

М.М. Алиев, Н.Г. Каримова, С.Р. Гилязова

НЕЛИНЕЙНЫЙ ВАРИАНТ КРИТЕРИЯ КУЛОНА-МОРА

Рассмотрен критерий прочности Баландина и Парчевского-Шашенко. Результаты приведенных в статье теоретических исследований позволили получить вид соотношения критерия прочности Парчевского-Шашенко, который является паспортом прочности. Выполнено построение паспортов прочности для глинистого сланца по критериям Баландина и Парчевского-Шашенко в системе τ - σ , из которого следует, что паспорт прочности, построенный по критерию Парчевского-Шашенко, удовлетворительно совпадает с данными экспериментов. Для сравнения также рассмотрен параболический паспорт прочности Г.Н. Кузнецова.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, паспорт прочности горных пород, теория Мора, критерий прочности.

При решении различных задач геомеханики, связанных с напряженно-деформированными состояниями подземных сооружений, в качестве паспорта прочности в основном принимается теория Мора, отличающаяся своей простотой и наглядностью.

Имея несомненные достоинства, теория Мора имеет серьезные недостатки. Один из них – не учет влияние промежуточного главного напряжения, т.е. не учет вида напряженного состояния.

В общем случае огибающая нигде не пересекает ни одну из предельных окружностей, поэтому если она прямолинейная, в виде касательной к окружностям одноосного растяжения и одноосного сжатия получается так, что с уменьшением σ_p (при постоянном σ_c) сопротивление породы сжимающим напряжениям увеличивается.

Однако, эксперименты показывают, что реальный паспорт прочности для большинства горных пород имеет нелинейную форму [1], а при больших всесторонних давлениях приближается к прямой, параллельной к горизонтальной оси.

Предполагая, что прочность материала зависит от разности и суммы наибольшего и наименьшего главных напряжений, П.Я. Парчевский и А.Н. Шашенко [2] получили следующие выражение:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + b_1 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) = c_1. \quad (1)$$

При выводе (1), которое в дальнейшем назывался критерием прочности, была использована следующая зависимость, объединяющая интенсивность напряжений σ_i и компоненты шарового тензора в виде [3]

$$\sigma_i^2 + aJ_1^2 + bJ_1 = c. \quad (2)$$

Отметим, что в при $a = 0$ (2) известен как критерий прочности Баландина. Предельное условие прочности по теории Мора можно выразить в виде зависимости $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ от $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$, то есть выражение (1) является уравнением

геометрического места вершин главных кругов Мора, которое не совпадает с предельной огибающей.

После определения постоянных, входящих в (1), из простых испытаний получим (сжимающие напряжения положительны)

$$\begin{cases} \frac{\sigma_p^2}{4} - B_1 \frac{\sigma_p}{2} = c_1; \\ \frac{\sigma_c^2}{4} + B_1 \frac{\sigma_c}{2} = c_1. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } B_1 = -\frac{\sigma_c - \sigma_p}{2}; \quad c_1 = \frac{1}{4} \sigma_c \sigma_p.$$

Окончательно критерий Парчевского-Шашенко приобретает следующий вид

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_p \sigma_c. \quad (3)$$

Внешняя простота и схожесть с широко распространенным критерием Баландина привел к тому, что критерий (3) является наиболее подходящим для практического использования и играл, как отмечено в [4], заметную роль в учебном процессе горных вузов.

Исследование (3) Г.Г. Литвинским [4] привело к выводам, что критерий не отвечает условию описания сыпучей среды и идеально связанного тела, подменяя их выраженными уравнениями идеальной пластичности или чистого сдвига и закона Паскаля, которое не являются предельными огибающими.

Чтобы придти к таким выводам Г.Г. Литвинский [4] в (3) поставил $\sigma_p = 0$. При этом полученное уравнение

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_c (\sigma_1 + \sigma_3) = 0, \quad (4)$$

как утверждается в [4] имеет два решения

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c.$$

Отметим, что последние уравнения могут быть решениями исходного уравнения типа:

$$\sigma_1^2 - \sigma_3^2 - \sigma_c (\sigma_1 + \sigma_3) = 0, \quad (5)$$

что не равносильно (4).

