

Р.К. Халкечев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОВЕРКИ МАТЕРИАЛОВ РАЗЛИЧНОГО ПОРЯДКА СЛОЖНОСТИ ПО ТРЕБОВАНИЮ К ОПИСАНИЮ ИЕРАРХИЧЕСКИ-САМОПОДОБНОЙ СРЕДОЙ

Разработана в алгоритмическом виде математическая модель, позволяющая проверить материал любого порядка сложности на предмет возможности описания его иерархически-самоподобной средой. Главным критерием самоподобия для исследуемого материала выбрано наличие представительного объема, определяемого как минимальный объем, начиная с которого данный материал можно рассматривать как природный фрактал.

Ключевые слова: представительный объем, иерархически-самоподобная среда, фрактал, блок Вороного, структурный элемент.

Применение математических моделей, изложенных в [1–5], для исследования материалов, не обладающих иерархически-самоподобной структурой приводит к получению неадекватных результатов об их деформационных свойствах и полях напряжений. В связи с этим необходимо идентифицировать материалы иерархически-самоподобной структуры среди других материалов, не обладающих таким строением. Игнорирование данного обстоятельства может привести к грубым ошибкам, связанным с тем, что в результате математического моделирования материалу будут приписаны деформационные свойства, которыми он на самом деле не обладает.

Обобщив работы [6–8], и применяя нотацию Д. Кнута, получим в алгоритмическом виде следующую математическую модель проверки материалов различного порядка сложности по требованию к описанию иерархически-самоподобной средой.

F_{mdrv} 1. [Обработать входные данные графического вида материала]. Произвести обработку входных данных графического вида исследуемого материала.

{Для материалов первого и второго порядков данный шаг заключается во введении декартовой системы координат на графическом виде структуры данных объектов. Для всех остальных материалов на данном шаге осуществляется построение эквивалентной структуры этого объекта [8], ввод декартовой системы координат в соответствующей эквивалентной структуре, а также выполняются процедуры по формированию блоков Вороного.}

F_{mdrv} 2. [$d \leftarrow 1$]. Счетчику количества плоскостей d присвоить значение 1, т.е. рассмотрим структуру исследуемого материала в первой плоскости XOY.

{Для плоскостей XOY, ZOY и XOZ переменная d соответственно равна 1, 2 и 3.}

F_{mdrv} 3. [Определить множество вспомогательных параметров A_{cs}]. Для каждого структурного элемента материала определить вспомогательный параметр, состоящий из координаты маркера (центр фрактальной неоднородности или центр макровключения в блоке Вороного) и характеристического вектора (вектора с наибольшей длиной, исходящий из маркера до

точки на границе структурного элемента). Полученные параметры объединить во множество

$$A_{c3} = \{(x_1, y_1, l_1), (x_2, y_2, l_2), \dots, (x_N, y_N, l_N)\},$$

где N – количество элементов материала в соответствующей плоскости.

{Для материала первого и второго порядков сложности структурными элементами являются соответственно фрактальная неоднородность и фрактальная неоднородность с микровключением. Для всех остальных материалов структурным элементом является блок Вороного.}

F_{mdrv} 4. [$t \leftarrow 1$]. Установить счетчик горизонтального уровня t равным 1.

F_{mdrv} 5. [$n \leftarrow 1$]. Установить счетчик общего количества элементов n в материале равным 1.

F_{mdrv} 6. [Установить длину P_0 материала]. Определить длину P_0 исследуемого материала.

F_{mdrv} 7. [$k \leftarrow 1$]. Установить счетчик вертикального уровня k равным 1.

F_{mdrv} 8. [Выбрать первый структурный элемент материала на t -м уровне]. Из множества A_{c3} найти

$$a_E = (x_E, y_E, l_E) = \min_{x_j} \max_{y_j} \{(x_1, y_1, l_1), (x_2, y_2, l_2), \dots, (x_N, y_N, l_N)\}$$

Полученное значение будет соответствовать маркеру структурного элемента, находящегося на t -м горизонтальном и на k -м вертикальном уровнях.

F_{mdrv} 9. [Определить и добавить параметр μ_n к множеству параметров структуры M]. Для структурного элемента, находящегося на t -м горизонтальном и k -м вертикальном уровнях, определить параметр структуры μ_n и добавить его к множеству M .

