

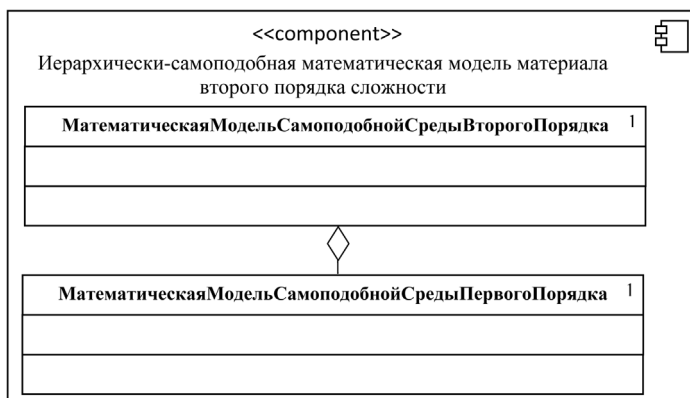
Р.К. Халкечев**ИЕРАРХИЧЕСКИ-САМОПОДОБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛА ВТОРОГО ПОРЯДКА СЛОЖНОСТИ
(МИНЕРАЛА, МЕТАЛЛА) С НАПОЛНЕННЫМИ
ЖИДКОСТЬЮ (ИЛИ ГАЗОМ) ПОРАМИ
В УПРУГОМ ДЕФОРМАЦИОННОМ СОСТОЯНИИ**

Разработана математическая модель, позволяющая определить эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей минерала с наполненными жидкостью (или газом) порами. Представленная модель является иерархически-самоподобной и состоит из двух взаимосвязанных между собой математических моделей самоподобных сред. Первая из них – самоподобная среда первого порядка, является трехмерной сплошной средой со случайными неоднородностями, соответствующим зернам. А вторая – самоподобная среда второго порядка, представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами первой самоподобной среды со случайным полем эллипсоидальных неоднородностей в виде микровключений.

Ключевые слова: самоподобная среда, блок Вороного, группа нечувствительности, поле деформаций, эффективный тензор.

Разработаем содержательную модель материала второго порядка (металла, минерала) относительно деформационных свойств. Материал второго порядка сложности представляет собой фрактал, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу фрактальных неоднородностей (зерен), каждая из которых содержит микровключение, обладающее группой нечувствительности, совпадающее с унимодулярной группой. В общем случае группа нечувствительности некоторого объекта соответствует совокупности его преобразований в исходном состоянии, не отражающихся на напряженном состоянии при произвольной программе последующего деформирования [1]. Использование понятия «группа нечувствительности» позволяет с позиций математики определить агрегатное состояние микровключения. Так если группа нечувствительности является подгруппой ортогональных преобразований плоскости, то микровключение находится в твердом агрегатном состоянии. Если же группа нечувствительности совпадает с унимодулярной группой, то микровключение является жидкостью (или газом). Итак, согласно выше сформулированному определению пора в материале второго порядка сложности является микровключением, находящимся в газообразном (или жидкостном) агрегатном состоянии. Кроме того фрактальные неоднородности в материале второго порядка случайно ориентированы в пространстве, являются анизотропными и взаимодействуют между собой через упругое поле.

Перейдем ко второму этапу – построению математической модели. Аппроксимируем эллипсоидом каждые фрактальные неоднородности и микровключения. Тогда математическим эквивалентом материала второго порядка сложности является неограниченная сплошная среда со случайно-ориентированными в пространстве эллипсоидальными неоднородностями, в каждой из которых вложен эллипсоид, соответствующий микровключению.



Иерархически-самоподобная математическая модель материала второго порядка сложности

Разделим полученную сплошную среду со структурой, соответствующую материалу второго порядка сложности, на две вложенные одна в другую и связанные между собой самоподобные среды. Первая из них, назовем ее самоподобной средой первого порядка, является трехмерной сплошной средой со случайными неоднородностями, соответствующими природным фракталам. А вторая – самоподобная среда второго порядка, представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами первой самоподобной среды со случайным полем эллипсоидальных неоднородностей в виде микровключений, разнесенных в пространстве.

Разработаем для каждой из данных самоподобных сред свою математическую модель. В результате получим взаимосвязанные между собой, или другими словами «вложенные» одна в другую математические модели. Причем последняя из них – математическая модель самоподобной среды второго порядка будет описывать деформационные свойства материала второго порядка сложности (металла, минерала) как целого.

В связи с изложенным, используя язык UML, иерархически-самоподобную математическую модель материала второго порядка сложности относительно деформационных свойств можно представить в следующем виде (рисунок).

Математическая модель самоподобной среды первого порядка приведена в [2] и имеет следующий вид:

$$C^{(efm)} = \left\langle C^{(m)} \left(I + B \cdot C^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left(I + B \cdot C^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1}. \quad (1)$$

Перейдем к разработке математической модели самоподобной среды второго порядка. Данная среда, представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами $C^{(efm)}$ со случайным полем микровключений в эллипсоидальных областях V .

