

Р.К. Халкечев**НЕЧЕТКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ
КОЛИЧЕСТВА ДВИЖУЩИХСЯ ДИСЛОКАЦИЙ
В СТРУКТУРЕ МАТЕРИАЛА ПЕРВОГО ПОРЯДКА
СЛОЖНОСТИ (МИНЕРАЛА, МЕТАЛЛА)
ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ**

Разработана математическая модель, рассматривающая материал первого порядка сложности (минерал, металл) как динамическую систему, для которой в заданный момент времени определен параметр состояния в виде количества движущихся дислокаций, попавших в плоскости скольжения, и задан нелинейный нечеткий дифференциальный оператор, определяющий эволюцию начального состояния во времени. Эволюция такой динамической системы описывается не одной фазовой траекторией, а их семейством, заключенным в некоторой области. При этом для каждой такой траектории определена степень ее реализации в результате натурального эксперимента.

Ключевые слова: динамическая система, нечеткий репеллер, нечеткий параметр, количество дислокаций, семейство фазовых траекторий.

Установлено, что начиная с некоторой величины внешней нагрузки, в структуре материала первого порядка сложности происходит рост числа движущихся дислокаций, попавших в плоскости скольжения. Как показали исследования, прирост числа таких дислокаций можно выразить через их количество следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad (1)$$

где N – количество движущихся дислокаций, попавших в плоскости скольжения материала первого порядка сложности; $k > 0$ – коэффициент прироста движущихся дислокаций в структуре материала первого порядка.

Коэффициент k не является постоянной величиной. При увеличении нагрузки данный коэффициент увеличивается, подчиняясь следующему закону:

$$k = p + qN, \quad (2)$$

где $p > 0$ – начальный параметр прироста движущихся дислокаций, попавших в плоскости скольжения материала; $q > 0$ – параметр, характеризующий процесс увеличения коэффициента прироста дислокаций.

Тогда, подставляя (2) в (1), и раскрывая скобки, получим:

$$\frac{dN}{dt} = qN^2 + pN. \quad (3)$$

Однако в каждый момент времени поверхностные дефекты в структуре материала первого порядка сложности поглощают движущиеся дислокации, попавшие в плоскости скольжения. С учетом этого, уравнение (3) следует преобразовать к следующему виду:

$$\frac{dN}{dt} = qN^2 + pN - g, \quad (4)$$

где g – скорость поглощения поверхностными дефектами движущихся дислокаций, попавших в плоскости скольжения.

Как показали исследования, для одного и того же типа материала первого порядка сложности параметры q , p , g принимают различные значения. Это обусловлено тем, что они зависят не только от типа материала, но и от его структуры. Несмотря на это, для каждого из рассматриваемых параметров (если они описывают один и тот же тип материала первого порядка сложности) можно выделить ограниченную область возможных значений. Более того, в ходе экспериментов над материалами первого порядка одного и того же типа было установлено, что некоторые значения параметров q , p , g от опыта к опыту проявляются чаще, чем остальные.

Традиционно, для определения подобного вида параметров исследователи применяют статистический подход. Применительно к рассматриваемой задаче, этот подход заключается в следующем [1]. Сначала из совокупности одного типа материала первого порядка составляется случайная выборка. Далее проводится серия экспериментов, состоящих в деформировании материалов из полученной выборки. И наконец, на основании произведенных экспериментов осуществляется построение статистических распределений значений параметров q , p , g отражающих характеристики материала первого порядка, принадлежащих одному типу.

Однако, как показали исследования, статистические распределения параметров q , p , g полученные таким подходом, несколько отличаются от распределений данных параметров, наблюдаемых при деформировании материалов первого порядка сложности, находящихся в структуре материалов более высокого порядка – четвертого, пятого и т.д. Это обусловлено тем, что в данных объектах материалы первого порядка структурно связаны друг с другом, вследствие чего, изменение количества движущихся дислокаций в одном из них приводит к стимулированию роста или спада количества движущихся дислокаций в другом.

Таким образом, для рассматриваемой задачи статистический подход в чистом виде неприменим. В связи с этим предложим другой – комбинированный способ, заключающийся в последовательном использовании статистического и возможностного подходов к решению поставленной задачи – определения параметров q , p , g .

Данный подход состоит из двух этапов. На первом этапе для каждого типа материала первого порядка необходимо статистическим способом определить параметры q , p , g . Этот способ, как указывалось выше, заключается в формировании случайной выборки одного типа материалов первого порядка и проведения экспериментов над элементами такой выборки.

