаций внутри включения воспользуемся комплексным методом самосогласованного поля [6], который применительно к рассматриваемой задаче, может быть сформулирован следующим образом: 1) каждое из включений любой конкретной реализации случайного поля неоднородностей рассматривается как изолированное эллипсоидальное включение в матрице; 2) поле деформаций $\overset{(Eok)}{\varepsilon}$, в котором находится каждое из включений, складывается из собственного поля $\overset{(Cok)}{\varepsilon}$ как изолированной неоднородности, внешнего поля $\overset{(0ok)}{\varepsilon}$ и поля наведенного окружающими неоднородностями $\overset{(Nok)}{\varepsilon}$. Поскольку необходимо задаться некоторой аппроксимацией поля $\overset{(Eok)}{\varepsilon}$, то будем считать, что оно постоянно.

В рамках данного метода получим следующее выражение для подсчета эффективного тензора модулей упругости $\overset{(efok)}{C}$ однокомпонентной фрактальной среды:

$$\overset{(efok)}{C} = < \overset{(ok)}{C}\left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1} > \cdot < \left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1} >^{-1}. \quad (6)$$

Перейдем ко второй математической модели, описывающей двухкомпонентную фрактальную среду. Она представляет собой трехмерную сплошную среду, деформационные свойства которой определяются в результате математического моделирования вложенной фрактальной среды, со случайным полем эллипсоидальных неоднородностей, разнесенных в пространстве.

Используя работу [5] в рамках метода аналогии, получим следующее уравнение для кусочно-непрерывного поля деформаций $\overset{(dk)}{\varepsilon}(x)$ в двухкомпонентной фрактальной среде:

$$\overset{(dk)}{\varepsilon}(x)+\int \overset{(dk)}{K}(x-x')\overset{(1dk)}{C}\overset{(dk)}{\varepsilon}(x')W(x')dx' = \overset{(0dk)}{\varepsilon}, \qquad (7)$$

где $\overset{(1dk)}{C} = \overset{(el)}{C} - \overset{(ef)}{C}$; $\overset{(el)}{C}$ – тензор модулей упругости эллипсоидальной неоднородности; $\overset{(ef)}{C}$ – деформационные свойства матрицы; $W(x)$ – характеристическая функция области $V$, т.е.

$W(x)=\begin{cases}1 \; при \; x \in V \\ 0 \; при \; x \notin V\end{cases}$; оператор $\overset{(dk)}{K} = -def\,\overset{(m)}{G}\,def$; $\overset{(m)}{G}$ – тензорная функция Грина матрицы; $def$ – оператор, соответствующий симметризованному градиенту; $\overset{(0dk)}{\varepsilon}(x)$ – непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при $\overset{(1dk)}{C} = 0$ в матрице при заданных внешних силах.

Из (7) для поля деформаций $\overset{(dk)}{\varepsilon}$ внутри эллипсоидальной неоднородности получим уравнение:

$$W(x)\overset{(dk)}{\varepsilon}(x)+\int \overset{(dk)}{K}(x-x')\overset{(1dk)}{C}\overset{(dk)}{\varepsilon}(x')W(x')W(x)dx' = W(x)\overset{(0dk)}{\varepsilon}. \qquad (8)$$

С другой стороны поле деформаций внутри любого включения в рамках комплексного метода самосогласованного поля имеет следующий вид:

$$\overset{(dk)}{\varepsilon} = \left(\mathrm{I} + \overset{(dk)}{H}\cdot\overset{(1dk)}{C}\right)^{-1}\cdot\overset{(Edk)}{\varepsilon}, \qquad (9)$$

где $\overset{(dk)}{H} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\overset{(dk)}{K}(Ak)dS$; $\overset{(dk)}{K}(k)$ – преобразование Фурье-ядра $\overset{(dk)}{K}_{ijkl}(x-x')$;

$\overset{(Edk)}{\varepsilon} = \overset{(0dk)}{\varepsilon} + \overset{(dk)}{\widehat{\varepsilon}}$; $\overset{(dk)}{\widehat{\varepsilon}} = \overset{(0dk)}{\varepsilon} + \overset{(Ndk)}{\varepsilon}$; $\overset{(Ndk)}{\varepsilon}$ – поле, наведенное другими неоднородностями.