Так как для микровключения, обладающего группой нечувствительности совпадающей с унимодулярной группой, роль модуля упругости играет первоначальное давление p_0 [3], то в результате получим среду с упругими свойствами $C^{(efm)}$

C (назовем ее матрицей первого порядка), в которой находятся эллипсоидальные области, модуль упругости которых отличается на величину $p_0 I - C^{(efm)}$,

равного ${}^{(1ms)}C$; где I – единичный четырехвалентный тензор. Тогда полученную среду с неоднородностями будем характеризовать тензором модулей упругости, равного ${}^{(ms)}C(x) = {}^{(efm)}C + {}^{(1ms)}C W(x)$, где $x(x_1, x_2, x_3)$ – точка среды; $W(x)$ – характеристическая функция области V , т.е.

$$W(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in V \\ 0 & \text{при } x \notin V \end{cases};$$

${}^{(1ms)}C$ – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате ${}^{(ms)}C(x)$ является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидов. Обозначим через тензор ${}^{(0ms)}\varepsilon(x)$ непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы ${}^{(1ms)}C = 0$ при в матрице первого порядка при заданных внешних силах. А через тензор ${}^{(ms)}\varepsilon(x)$ – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно содержательной модели, а также используя работу [4] в рамках метода аналогии, для тензора ${}^{(ms)}\varepsilon(x)$ получим следующее уравнение:

$${}^{(ms)}\varepsilon(x) + \int {}^{(ms)}K(x-x') {}^{(1ms)}C {}^{(ms)}\varepsilon(x') W(x') dx' = {}^{(0ms)}\varepsilon, \quad (2)$$

где оператор ${}^{(ms)}K = -\text{def } {}^{(m)}G \text{ def}$; ${}^{(m)}G$ – тензорная функция Грина матрицы первого порядка.

Из (2) для поля деформаций ${}^{(ms)}\varepsilon$ внутри эллипсоидальной неоднородности или в области получим уравнение:

$$W(x) {}^{(ms)}\varepsilon(x) + \int {}^{(ms)}K(x-x') {}^{(1ms)}C {}^{(ms)}\varepsilon(x') W(x') dx' = W(x) {}^{(0ms)}\varepsilon. \quad (3)$$

С другой стороны, применяя метод аналогии с исследованиями из работы [5], получим поле деформаций ${}^{(ims)}\varepsilon$ для изолированного включения в рамках рассматриваемой модели:

$${}^{(ims)}\varepsilon = \left(I + {}^{(ms)}H \cdot {}^{(1ms)}C \right)^{-1} {}^{(0ms)}\varepsilon, \quad (4)$$

I – единичный четырехвалентный тензор; ${}^{(ms)}H = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} {}^{(ms)}K(Ak) dS$; A – тензор, определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства, переводящее эллипсоидальную область, занятую включением, в единичный шар;

${}^{(ms)}K(k)$ – преобразование Фурье-ядра ${}^{(ms)}K_{ijkl}(x-x') = -[\nabla_k \nabla_l G_{ij}(x-x')]_{(ik)(jl)}$, где круглые скобки указывают на симметризацию по ik и jl ; S_1 – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Для учета взаимодействия неоднородностей и влияния его на поле деформаций внутри включения воспользуемся комплексным методом самосоглазованного поля. В основе данного метода в рамках решаемой задачи лежат следующие положения. Во-первых, каждое из включений любой конкретной

реализации случайного поля неоднородностей рассматривается как изолированное эллипсоидальное включение в матрице первого порядка. Во-вторых, поле деформаций $\varepsilon^{(Ems)}$, в котором находится каждое из включений, складывается из собственного поля $\varepsilon^{(Cms)}$ как изолированной неоднородности, внешнего поля $\varepsilon^{(0ms)}$ и поля, наведенного окружающими неоднородностями $\varepsilon^{(Nms)}$. Не теряя общности, будем считать, что поле $\varepsilon^{(Ems)}$ является постоянным.

Таким образом, собственное поле деформаций $\varepsilon^{(Cms)}$ внутри любой неоднородности, которую считаем изолированным включением в среде с тензором модулей упругости равно $C^{(efm)}$, определяется следующим уравнением:

$$\varepsilon^{(Cms)} = \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \varepsilon^{(0ms)} \quad (5)$$

Для поля деформаций внутри любой неоднородности, обусловленного внешним полем $\varepsilon^{(0ms)}$ и полем, наведенным другими неоднородностями $\varepsilon^{(Nms)}$, имеем следующее уравнение:

$$\varepsilon^{(Kms)} = \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}^{(ms)}, \quad (6)$$

$$\text{где } \hat{\varepsilon}^{(ms)} = \varepsilon^{(0ms)} + \varepsilon^{(Nms)}.$$