Поскольку в материалах более высокого порядка изменение количества движущихся дислокаций в одном материале первого порядка оказывает влияние на изменение количества дислокаций в другом материале этого же порядка, то полученные в результате экспериментов статистические распределения значений параметров q , p , g следует подвергнуть корректировке. В этом и заключается последний этап предлагаемого комбинированного способа.

Таким образом, на последнем этапе, посредством экспериментальных наблюдений, а также экспертных оценок производится корректировка значений

в статистических распределениях, в результате чего получаем функции принадлежности параметров q, p, g . В итоге имеем такие распределения значений рассматриваемых параметров, которые описывают исследуемые материалы первого порядка одного типа, как если бы они находились внутри материала четвертого, пятого и др. порядков сложности.

Итак, применяя теорию возможностей, на последнем этапе определяемые параметры преобразуются в нечеткую форму. Следовательно, в рассматриваемом случае теория возможностей применяется не как способ описания субъективных оценок и суждений, а как естественное обобщение теории ошибок. Действительно, если в теории ошибок результат измерения представляется множеством возможных значений измеряемой характеристики объекта или явления, то применяя теорию возможностей, становится допустимым произвести градуацию возможностей тех или иных значений ошибки [2].

Вернемся к рассматриваемой математической модели. С учетом того, что все параметры данной модели являются нечеткими, уравнение (4) следует преобразовать к следующему виду:

$$\frac{dN}{dt} = \tilde{q}N^2 + \tilde{p}N - \tilde{g}, \quad (5)$$

где $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$ – нечеткие параметры, по своему смыслу идентичные параметрам q, p, g . Здесь и далее параметры, задаваемые в нечеткой форме, имеют помету «~».

Полученное выражение является математической моделью, описывающей изменение количества движущихся дислокаций, попавших в плоскости скольжения материала первого порядка сложности.

Как показали опыты, функции принадлежности рассматриваемых нечетких параметров с достаточной степенью адекватности могут быть описаны гармонической функцией.

В аналитическом виде функции принадлежности нечетких параметров $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$, согласно [3], можно представить в следующем виде:

$$\mu(q) = \begin{cases} 0,5 \left[1 + \cos \left(\pi \frac{q-b}{a} \right) \right], & \text{для } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\mu(p) = \begin{cases} 0,5 \left[1 + \cos \left(\pi \frac{p-\omega}{\lambda} \right) \right], & \text{для } (\omega-\lambda) \leq x \leq (\omega+\lambda) \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}, \quad (7)$$

$$\mu(g) = \begin{cases} 0,5 \left[1 + \cos \left(\pi \frac{g-v}{u} \right) \right], & \text{для } (v-u) \leq x \leq (v+u) \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}, \quad (8)$$

где $q \in Q, p \in P, g \in G$; Q, P, G – соответственно области значений нечетких параметров $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$; b, ω, v – модальные значения соответствующих нечетких параметров; a, λ, u – задают ширину соответствующих гармонических функций $\mu(q), \mu(p), \mu(g)$.

Как известно гармоническая функция принадлежности имеет симметричный вид, что согласно [3], позволяет описывать нечеткие параметры $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$ с помощью L-R представлений:

$$\tilde{q} = (m_q, \alpha_q, \beta_q), \quad \tilde{p} = (m_p, \alpha_p, \beta_p), \quad \tilde{g} = (m_g, \alpha_g, \beta_g), \quad (9)$$

где $m_q = b$, $m_p = \omega$, $m_g = v$ – модальные значения соответствующих нечетких параметров; $\alpha_q = a$, $\alpha_p = \lambda$, $\alpha_g = u$ – левые коэффициенты нечеткости соответствующих нечетких параметров; $\beta_q = a$, $\beta_p = \lambda$, $\beta_g = u$ – правые коэффициенты нечеткости соответствующих нечетких параметров.

Для того чтобы на основе разработанной модели можно было определить, в какое из состояний при увеличении внешней нагрузки переходит исследуемый материал первого порядка – упругопластическое с упрочнением или близкое к идеально-пластическому, проанализируем фазовый портрет динамической системы, описываемой полученным нелинейным уравнением (5). Состояния равновесия данной динамической системы являются нечеткими и находятся из условия:

$$\tilde{q}N^2 + \tilde{p}N - \tilde{g} = 0. \quad (10)$$

Решая данное уравнение, для рассматриваемой динамической системы получим два нечетких состояния равновесия:

$$\tilde{N}_1 = \frac{-\tilde{p} - \sqrt{\tilde{p}^2 + 4\tilde{q}\tilde{g}}}{2\tilde{p}}, \quad \tilde{N}_2 = \frac{-\tilde{p} + \sqrt{\tilde{p}^2 + 4\tilde{q}\tilde{g}}}{2\tilde{p}}. \quad (11)$$

Следует особо отметить, что в выражениях (11) все алгебраические операции проводятся над нечеткими параметрами. Об алгоритмах реализации таких операций подробно описано в [3].