{Для природного объекта первого порядка – $\mu_n = g_n$ и $M = G$, где $g_n \in G$, $g_n = (r_n, l_n, \varphi_n, v_n, m_n)$, r_n – радиус-век-

тор центра n -ой неоднородности; l_n – характеристический вектор n -ой неоднородности; φ_n – угол между векторами r_n и l_n ; v_n и m_n – номера горизонтального и вертикального уровней неоднородности в структуре материала первого порядка $\{v_n \leftarrow t$ и $m_n \leftarrow k\}$. Для материала второго порядка – $\mu_n = \lambda_n$ и $M = \Lambda$, где $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n = (r_n, l_n, \varphi_n, \gamma_n, v_n, m_n)$, γ_n – площадь микровключения. Для остальных материалов: $\mu_n = w_n$ и $M = W$, где $w_n \in W$, $w_n = (s_n, v_n, m_n)$, s_n – отношение площади n -го макровключения к площади всего блока.}

F_{mdrv} 10. [Удалить a_E из A_{c3}]. Удалить параметры описанного структурного элемента из A_{c3} .

F_{mdrv} 11. [$A_{c3} = \emptyset$?]. Если множество A_{c3} является пустым, то перейти к шагу 19, иначе к шагу 12.

F_{mdrv} 12. [Выбранный структурный элемент последний в горизонтальном уровне?]. Если $x_E + |l_E| \geq P_0$, то перейти к шагу 13, иначе к шагу 15.

F_{mdrv} 13. [$t \leftarrow t + 1$]. Увеличить счетчик горизонтального уровня t на 1.

F_{mdrv} 14. [$n \leftarrow n + 1$]. Увеличить счетчик общего количества структурных элементов в материале на 1. Перейти к шагу 7.

F_{mdrv} 15. [Определить структурные элементы материала, с которыми выбранный элемент, описываемый параметром a_E , имеет общую границу]. Определить множество

$$B = \{(x, y, l) : \sqrt{(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2} \leq |l + l_E|\}, \quad B \subset A_{c3}$$

F_{mdrv} 16. [Выбрать следующий структурный элемент согласно горизонтальному вектору трансляции]. Провести векторы, соединяющие маркер выбранного структурного элемента с маркерами структурных элементов из множества B . Один из полученных векторов, имеющий наименьший угол с осью – OX (при $d = 1$ или $d = 3$) или

ОУ (при $d = 2$), укажет на маркер следующего структурного элемента.

$F_{\text{mdrv}} 17. [k \leftarrow k+1]$. Увеличить счетчик вертикального уровня k на 1.

$F_{\text{mdrv}} 18. [n \leftarrow n+1]$. Увеличить счетчик общего количества структурных элементов в природном объекте на 1. Перейти к шагу 9.

$F_{\text{mdrv}} 19.$ [Построить структурную матрицу H]. Сформировать структурную матрицу $H = [h_{ij}]$, при этом $h_{ij} = f(i, j, \xi)$.

{Для материалов первого порядка – $f(i, j, \xi) = (|I|, \varphi)$, где $\xi = (r, l, \varphi, i, j)$, $\xi \in G$. Для материалов второго порядка – $f(i, j, \xi) = (|I|, \varphi, \gamma)$, где $\xi = (r, l, \varphi, \gamma, i, j)$, $\xi \in \Lambda$. Для остальных материалов: $f(i, j, \xi) = s$, где $\xi = (s, i, j)$, $\xi \in W$.}

$F_{\text{mdrv}} 20. [N_{\text{PHV}} \leftarrow 2]$. Присвоить количеству структурных элементов N_{PHV} в примитивной ячейке материала, согласно горизонтальному вектору трансляции, значение равное 2.

$F_{\text{mdrv}} 21. [m \leftarrow 1]$. Установить счетчик количества подмножеств совокупности структурных элементов равным 1.

$F_{\text{mdrv}} 22. [i \leftarrow 1]$. Установить счетчик строк i матрицы H равным 1.

$F_{\text{mdrv}} 23. [j \leftarrow 1]$. Установить счетчик столбцов j матрицы H равным 1.

$F_{\text{mdrv}} 24. [i < n_{\text{CH}}?]$. Если значение счетчика i меньше общего количества строк и столбцов n_{CH} матрицы H , то перейти к шагу 25, иначе к шагу 34.

$F_{\text{mdrv}} 25. [j \leq (n_{\text{CH}} \text{ div } N_{\text{PHV}}) \cdot N_{\text{PHV}}?]$. Если значение счетчика j не превышает максимума обрабатываемых элементов матрицы H в строке, то перейти к шагу 26, иначе к шагу 33.

$F_{\text{mdrv}} 26.$ [Добавить элемент h_{ij} в Q_m]. Элемент матрицы H , получаемый пересечением строки с номером i и столбцом с номером j , добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером m .

