

С.В. Шерстов

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН ВО ВНЕШНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрены гармонические колебания и распространение гармонических волн во внешности круглого цилиндра (бесконечной цилиндрической полости) заполненной упругим трансверсально-изотропным материалом, а также кристаллическим материалом, имеющим гексагональную симметрию 6mm. Ось симметрии высшего порядка направлена вдоль оси цилиндра. Динамический процесс в твердых анизотропных телах в пределах малых упругих деформаций описывается системой дифференциальных уравнений в перемещениях. Ввиду симметрии рассматриваемых сред, и существования упругого потенциала, имеем пять независимых упругих постоянных, которые записываются в матричном (двухиндексном) виде в цилиндрической и декартовой системах координат: c_{11} , c_{33} , c_{12} , c_{13} , c_{14} , соответственно. Преобразованием системы дифференциальных уравнений получены собственные функции дифференциальных операторов. Разделяя переменные в уравнениях, и, требуя от решения периодичности по углу φ , получаем решение в виде рядов Фурье по переменной φ (в классе функций, допускающих разложение в ряд Фурье). Перемещения среды в итоге выражаются через функции Ханкеля.

Ключевые слова: гармонические волны, внешняя цилиндрическая полость, упругая кристаллическая среда, дифференциальный оператор, ряд Фурье.

Уравнения движения линейно-упругого тела для малых упругих деформаций имеют вид [1], [4]

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j \sigma^{ij}, \quad (1)$$

уравнения состояния (для адиабатического процесса) [1], [2], [3]

$$\sigma^{ij} = c^{ijke} \varepsilon_{ke} \quad (2)$$

$i, j, k, e = 1, 2, 3$,

где u^i – компоненты вектора перемещения $\vec{u}$, σ^{ij} – компоненты тензора напряжений, c^{ijke} – компоненты тензора упругих постоянных, ε_{ke} – компоненты тензора малых деформаций, ∇_j – оператор ковариантного дифференцирования по j -й координате.

Для замыкания системы уравнений (1), (2) привлечем соотношения Коши [1]

$$2\varepsilon_{ke} = \nabla_k u_e + \nabla_e u_k \quad (3)$$

$k, e = 1, 2, 3$.

Динамический процесс в твердых анизотропных телах в пределах малых упругих деформаций описывается системой дифференциальных уравнений в перемещениях [1], [4]

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_j \left[\frac{1}{2} c^{ijke} \left(\nabla_k u^s g_{es} + \nabla_e u^s g_{ks} \right) \right] \quad (4)$$

где g_{es} – метрический тензор, представленный ковариантными компонентами, $i, j, k, e, s = 1, 2, 3$.

Ввиду симметрии рассматриваемых сред, и существования упругого потенциала, имеем пять независимых упругих постоянных $c^{1111}, c^{3333}, c^{1122}, c^{1133}, c^{2323}$ в уравнении (4), которые будем записывать в матричном (двухиндексном) виде в цилиндрической и декартовой системах координат: $c_{11}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{44}$, соответственно [3].

Здесь ось с индексом 3 выбрана осью симметрии высшего порядка и будет совпадать с осью z цилиндрической – (r, φ, z) системы координат.

В матричном виде уравнения состояния запишутся в виде (5) [3]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \quad (5)$$

где $E_1 = \varepsilon_{11}, E_2 = \varepsilon_{22}, E_3 = \varepsilon_{33}, E_4 = \varepsilon_{23}, E_5 = \varepsilon_{13}, E_6 = \varepsilon_{12}$; а ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, σ_i – аналогичные компоненты тензора напряжений σ_{ij} .

С учетом (5) уравнения (4) в цилиндрической системе координат имеет вид [6]

$$\begin{aligned} & \left[c_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + c_{66} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_r + \\ & + \left[(c_{12} + c_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - (c_{11} + c_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] u_\varphi + \left[(c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right] u_z = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ & \left[(c_{12} + c_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + (c_{11} + c_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] u_r + \\ & + \left[c_{66} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + c_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_\varphi + \left[(c_{13} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right] u_z = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \quad (6) \\ & \left[(c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u_r + \left[(c_{13} + c_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right] u_\varphi + \\ & + \left[c_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

где u_r, u_φ, u_z – физические компоненты вектора перемещения.