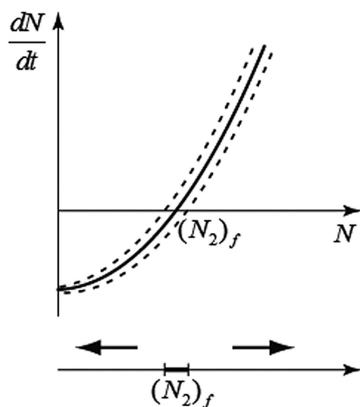
Однако первое нечеткое состояние равновесия $N = \tilde{N}_1$ при любых допустимых значениях параметров $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$ – всегда меньше нуля. Поэтому первое нечеткое состояние равновесия физически нереализуемо.

В результате нечетких алгебраических операций, присутствующих в (11), $\tilde{N}_2$ будет иметь такой же вид функции принадлежности, что и у параметров $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$. Вследствие этого нечеткое состояние равновесия $N = \tilde{N}_2$ можно представить с помощью L-R представления:

$$N = \tilde{N}_2 = (m_{N_2}, \alpha_{N_2}, \beta_{N_2}). \quad (12)$$

Исходя из приведенных рассуждений, фазовый портрет рассматриваемой динамической системы будет включать одно нечеткое состояние равновесия – $N = \tilde{N}_2$ и иметь следующий вид (рисунок).

Как видно из представленного рисунка, эволюция динамической системы с нечеткими параметрами описывается не одной фазовой кривой, а их семейством, заключенным в некоторой области (на рисунке эта область обозначена пунктирной линией вокруг фазовой траектории, реализуемой в случае с наиболее возможными значениями параметров $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$). Вследствие этого нечеткое состояние равновесия на фазо-



вом портрете, в отличие от классической качественной теории динамических систем, изображается не особой точкой, а интервалом, в котором каждое значение N взвешено некоторой степенью принадлежности. Подобный интервал по аналогии с классической теорией динамических систем назовем особым.

Кроме того из представленного фазового портрета следует, что нечеткое состояние равновесия представляет собой репеллер, т.е. изображающая точка, описывающая эволюцию исследуемой динамической системы, в зависимости от начальных условий с течением времени будет удаляться либо в сторону нулевого значения количества движущихся дислокаций, либо в сторону бесконечности.

Таким образом, если изображающая точка в соответствии с начальными условиями, попадет в интервал $[0, m_{N_2} - \alpha_{N_2})$, где α_{N_2} соответствует левой границе особого интервала, то в материале первого порядка реализуется упругопластическое состояние с упрочнением. В противном случае, т.е. в случае попадания изображающей точки в интервал $(m_{N_2} + \beta_{N_2}, \infty)$, где β_{N_2} отвечает за правую границу особого интервала, материала первого порядка находится в близком к идеально-пластическому состоянию.

Наиболее интересным случаем поведения рассматриваемой динамической системы является ситуация, когда начальные условия уравнения (5) приведут к тому, что изображающая точка попадет внутрь особого интервала. В таком случае о дальнейшей эволюции динамической системы будем судить только с точки зрения теории возможностей.

Допустим, что начальное количество дислокаций нелинейного уравнения (5), обозначим его N_0 , примет значение левой границы особого интервала, т.е. $N_0 = m_{N_2} - \alpha_{N_2}$. Тогда бесконечно малое возмущение параметров $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{g}$ может привести к тому, что изображающая точка рассматриваемой динамической системы будет совершать движение в сторону уменьшения количества дислокаций. Следовательно, чем ближе N_0 к $m_{N_2} - \alpha_{N_2}$, тем больше возможность, что с течением времени материала первого порядка окажется в упругопластическом состоянии с упрочнением. По этой причине в случае, когда $N_0 = m_{N_2} - \alpha_{N_2}$, можно утверждать, что материал первого порядка с возможностью $\mu_y(N_0) = 1$ находится в упругопластическом состоянии с упрочнением. Аналогичными рассуждениями получим то, что чем ближе N_0 к $m_{N_2} + \beta_{N_2}$, тем больше возможность, что с течением времени материал первого порядка сложности окажется в идеально-пластическом состоянии. В этом случае при $N_0 = m_{N_2} + \beta_{N_2}$ с возможностью $\mu_{ип}(N_0) = 1$ материал первого порядка сложности находится в близком к идеально-пластическому состоянию.