$F_{\text{mdrv}} 27. [b \leftarrow 1]$. Установить счетчик b количества структурных элементов в примитивной ячейке равным 1.

$F_{\text{mdrv}} 28.$ [Добавить элемент $h_{i(j+b)}$ в Q_m]. Элемент матрицы H , получаемый

пересечением строки с номером i и столбцом с номером $j+b$, добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером m .

$F_{\text{mdrv}} 29. [b = N_{\text{PHV}}?]$. Если счетчик b достиг предполагаемого количества элементов в примитивной ячейке, то перейти к шагу 31, иначе к шагу 30.

$F_{\text{mdrv}} 30. [b \leftarrow b+1]$. Увеличить счетчик b количества структурных элементов N_{PHV} в примитивной ячейке на 1. Перейти к шагу 28.

$F_{\text{mdrv}} 31. [m \leftarrow m+1]$. Увеличить счетчик m количества подмножеств совокупности структурных элементов на 1.

$F_{\text{mdrv}} 32. [j \leftarrow j + N_{\text{PHV}}]$. Перейти на номер столбца, с которого начнется нумерация первого элемента последующего подмножества Q_m . Перейти к шагу 25.

$F_{\text{mdrv}} 33. [i \leftarrow i+1]$. Увеличить счетчик строк i на 1. Перейти к шагу 23.

$F_{\text{mdrv}} 34.$ [Построить функции распределения $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$]. Для каждого N_{PHV} – элементного подмножества построить функцию распределения $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$.

$F_{\text{mdrv}} 35.$ [Получить $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_o^2$]. Сравнить функции распределения $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$ друг с другом при помощи критерия согласия χ^2 . В результате получим совокупность приведенных значений $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_o^2$, где

$$o = C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!}.$$

$F_{\text{mdrv}} 36.$ [Определить $\chi_{\min}^2$]. Среди приведенных значений $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_o^2$ найти минимальное значение.

$F_{\text{mdrv}} 37. [\chi_{\min}^2 \geq (\chi^2)_n?]$. Если $\chi_{\min}^2 \geq (\chi^2)_n$ (для одной степени свободы и уровня значимости $\alpha = 0,05$ нормативное значение $(\chi^2)_n = 3,841$), то перейти к шагу 38, иначе к шагу 40.

$F_{\text{mdrv}} 38.$ [Определить объемы $V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Qm}$]. Вычислить объемы $V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Qm}$, формируемые совокупностью структурных элементов, описываемых подмножествами $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$.

F_{mdrv} 39. [$V_{PHV} \leftarrow \max(V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Ql})$]. Объем примитивной ячейки V_{PHV} материала согласно горизонтальному вектору трансляции равен $\max(V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Ql})$. Перейти к шагу 43.

F_{mdrv} 40. [$N_{PHV} \leq n_{CH}$?]. Если количество структурных элементов N_{PHV} в предполагаемой примитивной ячейке меньше или равно количеству строк и столбцов n_{CH} матрицы связей, то перейти к шагу 41, иначе к шагу 42.

F_{mdrv} 41. [$N_{PHV} \leftarrow N_{PHV} + 1$]. Увеличить количество структурных элементов N_{PHV} в примитивной ячейке на 1. Перейти к шагу 21.

{Представительный объем – минимальный объем, начиная с которого рассматриваемый материал обладает свойством самоподобия, т.е. является природным фракталом.}

F_{mdrv} 42. [$V_{np} \leftarrow 0$]. Представительный объем рассматриваемого материала равен 0. Перейти к шагу 75.

F_{mdrv} 43. [$H \leftarrow H^T$]. Транспонировать структурную матрицу H .

F_{mdrv} 44. [$N_{PVV} \leftarrow 2$]. Присвоить количеству структурных элементов N_{PVV} в примитивной ячейке, согласно вертикальному вектору трансляции, значение равное 2.

F_{mdrv} 45. [$m \leftarrow 1$]. Установить счетчик количества подмножеств совокупности структурных элементов равным 1.

F_{mdrv} 46. [$i \leftarrow 1$]. Установить счетчик строк i матрицы H равным 1.

F_{mdrv} 47. [$j \leftarrow 1$]. Установить счетчик столбцов j матрицы H равным 1.

F_{mdrv} 48. [$i < n_{CH}$?]. Если значение счетчика i меньше общего количества строк и столбцов n_{CH} матрицы H , то перейти к шагу 49, иначе к шагу 58.

F_{mdrv} 49. [$j \leq (n_{CH} \div N_{PVV}) \cdot N_{PVV}$?]. Если значение счетчика j не превышает максимума обрабатываемых элементов матрицы H в строке, то перейти к шагу 50, иначе к шагу 57.