Придадим (6) вид (7)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[c_{11} E^* + (c_{13} + c_{44}) E_{zz} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[c_{66} \theta^* \right] = \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_r \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left[c_{66} \theta^* \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[c_{11} E^* + (c_{13} + c_{44}) E_{zz} \right] = \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

$$(c_{13} + c_{44}) \frac{\partial E^*}{\partial z} + \left[c_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] u_z = \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_z$$

Преобразование системы дифференциальных уравнений (7) дает [5], [7]

$$\Delta \theta^* = \left[-\frac{c_{44}}{c_{66}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho}{c_{66}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \theta^* \quad (8)$$

и систему

$$\begin{aligned} \left[c_{11} \Delta + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] E^* + [(c_{13} + c_{44}) \Delta] E_{zz} &= 0 \\ \left[(c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \right] E^* + \left[c_{44} \Delta + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_z &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – плоский оператор Лапласа,

$$\theta^* = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}, \quad E^* = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad E_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Рассмотрим гармонические волны, распространяющиеся вдоль оси z в случае установившегося динамического режима

$$\vec{u} = \vec{v} \exp i(\gamma z - \omega t) \quad (10)$$

где $\vec{v}$ не зависит от z и t , а параметр ω – действительный.

Подставим представление (10) в (6), (7), (8), (9), и обозначим в соответствии с (10)

$$E^* = E \exp i(\gamma z - \omega t)$$

$$\theta^* = \theta \exp i(\gamma z - \omega t) \quad (11)$$

Тогда, для определения E , θ и v_z имеем уравнение

$$\Delta \theta + \frac{(\rho \omega^2 - c_{44} \gamma^2)}{c_{66}} \theta = 0 \quad (12)$$

и систему

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ v_z \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

где J_{ik} операторы дифференциальные 2-го порядка по переменным φ и r , зависящие от параметров ω и γ и упругих постоянных. Ввиду коммутативности этих операторов, умножая слева матричное операторное уравнение

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ v_z \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

на матрицу-оператор алгебраических дополнений к транспонированной матрице

$$\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

приходим к отдельным уравнениям на и [6], [7], [8]

$$\begin{cases} JE = 0 \\ Jv_z = 0 \end{cases} \quad (15)$$

где J – оператор-определитель матрицы $\|J_{ik}\|$.

Разделяя переменные в уравнениях (12), (15), и, требуя от решения периодичности по углу φ , получаем общее решение в виде рядов Фурье по переменной φ (в классе функций, допускающих разложение в ряд Фурье).

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{(n)} \exp in\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_n^3 Z_n^{(1)}(p_3 r) + \eta_n^3 Z_n^{(2)}(p_3 r)] \exp in\varphi \\ E &= \sum_{n=0}^{\infty} E^{(n)} \exp in\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 [e_n^j Z_n^{(1)}(p_j r) + f_n^j Z_n^{(2)}(p_j r)] \exp in\varphi \\ v_z &= \sum_{n=0}^{\infty} v_z^{(n)} \exp in\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 [c_n^j Z_n^{(1)}(p_j r) + d_n^j Z_n^{(2)}(p_j r)] \exp in\varphi \end{aligned} \quad (16)$$

где $\xi_n^3, \eta_n^3, e_n^j, f_n^j, c_n^j, d_n^j$ – произвольные постоянные, $p_3^2 = \frac{\rho\omega^2 - c_{44}\gamma^2}{c_{66}}$

$Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}$ – цилиндрические функции, составляющие пару линейно независимых решений уравнения Бесселя, p_j^2 – корни характеристического уравнения [6]

$$J(-p^2) = \begin{vmatrix} -c_{11}p^2 + \rho\omega^2 - c_{44}\gamma^2 & -i\gamma(c_{13} + c_{44})p^2 \\ i\gamma(c_{13} + c_{44}) & -c_{44}p^2 + \rho\omega^2 - c_{33}\gamma^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Т.к. (15) есть следствие системы (13), то общее решение (15) содержит в себе решения (13). Нам осталось только сузить более широкий класс решений (16) на более узкое решение системы (13), исключением лишних констант. Подставим (16) в (13) и воспользуемся ортогональностью функций $\exp in\varphi$ и линейной независимостью функций $Z_n^{(1)}(p_j r)$ и $Z_n^{(2)}(p_j r)$; получим для определения постоянных e_n^j, c_n^j вырожденную систему алгебраических относительно этих постоянных уравнений

$$\begin{aligned} [-c_{11}p_j^2 + \rho\omega^2 - c_{44}\gamma^2]e_n^j + [-i\gamma(c_{13} + c_{44})p_j^2]c_n^j &= 0 \\ [i\gamma(c_{13} + c_{44})]e_n^j + [-c_{44}p_j^2 + \rho\omega^2 - c_{33}\gamma^2]c_n^j &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

и точно такую же систему для определения пары f_n^j, d_n^j .

Решение вырожденной системы (17) первого ранга, имеющей, следовательно, не пространство решений размерности 1 с базисом $B^i = \begin{bmatrix} M^i \\ Q^i \end{bmatrix}$, независимым от n , представим в виде

$$\begin{aligned} e_n^j &= \xi_n^j M^j \\ c_n^j &= \xi_n^j Q^j. \end{aligned}$$

Подобным же образом $f_n^j = \eta_n^j M^j, d_n^j = \eta_n^j Q^j$.