Учитывая, что в соответствии с условием разбиения единицы [3]:

$$\mu_y(N_0) + \mu_{ип}(N_0) = 1, \quad (13)$$

получим, что каждому значению из $[m_{N_2} - \alpha_{N_2}, m_{N_2} + \beta_{N_2}]$ можно сопоставить величины $\mu_{ун}(N_0)$ и $\mu_y(N_0)$, характеризующие соответственно возможности реализаций упругопластического с упрочнением или близкого к идеально-пластическому состояний. Вследствие проведенных выше рассуждений, функция принадлежности $\mu_y(N_0)$ в базисном диапазоне $[m_{N_2} - \alpha_{N_2}, m_{N_2} + \beta_{N_2}]$ является убывающей, а $\mu_{ун}(N_0)$ – возрастающей. Кроме того, рассматриваемые функции принадлежности имеют одинаковое значение $\mu_y(N_0) = \mu_{ип}(N_0) = 0,5$ при $N_0 = m_{N_2}$. В таком случае для удобства дальнейших исследований, не теряя общности, положим, что данные функции $\mu_y(N_0)$ и $\mu_{ун}(N_0)$ имеют асимметричный треугольный вид.

В аналитическом виде данные функции принадлежности можно представить в следующем виде:

$$\mu_y(N_0) = w \left(\frac{(m_{N_2} + \beta_{N_2}) - N_0}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}} \right), \quad (14)$$

$$\mu_{ин}(N_0) = w \left(\frac{N_0 - (m_{N_2} + \beta_{N_2})}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}} \right), \quad (15)$$

$$\text{где } w = \begin{cases} 1, & \text{для } m_{N_2} - \alpha_{N_2} \leq N_0 \leq m_{N_2} + \beta_{N_2}; \quad N_0 \in [m_{N_2} - \alpha_{N_2}, m_{N_2} + \beta_{N_2}] \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

Если $\mu_y > \mu_{ин}$, то будем говорить, что материал первого порядка находится в нечетком упругопластическом состоянии с упрочнением; в случае $\mu_y < \mu_{ин}$ – в нечетком близком к идеально-пластическому состоянию. И наконец, если $\mu_y = \mu_{ин}$, то материал первого порядка – в нечетком пограничном состоянии.

Полученные результаты, свидетельствуют о том, что для материала первого порядка наряду с рассмотренными состояниями следует выделить такие, как: нечеткое упругопластическое с упрочнением, нечеткое близкое к идеально-пластическому и нечеткое пограничное. Причем реализация одного из них взаимно исключает реализацию других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки входных данных. – М.: Мир, 1980. – 510 с.
2. Чуличков И.А. Математические методы нелинейной динамики. – М.: Физматлит, 2000. – 296 с.
3. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798 с. **ПЛАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Халкечев Руслан Кемалович – кандидат физико-математических наук, доцент,
e-mail: syrus@list.ru, МГИ НИТУ «МИСиС».

UDC 519.6; 004.942; 331.45

FUZZY DYNAMIC MODEL OF QUANTITY CHANGE OF DISLOCATIONS MAKING THE MOVEMENT IN STRUCTURE OF THE MINERAL AT INCREASE IN EXTERNAL LOADING

Khalkchev R.K., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, e-mail: syrus@list.ru, Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia.

In the presented article the mathematical model considering a material of first order of complexity (mineral, metal) as dynamic system for which in the set timepoint state parameter in the form of quantity of the dislocations which got to the sliding planes is determined is developed and the nonlinear fuzzy differential operator defining evolution of an initial state in time is set. Evolution of such dynamic system is described not by one phase trajectory, but their family concluded in some area. Thus for each such trajectory extent of its realization as a result of natural experiment is defined.

Key words: dynamic system, fuzzy repeller, fuzzy parameter, quantity of dislocations, family of phase trajectories.

REFERENCES

1. Dzhonson N., Lion F. *Statistika i planirovanie eksperimenta v tekhnike i nauke. Metody obrabotki vkhodnykh dannykh* (Statistics and experimental design in science and technology. Input data processing methods), Moscow, Mir, 1980, 510 p.
2. Chulichkov I.A. *Matematicheskie metody nelineinoi dinamiki* (Mathematical methods of nonlinear dynamics), Moscow, Fizmatlit, 2000, 296 p.
3. Pegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie* (Fuzzy modeling and control), Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy, 2009, 798 p.