F_{mdrv} 50. [Добавить элемент h_{ij} в Q_m]. Элемент матрицы H , получаемый пересечением строки с номером

i и столбцом с номером j , добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером m .

F_{mdrv} 51. [$b \leftarrow 1$]. Установить счетчик b количества структурных элементов в примитивной ячейке равным 1.

F_{mdrv} 52. [Добавить элемент $h_{i(j+b)}$ в Q_m]. Элемент матрицы H , получаемый пересечением строки с номером i и столбцом с номером $j+b$, добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером m .

F_{mdrv} 53. [$b = N_{PVV}$?]. Если счетчик b достиг предполагаемого количества структурных элементов N_{PVV} в примитивной ячейке, то перейти к шагу 55, иначе к шагу 54.

F_{mdrv} 54. [$b \leftarrow b + 1$]. Увеличить счетчик b количества структурных элементов в примитивной ячейке на 1. Перейти к шагу 52.

F_{mdrv} 55. [$m \leftarrow m + 1$]. Увеличить счетчик количества подмножеств совокупности структурных элементов m на 1.

F_{mdrv} 56. [$j \leftarrow j + N_{PVV}$]. Перейти на номер столбца, с которого начнется нумерация первого элемента последующего подмножества Q_m . Перейти к шагу 49.

F_{mdrv} 57. [$i \leftarrow i + 1$]. Увеличить счетчик строк i на 1. Перейти к шагу 47.

F_{mdrv} 58. [Построить функции распределения $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$]. Для каждого N_{PVV} –элементного подмножества построить функцию распределения $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$.

F_{mdrv} 59. [Получить $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_o^2$]. Сравнить функции распределения $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$ друг с другом при помощи критерия согласия χ^2 . В результате получим совокупность приведенных значений $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_o^2$, где

$$o = C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!}.$$

F_{mdrv} 60. [Определить $\chi_{\min}^2$]. Среди приведенных значений $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_o^2$ найти минимальное значение.

F_{mdrv} 61. [$\chi_{\min}^2 \geq (\chi_n^2)_n$?]. Если $\chi_{\min}^2 \geq (\chi_n^2)_n$ (для одной степени сво-

боды и уровня значимости $\alpha = 0,05$ нормативное значение $(\chi^2)_n = 3,841$), то перейти к шагу 62, иначе к шагу 64.

F_{mdrv} 62. [Определить объемы $V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Qm}$]. Вычислить объемы $V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Qm}$, формируемые совокупностью структурных элементов, описываемых подмножествами $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$.

F_{mdrv} 63. [$V_{PVV} \leftarrow \max(V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Qm})$]. Объем примитивной ячейки V_{PVV} природного объекта согласно вертикальному вектору трансляции равен $\max(V_{Q1}, V_{Q2}, \dots, V_{Qm})$. Перейти к шагу 67.

F_{mdrv} 64. [$N_{PVV} \leq n_{CH}$?]. Если количество структурных элементов N_{PVV} в предполагаемой примитивной ячейке меньше или равно количеству строк и столбцов n_{CH} матрицы H , то перейти к шагу 65, иначе к шагу 66.

F_{mdrv} 65. [$N_{PVV} \leftarrow N_{PVV} + 1$]. Увеличить количество структурных элементов N_{PVV} в примитивной ячейке на 1. Перейти к шагу 45.

F_{mdrv} 66. [$V_{пр} \leftarrow 0$]. Представительный объем рассматриваемого материала равен 0. Перейти к шагу 75.

F_{mdrv} 67. [$N_{PHV} > N_{PVV}$?]. Если размер примитивной ячейки N_{PHV} , согласно горизонтальному вектору трансляции больше величины N_{PVV} , то перейти к шагу 68, иначе к шагу 70.

F_{mdrv} 68. [$N_{яп}[d] \leftarrow N_{PHV}$]. Количеству структурных элементов $N_{яп}[d]$ в примитивной ячейке исследуемого мате-

риала в плоскости d присвоить величину N_{PHV} .

F_{mdrv} 69. [$V_{пвп}[d] \leftarrow 2V_{PHV}$]. Представительному объему $V_{пвп}[d]$ исследуемого материала в плоскости d присвоить значение $2V_{PHV}$. Перейти к шагу 72.

F_{mdrv} 70. [$N_{яп}[d] \leftarrow N_{PVV}$]. Количеству структурных элементов $N_{яп}[d]$ в примитивной ячейке исследуемого материала в плоскости d присвоить величину N_{PVV} .