Критерий Баландина после определения прочностных характеристик испытанием образцов материала на одноосное растяжение и одноосное сжатие имеет вид:

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - (\sigma_c - \sigma_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_p. \quad (6)$$

Сравнение показывает, что из (6) первое слагаемое (3) получится, если принять $\sigma_2 = \sigma_3$. При этом во второй слагаемой вместо полученного $\sigma_1 + 2\sigma_3$ следует взять $\sigma_1 + \sigma_3$. Без этого упрощения при $\sigma_2 = \sigma_3$ взамен (3) из (6) получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_c - \sigma_p) \cdot (\sigma_1 + 2 \cdot \sigma_3) = \sigma_c \cdot \sigma_p. \quad (7)$$

Отметим, что в условиях плоской деформации, следуя ассоциированному закону течения и принимая критерий Баландина как условие текучести в [5] получено

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 2 \cdot (\sigma_c - \sigma_p) \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_c + \sigma_p)^2. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда и на площадях скольжения связаны нелинейной зависимостью в виде

$$\tau_n^2 = \sigma_n C + D, \quad (9)$$

где

$$\tau_n = 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi;$$

$$\sigma_n = \sigma + 0,5(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\psi + \tau_{xy} \sin 2\psi; \quad \sigma = 0,5(\sigma_x + \sigma_y);$$

C и D – постоянные, показатели прочности материала.

В отличие от линейной зависимости Кулона-Мора в данном случае касательная к предельным кругам будет представлять собой некоторую кривую, а направление площадок сдвига будет зависеть от величины действующих напряжений, т.е. будет меняться по мере изменения отношений между главными нормальными напряжениями.

Пусть в некоторой точке рассматриваемого тела имеет место предельное напряженное состояние, приводящее скольжение одной части тела относительно другой. Направление площадок скольжения определяется из условия

$$\frac{d}{d\psi} [\tau_n^2 - \sigma_n C - D] = 0. \quad (10)$$

Реализуя дифференцирование, из (10) получим

$$2\tau_n \tau_{n,\psi} - C\sigma_{n,\psi} = 0, \quad (11)$$

где $\tau_{n,\psi}$ и $\sigma_{n,\psi}$ – производные по углу ψ .

Обозначим $\tau_n = T_1$; $\sigma_n = \sigma + T_2$.

Тогда входящие в (11) параметры будут иметь вид

$$\tau_{n,\psi} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\psi + 2\tau_{xy} \sin 2\psi = 2T_2;$$

$$\sigma_{n,\psi} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\psi - 2\tau_{xy} \cos 2\psi = 2T_1.$$

Подставляя T_1 и T_2 в (9) и (11), получим

$$T_1^2 - (\sigma + T_2)C - D = 0. \quad (12)$$

$$4T_1T_2 + 2T_1C = 0. \quad (13)$$

Для случая $T_1 \neq 0$ из (13) получим $T_2 = -\frac{C}{2}$.

При этом (12) приводится к виду

$$T_1^2 - \left(\sigma - \frac{C}{2}\right)C - D = 0,$$

$$\text{или } T_1^2 = \sigma C - \frac{C^2}{2} + D.$$

Если учесть, что $T_1^2 + T_2^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$, то получим критерий прочности

горной породы в компонентах напряжения в виде

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = \sigma C - \frac{C^2}{4} + D,$$

или в главных напряжениях

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \sigma C - \frac{C^2}{4} + D. \quad (14)$$

Общий вид (14) идентичен с (1), то есть является критерием прочности Парчевского-Шашенко.

Определим прочностные характеристики C и D . При одноосном растяжении $\sigma_3 = -\sigma_p$

$$\frac{\sigma_p^2}{4} = -\frac{\sigma_p}{2}C - \frac{C^2}{4} + D. \quad (15)$$

При одноосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_c$

$$\frac{\sigma_c^2}{4} = \frac{\sigma_c}{2}C - \frac{C^2}{4} + D. \quad (16)$$

Решая совместно (15) и (16) будем иметь

$$C = \frac{\sigma_c - \sigma_p}{2}; \quad D = \frac{(\sigma_c + \sigma_p)^2}{16}.$$

Так как постоянные C и D получены для случая $\tau_n = T_1 \neq 0$, то в координатной системе τ - σ зависимость (9) представляющая собой вариант паспорта прочности горной породы имеет вид

$$\tau_n^2 = \frac{1}{2}(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_n + \left(\frac{\sigma_c + \sigma_p}{4}\right)^2. \quad (17)$$

Таким образом, результаты приведенных теоретических исследований показывают, что критерий прочности Парчевского-Шашенко является паспортом прочности в виде соотношения (17).