где η_n^j, ξ_n^j – произвольные постоянные. Нам осталось только построить базис B^i . В качестве базиса можно взять любой из столбцов матрицы

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

в которой элемент A_{jk} – есть алгебраическое дополнение к kj -ому элементу матрицы алгебраической системы уравнений (18).

Общее решение системы (13), (т.е. решение, которое представляет любое решение системы (13) в классе разложимых в ряд Фурье по φ), конкретизацией произвольных постоянных, представим формулами (16), в которой следует положить

$$\begin{aligned} E^{(n)} &= \sum_{j=1}^2 M^j \left[Z_n^{(1)}(p_j r) \xi_n^j + Z_n^{(2)}(p_j r) \eta_n^j \right] \\ v_z^{(n)} &= \sum_{j=1}^2 Q^j \left[Z_n^{(1)}(p_j r) \xi_n^j + Z_n^{(2)}(p_j r) \eta_n^j \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя следствия системы (7) для определения u_r , u_φ по известным E^* , θ^* , E_{zz} , получим для n -й компоненты Фурье вектора $\vec{v}$

$$\begin{aligned} [c_{44}\gamma^2 - \rho\omega^2] v_r^{(n)} &= \sum_{j=1}^2 [c_{11}M^j + i\gamma(c_{13} + c_{44})Q^j] \left[\frac{dZ_n^{(1)}(p_j r)}{dr} \xi_n^j + \frac{dZ_n^{(2)}(p_j r)}{dr} \eta_n^j \right] - \\ &- \frac{inc_{66}}{r} [Z_n^{(1)}(p_3 r) \xi_n^3 + Z_n^{(2)}(p_3 r) \eta_n^3] \\ [c_{44}\gamma^2 - \rho\omega^2] v_\varphi^{(n)} &= \sum_{j=1}^2 \frac{in}{r} [c_{11}M^j + i\gamma(c_{13} + c_{44})Q^j] [Z_n^{(1)}(p_j r) \xi_n^j + Z_n^{(2)}(p_j r) \eta_n^j] + \\ &+ c_{66} \left[\frac{dZ_n^{(1)}(p_3 r)}{dr} \xi_n^3 + \frac{dZ_n^{(2)}(p_3 r)}{dr} \eta_n^3 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$v_z^{(n)} = \sum_{j=1}^2 Q^j [Z_n^{(1)}(p_j r) \xi_n^j + Z_n^{(2)}(p_j r) \eta_n^j].$$

Замечание: Если какой-то корень $p_j^2 = 0$, то соответствующую пару функций $Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}$ представляют r^n и $r^n \ln r$ при $n \neq 0$, и 1 и $\ln r$ при $n = 0$. При этом все предыдущие рассуждения остаются в силе.

Полученное решение представляет распространяющуюся вдоль оси z гармоническую волну в бесконечной трансверсально-изотропной среде и удовлетворяет системе уравнений (6) при любых значениях параметров ω и γ .

Рассмотрим во внешности цилиндрической полости ($r \geq a$) гармонические волны, распространяющиеся вдоль оси цилиндра. Решение системы (6), описывающее ограниченное поле перемещений при больших r , имеет вид

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^2 F^j \left(\frac{dH_n^{(1)}(p_j r)}{dr} \xi_n^j + \frac{dH_n^{(2)}(p_j r)}{dr} \eta_n^j \right) \right] - \frac{inc_{66}}{r} (H_n^{(1)}(p_3 r) \xi_n^3 + H_n^{(2)}(p_3 r) \eta_n^3) \cdot \\ &\cdot \frac{\exp(\gamma z - \omega t + n\varphi) i}{c_{44}\gamma^2 - \rho\omega^2} \end{aligned}$$

$$u_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{inF^j}{r} \left[H_n^{(1)}(p_j r) \xi_n^j + H_n^{(2)}(p_j r) \eta_n^j \right] + c_{66} \left[\frac{dH_n^{(1)}(p_3 r)}{dr} \xi_n^3 + \frac{dH_n^{(2)}(p_3 r)}{dr} \eta_n^3 \right] \right\} \cdot \frac{\exp(\gamma z - \omega t + n\varphi) i}{c_{44} \gamma^2 - \rho \omega^2} \quad (21)$$

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 Q^j \left[H_n^{(1)}(p_j r) \xi_n^j + H_n^{(2)}(p_j r) \eta_n^j \right] \exp(\gamma z - \omega t + n\varphi) i$$

где $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ – функции Ханкеля

$$F^j = c_{11} M^j + i\gamma (c_{13} + c_{44}) Q^j. \quad (21')$$

Причем, из двух функций Ханкеля для каждого p_j удерживается лишь та, которая ограничена при $r \rightarrow +\infty$.