Решая совместно (8) и (9), окончательно для эффективного тензора модулей упругости двухкомпонентной фрактальной среды $\overset{(efdk)}{C}$ получим:

$$\overset{(efdk)}{C} = \overset{(ef)}{C} + < \frac{\overset{(ELdk)}{V}}{\underset{(BVdk)}{V}} \overset{(1dk)}{C} \left( \mathrm{I} + \overset{(dk)}{H} \cdot \overset{(1dk)}{C} \right)^{-1} > \times$$

$$\times \left( I - \overset{(0dk)}{H} \cdot < \frac{\overset{(ELdk)}{V}}{\underset{(BVdk)}{V}} \overset{(1dk)}{C} \left( \mathrm{I} + \overset{(dk)}{H} \cdot \overset{(1dk)}{C} \right)^{-1} > \right)^{-1}, \qquad (10)$$

где $\overset{(dk)}{H} = \overset{(0dk)}{H} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1} \overset{(dk)}{K} (Ak) dS$, при $A = 1$; $\overset{(ELdk)}{V}$ и $\overset{(BVdk)}{V}$ – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в двухкомпонентной фрактальной среде.

Перейдем ко второй функциональной задаче – определению полей напряжений в геоматериалах различных порядков сложности.

Анализ работы [1] показывает, что в основу разработанных мультифрактальных математический моделей природных мультифракталов различных порядков сложности (геоматериалы являются одними из представителей таких объектов) относительно полей напряжений лежит одна из двух математических моделей.

Разработаем первую из них – математическую модель однокомпонентной фрактальной среды относительно полей напряжений. Обобщая работы [2–4], а также используя комплексный метод самосогласованного поля [6], получим следующее выражение для тензора деформаций внутри неоднородности:

$$\overset{(ok)}{\varepsilon} = \left( \mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C} \right)^{-1} \cdot \overset{(Eok)}{\varepsilon}, \qquad (11)$$

где $\overset{(Eok)}{\varepsilon} = \overset{(0ok)}{\varepsilon} + \overset{(ok)}{\widehat{\varepsilon}}$ – эффективное поле деформаций; $\overset{(ok)}{\widehat{\varepsilon}} = \overset{(0ok)}{\varepsilon} + \overset{(Nok)}{\varepsilon}$; $\overset{(Nok)}{\varepsilon}$ – поле, наведенное другими неоднородностями.

Умножая правую и левую части уравнения (11) на $\overset{(ok)}{C}$ слева, в рамках комплексного метода самосогласованного поля для поля напряжений внутри любого включения имеем:

$$\overset{(ok)}{\sigma} = \overset{(ok)}{C} \left( \mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C} \right)^{-1} \cdot \overset{(Eok)}{\varepsilon}, \qquad (12)$$

где $\overset{(ok)}{\sigma} = \overset{(ok)}{C} \overset{(ok)}{\varepsilon}$.

Усредним (11) и (12) по ансамблю полей реализаций случайного поля неоднородностей. В результате получим:

$$< \overset{(ok)}{\varepsilon} > = < \left( \mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C} \right)^{-1} > \cdot \overset{(Eok)}{\varepsilon}, \qquad (13)$$

$$< \overset{(ok)}{\sigma} > = < \overset{(ok)}{C} \left( \mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C} \right)^{-1} > \cdot \overset{(Eok)}{\varepsilon}, \qquad (14)$$

где $\overset{(Eok)}{\varepsilon} = < \overset{(Eok)}{\varepsilon} >$.

Разрешим уравнение (13) относительно величины :

$$\overset{(Eok)}{\varepsilon} = <\left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1}>^{-1} \cdot <\overset{(ok)}{\varepsilon}> . \qquad (15)$$

Полученное выражение (15) подставим в (14):

$$<\overset{(ok)}{\sigma}> = <\overset{(ok)}{C}\left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1}> \cdot <\left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1}>^{-1} \cdot <\overset{(ok)}{\varepsilon}> . \qquad (16)$$

Но усредняя деформации, испытываемые отдельными неоднородностями по ансамблю полей фрактальных неоднородностей, получим внешнее поле деформаций, в котором находится вся однокомпонентная фрактальная среда в целом, т.е. $<\overset{(ok)}{\varepsilon}> = \overset{(0ok)}{\varepsilon}$ . С учетом этого выражение (16) следует преобразовать к следующему виду:

$$<\overset{(ok)}{\sigma}> = <\overset{(ok)}{C}\left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1}> \cdot <\left(\mathrm{I} + \overset{(ok)}{\mathrm{B}} \cdot \overset{(1ok)}{C}\right)^{-1}>^{-1} \cdot \overset{(0ok)}{\varepsilon} . \qquad (17)$$

Разработаем математическую модель двухкомпонентной фрактальной среды относительно полей напряжений.