Принимая критерий (3) как условие текучести горной породы и применяя метод характеристик можно получить паспорт прочности в виде зависимости $\tau_n = f(\sigma_n)$. Последовательность вывода этой зависимости, исходя из критерия Баландина, приведена в [5].

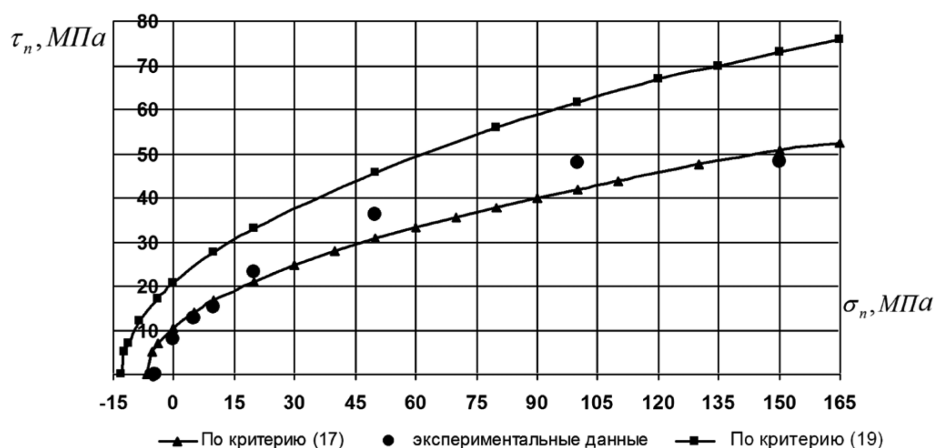
Отбрасывая промежуточные выкладки окончательную форму зависимости $\tau_n = f(\sigma_n)$, исходя из (3), получим в следующем виде

$$\tau_n^2 = 0,5(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_n + 0,25\sigma_c\sigma_p. \quad (18)$$

Отметим, что при выводе (18) ограничение в виде $\tau_n = T_1 \neq 0$ не принято, а постоянная интегрирования найдена из следующего начального условия: при $\tau_n = 0$, $\sigma_n = \text{const}$.

Для сравнения отметим, что критерий Баландина в условиях плоской деформации имеет следующее уравнение огибающей [5]

$$\tau_n = \sqrt{(\sigma_c - \sigma_p) \left(\sigma_n + \frac{\sigma_c - \sigma_p}{4} + \frac{(\sigma_c + \sigma_p)^2}{12(\sigma_c - \sigma_p)} \right)}. \quad (19)$$



Построение паспортов прочности для глинистого сланца

Проведем сравнительный анализ (17), (18) и (19) с экспериментальными данными, полученными в установке Кармана, для глинистого сланца из кровли пласта шахты им. И.В. Чеснокова [6], для которого $\sigma_c = 37,8$ МПа; $\sigma_p = 4,72$ МПа. Для этого в координатной системе τ – σ построим предельные кривые.

Из рисунка следует, что при увеличении нормальных напряжений значения касательных напряжений по критерию (19) существенно возрастают, что не соответствует опытным данным. Паспорт прочности, построенный по (17) удовлетворительно совпадает с данными экспериментов и при больших значениях σ_n приводят к одинаковым результатам для τ_n . В областях растягивающих напряжений результаты по (17)–(19) расходятся. Это, по-видимому, объясняется величиной постоянных, входящих в (17)–(19), которые определены по разным начальным условиям.

Проведем сравнительный анализ результатов, полученных по (17), (18) и по теории Г.Н. Кузнецова [7]. Результаты расчетов, полученные при $\sigma_p = 4,96$ МПа и $\sigma_c = 26,42$ МПа, приведены в таблице.

Из таблицы видно, что результаты, полученные по теории Г.Н. Кузнецова и по (17), с практической точки зрения имеют удовлетворительное совпадение.