В случае $\text{Im } p_j = 0$ сохраним ту из функций Ханкеля, которая описывается при больших r уходящую цилиндрическую волну, выделяемую условиями излучения (22)

$$\frac{dH_n(p_j r)}{dr} - ip_j H_n(p_j r) \rightarrow 0 \quad (22)$$

при $r \rightarrow +\infty$.

Замечание: Т.к. заранее неизвестно какую из функций Ханкеля оставить, в дальнейшем изложение не будем ставить верхний индекс у этих функций.

Другое решение, имеющие представление (21), мы получим, если выделим на бесконечности приходящую цилиндрическую волну требования

$$\frac{dH_n(p_j r)}{dr} + ip_j H_n(p_j r) \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow +\infty$

для функций с действительными аргументами $p_j r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. 2-ое изд., испр. и доп. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 287 с.
2. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. – М.: Изд-во Иностран. лит-ры, 1952. – 447 с.
3. Най Дж. Физические свойства кристаллов. – М.: Изд-во Иностран. лит., 1960. – 385 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
5. Шерстов С.В. Представление решений одной системы дифференциальных уравнений через решения операторного уравнения 2-го порядка относительно плоского оператора Лапласа / Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: Межвузовский сборник. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2005. – С. 46–48.
6. Шерстов С.В. Нормальные волны в цилиндрических пьезоэлектрических волноводах и связанные с ними граничные задачи. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1985. (Деп., ВИНТИ 1985).

7. Шерстов С.В. Система дифференциальных уравнений динамики физических характеристик деформаций в кристаллических цилиндрах гексагональной симметрии // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2011. – № 1. – С. 328–331.

8. Шерстов С.В. Структура решений системы дифференциальных уравнений для гармонических волн в кристаллических цилиндрах гексагональной симметрии // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2011. – № 2. – С. 398–400. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Шерстов Сергей Вадимович – кандидат физико-математических наук, доцент, МГИ НИТУ «МИСиС», e-mail: ud@msmu.ru.

UDC 622:517.2

A DECISION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE MOTION IN DISPLACEMENT FOR HARMONIC WAVES IN OUTER OF THE CYLINDRICAL CAVITY IN AN ANISOTROPIC ELASTIC MEDIUM

Sherstov S.V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia, e-mail: ud@msmu.ru.

In given article are considered harmonic fluctuations and spreading the harmonic waves in appearance of the round cylinder (the endless cylindrical cavity) filled springy transversal-изотропным by material, as well as crystalline material, having гексагональную symmetry 6 mm. The Axis to symmetries of the high order is directed along axis of the cylinder. The dynamic process in hard anisotropic body within small springy deformation is described by system of the differential equations in displacement. In view of symmetry of the considered ambiances, and existence of the springy potential, have five independent springy constant, which are written in matrix type in cylindrical and декартовой coordinate system: accordingly.

The transformation of the system of the differential equations are received own functions differential operator. Preparing variable in equations, and, requiring from decision of periodicity on corner, get the decision in the manner of Furie series on variable (in class function, allowing decomposition in Furie series). Moving the ambience are in total expressed through functions of Hankel.

Key words: harmonic waves, external cylindrical cavity, elastic crystalline medium, differential operator, a Furie series.

REFERENCES

1. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy*. 2-oe izd. (Mechanics of continues medium, 2nd edition), Moscow, Izd-vo Mosk. un-ta, 1978, 287 p.
2. Mezon U. *P'ezoelektricheskie kristally i ikh primeneniye v ul'traakustike* (Piezoelectric crystals and their using in ultraacoustics), Moscow, Izd-vo Inostr. lit., 1952, 447 p.
3. Nai Dzh. *Fizicheskie svoystva kristallov*, Moscow, Izd-vo Inostr. lit., 1960, 385 p.
4. Novatskii V. *Teoriya uprugosti* (Theory of elasticity), Moscow, Mir, 1975, 872 p.
5. Sherstov S.V. *Izmereniya, avtomatizatsiya i modelirovaniye v promyshlennosti i nauchnykh issledovaniyakh: Mezhdvuzovskii sbornik* (Measurements, automation and modeling in industry and scientific study: Mezhdvuzovskiy collection), Biisk, Izd-vo Alt.gos.tekhn.un-ta, 2005, pp. 46–48.
6. Sherstov S.V. *Normal'nye volny v tsilindrisheskikh p'ezoelektricheskikh volnovodakh i svyazannye s nimi granichnye zadachi* (The normal waves in cylindrical piezoelectric waveguides and connected with them border problems), Moscow, MGU im. M.V.Lomonosova, 1985.
7. Sherstov S.V. *Gornyi informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2011, no 1, pp. 328–331.
8. Sherstov S.V. *Gornyi informatsionno-analiticheskiy byulleten'*. 2011, no 2, pp. 398–400.