Применяя комплексный метод самосогласованного поля [6] и работу [7] в рамках метода аналогии, получим поле деформаций внутри произвольных неоднородностей, разнесенных в пространстве:

$$\overset{(dk)}{\varepsilon} = \left(\mathrm{I} + \overset{(dk)}{H} \times \overset{(1dk)}{C}\right)^{-1} \times \left[\mathrm{I} + \frac{1}{n}\int \overset{(dk)}{K}(\mathrm{x} - \mathrm{x}') \times \overset{(dk)}{\Phi}(\mathrm{x} - \mathrm{x}')d\mathrm{x}'\right]^{-1} \times \overset{(0dk)}{\varepsilon} , \qquad (18)$$

где $\overset{(dk)}{\Phi}(\mathrm{x} - \mathrm{x}')$ – часть среднего по ансамблю полей неоднородностей, связанная с попаданием точек в разные неоднородности.

Умножая обе части уравнения (18) на тензор модулей упругости неоднородности $\overset{(dk)}{C}$ слева, для напряжения внутри любой неоднородности, окончательно получим:

$$\overset{(dk)}{\sigma} = \overset{(dk)}{C}\left(\mathrm{I} + \overset{(dk)}{H} \cdot \overset{(1dk)}{C}\right)^{-1} \cdot \left[\mathrm{I} + \frac{1}{n}\int \overset{(dk)}{K}(\mathrm{x} - \mathrm{x}') \cdot \overset{(dk)}{\Phi}(\mathrm{x} - \mathrm{x}')d\mathrm{x}'\right]^{-1} \cdot \overset{(0dk)}{\varepsilon} , \qquad (19)$$

где $\overset{(dk)}{\sigma} = \overset{(dk)}{C}\overset{(dk)}{\varepsilon}$ .

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. *Халкечев Р.К.* Теоретические основы мультифрактального моделирования труднoформализуемых объектов // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск) Прикладная и промышленная математика. – 2013. – № 9. – С. 8–16.

2. *Халкечев Р.К.* Математическая модель эффективных упругих свойств газосодержащих породных массивов мультифрактальной структуры // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Методы математического моделирования в горной промышленности. – 2011. – № 12. – С. 7–12.

3. *Халкечев Р.К.* Разработка метода усреднения упругих свойств геоматериалов на основе теории мультифрактального моделирования // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2012. – № 3. – С. 17–21.
4. *Халкечев Р.К.* Мультифрактальная модель с масштабом неоднородности эффективных упругих свойств газосодержащих породных массивов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2012. – № 3. – С. 68–70.
5. *Кунин И.А., Соснина Э.Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Доклады АН СССР. – 1971. – Т. 199. – № 3. – С. 127–129.
6. *Халкечев Р.К.* Об одной распространенной ошибке при математическом моделировании трудноформализуемых объектов мультифрактальной структуры. Комплексный метод самосогласованного поля при исследовании мультифрактальных сред // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Прикладная и промышленная математика. – 2013. – № 9. – С. 20–23.
7. *Канаун С.К.* О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1977. – № 2. – С. 160–170. ГИАБ

## КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

*Халкечев Руслан Кемалович* – кандидат физико-математических наук,
доцент, e-mail: syrus@list.ru,
МГИ НИТУ «МИСиС».

UDC 004.9; 004.41; 51-74; 622

## THEORETICAL PRINCIPALS OF MULTIFRACTAL MODELLING OF FUNCTIONAL PROBLEMS OF THE AUTOMATED SYSTEM OF MINING PHYSICAL PROCESSES SCIENTIFIC RESEARCHES

*Khalkechev R.K.*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
e-mail: syrus@list.ru,
Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS»,
119049, Moscow, Russia.

*In this article the theoretical bases and methods of mathematical modeling allowing to define deformation properties and a field of tension in geomaterials of various order of structural complexity are developed. The received values of an effective tensor of modules of elasticity and tensor of tension are results of functional problems of the automated system of scientific researches of physical processes of mining.*

*Key words: functional task, the automated system, scientific research, multifractal modeling, geomaterial.*

**REFERENCES**

1. Khalkechev R.K. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. Special edition. Prikladnaya i promyshlennaya matematika. 2013, no 9, pp. 8–16.
2. Khalkechev R.K. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. Special edition. Metody matematicheskogo modelirovaniya v gornoy promyshlennosti. 2011, no 12, pp. 7–12.
3. Khalkechev R.K. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*. 2012, no 3, pp. 17–21.
4. Khalkechev R.K. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki*. 2012, no 3, pp. 68–70.
5. Kunin I.A., Sosnina E.G. *Doklady AN SSSR*. 1971, vol. 199, no 3, pp. 127–129.
6. Khalkechev R.K. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. Special edition. Prikladnaya i promyshlennaya matematika. 2013, no 9, pp. 20–23.
7. Kanaun S.K. *Zhurnal prikladnoy mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki*. 1977, no 2, pp. 160–170.