σ_n	τ_n по теории Кузнецова	τ_{n1} по (17)	τ_{n2} по (18)
0	7,52	7,85	5,72
5	10,65	10,73	9,3
10	13,05	13,0	11,83
15	15,08	14,91	13,92
20	16,86	16,62	15,73
25	18,47	18,16	17,35
30	19,96	19,58	18,83
150	42,0	40,87	40,52
	при $\tau_n = 0$	при $\tau_{n1} = 0$	при $\tau_{n2} = 0$
	$\sigma_n = 4,96$	$\sigma_n = 5,74$	$\sigma_n = 3,05$

1. Алиев М.М., Каримова Н.Г., Шафиева С.В. Новый подход к разработке полиномиальных критериев прочности для изотропных полимеров и горных пород // Известия вузов. Нефть и газ. – 2009. – № 3. – С. 77–82.
2. Парчевский Л.Я., Шашенко А.И. О размерах области пластических деформаций вокруг выработок // Известия вузов. Горный журнал. – 1988. – № 3. – С. 39–42.
3. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наукова думка. – 1976. – 416 с.
4. Литвинский Г.Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов: Монография. – Донецк: Норд-Пресс, 2008. – 207 с.
5. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974.
6. Алексеенко С.Ф., Беём Л.Е. Гиперболическая аппроксимация паспорта прочности горных пород / Материалы международной научно-практической конференции «Экологические и социальные проблемы Донбасса и окружающих регионов», посвященной 100-летию со дня рождения доктора наук, профессора Ятских В.Г. – Стаханов: РИО МАБИН, 2005. – 100 с.
7. Кузнецов Г.Н. Механические свойства горных пород. Задачи и методы их изучения в связи с вопросами управления горным давлением. – М.: Углетехиздат, 1947. – 176 с. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Алиев М.М. – доктор технических наук, профессор, декан, e-mail: mmaliev@rambler.ru,
 Каримова Н.Г. – кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой, e-mail: karimovang@mail.ru,
 Гилязова С.Р. – старший преподаватель, e-mail: gil.svet2011@yandex.ru,
 Альметьевский государственный нефтяной институт.

UDC 539.376

NONLINEAR MOHR-COULOMB CRITERION

Aliev M.M.¹, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean, e-mail: mmaliev@rambler.ru,
 Karimova N.G.¹, Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, Head of Chair,
 e-mail: karimovang@mail.ru,
 Gilyazova S.R.¹, Senior Lecturer, e-mail: gil.svet2011@yandex.ru,
 Almet'yevsk State Oil Institute, 423450, Republic of Tatarstan, Russia.

The article discusses the strength criterion Balandin and Parchevsky-Shashenko. The results are shown in the article theoretical studies allowed us to obtain a view of the ratio of the strength criterion Parchevsky-Shashenko, which is the passport strength. Done building strength passports for shale criteria Balandin and Parchevsky-Shashenko in the system τ – σ , from which it follows that the passport strength, built on the criterion Parchevsky-Shashenko satisfactorily coincides with experimental data. For comparison also considered parabolic passport strength G.N. Kuznetsova.

Key words: stress-strain state, passport strength of rocks, theory of Mora, the strength criterion.

REFERENCES

1. Aliev M.M., Karimova N.G., Shafieva S.V. *Izvestiya vuzov. Neft' i gaz*. 2009, no 3, pp. 77–82.
2. Parchevskii L.Ya., Shashenko A.I. *Izvestiya vuzov. Gornyi zhurnal*. 1988, no 3, pp. 39–42.
3. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. *Deformirovaniye i prochnost' materialov pri slozhnom napryazhenom sostoyanii* (Deformation and strength of materials in triaxial stress state), Kiev, Naukova dumka, 1976, 416 p.
4. Litvinskii G.G. *Analiticheskaya teoriya prochnosti gornykh porod i massivov: Monografiya* (Analytical theory of strength of rocks and rock masses. Monograph), Donetsk, Nord-Press, 2008, 207 p.
5. Geniev G.A., Kisyuk V.N., Tyupin G.A. *Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona* (Plastic theory of concrete and reinforced concrete), Moscow, Stroizdat, 1974.
6. Alekseenko S.F., Beem L.E. *Materialy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Ekologicheskie i sotsial'nye problemy Donbassa i okruzhayushchikh regionov», posvyashchennoi 100-letiyu so dnya rozhdeniya doktora nauk, professora Yatskikh V.G* (Proceedings of International Conference on Ecological and Social Issues in Donbass and Neighborhood devoted to the 100th anniversary of Dr Eng, Prof Yatskikh V.G.), Stakhanov, RIO MABIN, 2005, 100 p.
7. Kuznetsov G.N. *Mekhanicheskie svoystva gornykh porod. Zadachi i metody ikh izucheniya v svyazi s voprosami upravleniya gornym davleniem* (Mechanical properties rocks. Problems and methods of analysis in the context of ground control), Moscow, Ugletekhnizdat, 1947, 176 p.