F_{mdrv} 71. [$V_{пвп}[d] \leftarrow 2V_{PVV}$]. Представительному объему $V_{пвп}[d]$ исследуемого материала в плоскости d присвоить значение $2V_{PVV}$.

F_{mdrv} 72. [$d = 3$?]. Если счетчик количества плоскостей равен 3, то перейти к шагу 74, иначе к шагу 73.

F_{mdrv} 73. [$d \leftarrow d + 1$]. Увеличить счетчик количества плоскостей на 1. Перейти к шагу 3.

F_{mdrv} 74. [$V_{пр} \leftarrow \max(V_{пвп}[1], V_{пвп}[2], V_{пвп}[3])$]. Представительный объем материала равен наибольшему из объемов $V_{пвп}[1], V_{пвп}[2], V_{пвп}[3]$.

F_{mdrv} 75. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

Полученная математическая модель является иерархической. Поэтому для того, чтобы исследуемый материал можно было бы описать иерархически-самоподобной средой, необходимо наличие представительного объема ($V_{пр} \neq 0$) у всех структурных составляющих рассматриваемого объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халкечев Р.К. Мультифрактальная модель с масштабом неоднородности эффективных упругих свойств газосодержащих породных массивов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2012. – № 3. – С. 68–70.

2. Халкечев Р.К. Математическая модель эффективных упругих свойств газосодержащих породных массивов мультифрактальной структуры // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи

(специальный выпуск). Методы математического моделирования в горной промышленности. – 2011. – № 12. – С. 7–12.

3. Халкечев Р.К. Разработка метода усреднения упругих свойств геоматериалов на основе теории мультифрактального моделирования // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2012. – № 3. – С. 17–21.

4. Халкечев Р.К. Мультифрактальная модель неоднородного поля давлений в газонаполненных порах поликристалла при посто-

янном внешнем поле // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Математическое моделирование трудноформализуемых объектов. – 2012. – № 7. – С. 3–7.

5. Халкечев Р.К. Теоретические основы мультифрактального моделирования трудноформализуемых объектов // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Прикладная и промышленная математика. – 2013. – № 9. – С. 8–16.

6. Халкечев Р.К. Скейлинг газосодержащих породных массивов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский ре-

гион. Технические науки. – 2012. – № 2. – С. 102–104.

7. Халкечев Р.К. Масштаб неоднородности газосодержащих породных массивов // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). Методы математического моделирования в горной промышленности. – 2011. – № 12. – С. 3–7.

8. Халкечев Р.К. Стохастический метод определения элементарных объемов кристаллических и композиционных геоматериалов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2012. – № 2. – С. 38–41. **ПЛАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Халкечев Руслан Кемалович – кандидат физико-математических наук, доцент,
e-mail: syrus@list.ru, МГИ НИТУ «МИСиС».

UDC 519.6; 550.31; 004.942; 331.45

MATHEMATICAL MODEL OF MATERIALS CHECK OF VARIOUS ORDER OF COMPLEXITY ON DEMAND TO THE DESCRIPTION THE HIERARCHICAL AND SELF-SIMILAR MEDIUM

Khalkechev R.K., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
e-mail: syrus@list.ru,
Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia.

In the presented article the mathematical model allowing to check material of any order of complexity regarding possibility of the description it the hierarchical and self-similar medium is developed in an algorithmic look. For the studied material existence of the representative volume determined as the minimum volume since which this material can be considered as a natural fractal is chosen as the main criterion of self-similarity.

Key words: representative volume, hierarchical and self-similar medium, fractal, block Voronogo, structural element.

REFERENCES

1. Khalkechev R.K. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki.* 2012, no 3, pp. 68–70.
2. Khalkechev R.K. *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten'.* Special edition. Metody matematicheskogo modelirovaniya v gornoi promyshlennosti. 2011, no 12, pp. 7–12.
3. Khalkechev R.K. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN.* 2012, no 3, pp. 17–21.
4. Khalkechev R.K. *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten'.* Special edition. Matematicheskoe modelirovanie trudnoformalizuemykh ob'ektov. 2012, no 7, pp. 3–7.
5. Khalkechev R.K. *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten'.* Special edition. Prikladnaya i promyshlennaya matematika. 2013, no 9, pp. 8–16.
6. Khalkechev R.K. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki.* 2012, no 2, pp. 102–104.
7. Khalkechev R.K. *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten'.* Special edition. Metody matematicheskogo modelirovaniya v gornoi promyshlennosti. 2011, no 12, pp. 3–7.
8. Khalkechev R.K. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN.* 2012, no 2, pp. 38–41.