В результате в рамках предложенного комплексного метода самосогласованного поля для поля деформаций внутри любого включения имеем:

$$\varepsilon^{(ms)} = \varepsilon^{(Cms)} + \varepsilon^{(Kms)} = \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \varepsilon^{(0ms)} + \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}^{(ms)} \quad (7)$$

или

$$\varepsilon^{(ms)} = \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \varepsilon^{(Ems)}, \quad (8)$$

$$\text{где } \varepsilon^{(Ems)} = \varepsilon^{(0ms)} + \hat{\varepsilon}^{(ms)}.$$

Решая совместно (8) и (3), для поля $\varepsilon^{(Ems)}$ получим:

$$W(x) \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \varepsilon^{(Ems)} + \int^{(ms)} K(x-x') C \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \varepsilon^{(Ems)} W(x') W(x) dx' = W(x) \varepsilon^{(0ms)} \quad (9)$$

Полученное уравнение усредним по ансамблю полей включений:

$$\langle W(x) \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \varepsilon^{(Ems)} \rangle + \int^{(ms)} K(x-x') \langle C \left(I + H \cdot C \right)^{-1} \varepsilon^{(Ems)} W(x') W(x) \rangle dx' = \langle W(x) \varepsilon^{(0ms)} \rangle \quad (10)$$

Поскольку поля $\varepsilon^{(Ems)}$ и $\varepsilon^{(0ms)}$ являются постоянными, получим:

$$\begin{aligned}
& \langle W(x) \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} \rangle \overset{(Ems)}{\varepsilon} + \\
& + \overset{(Ems)}{\varepsilon} \int \overset{(ms)}{K} (x - x') \langle \overset{(1ms)}{C} \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} W(x') W(x) \rangle dx' = \langle W(x) \rangle \overset{(0ms)}{\varepsilon}
\end{aligned} \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned}
& \left[\langle W(x) \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} \rangle + \right. \\
& \left. + \int \overset{(ms)}{K} (x - x') \langle \overset{(1ms)}{C} \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} W(x') W(x) \rangle dx' \right] \cdot \overset{(Ems)}{\varepsilon} = n \cdot \overset{(0ms)}{\varepsilon},
\end{aligned} \quad (12)$$

где $\langle W(x) \rangle = n$ – концентрация неоднородностей.

Используя работу [5] в рамках метода аналогии, окончательно для эффективного тензора модулей упругости $\overset{(efms)}{C}$ имеем:

$$\begin{aligned}
\overset{(efms)}{C} &= \overset{(efm)}{C} + \langle \frac{\overset{(ELms)}{V}}{\overset{(BVms)}{V}} \overset{(1ms)}{C} \cdot \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} \rangle \times \\
&\times \left(I - \overset{(0ms)}{H} \cdot \langle \frac{\overset{(ELms)}{V}}{\overset{(BVms)}{V}} \overset{(1ms)}{C} \cdot \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} \rangle \right)^{-1},
\end{aligned} \quad (13)$$

где $\overset{(ms)}{H} = \overset{(0ms)}{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(ms)}{K} (Ak) dS$, при $A = 1$; $\overset{(ELms)}{V}$ и $\overset{(BVms)}{V}$ – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в самоподобной среде первого порядка с микровключениями.

Блоки Вороного – структурные элементы, получаемые следующим образом. Для каждого макровключения в рассматриваемой самоподобной среде проводятся векторы, соединяющие центр этого включения с центрами соседних, и через середины полученных векторов перпендикулярно к ним восстанавливаются плоскости. Полученные полиэдры являются блоками Вороного самоподобной среды второго порядка.

В свою очередь эффективный тензор упругих податливостей $\overset{(efms)}{C'}$ определяется выражением:

$$\begin{aligned}
\overset{(efms)}{C'} &= \left(\overset{(efm)}{C} + \langle \frac{\overset{(ELms)}{V}}{\overset{(BVms)}{V}} \overset{(1ms)}{C} \cdot \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} \rangle \times \right. \\
&\times \left. \left(I - \overset{(0ms)}{H} \cdot \langle \frac{\overset{(ELms)}{V}}{\overset{(BVms)}{V}} \overset{(1ms)}{C} \cdot \left(I + \overset{(ms)}{H} \cdot \overset{(1ms)}{C} \right)^{-1} \rangle \right)^{-1} \right)^{-1}.
\end{aligned} \quad (14)$$

1. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 240 с.
2. Халкечев Р.К. Разработка метода усреднения упругих свойств геоматериалов на основе теории мультифрактального моделирования // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2012. – № 3. – С. 17–21.
3. Волькенштейн М.В. Энтропия и информация. – М.: Наука, 1986. – 191 с.
4. Канаун С.К. О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1977. – № 2. – С. 160–170.
5. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Доклады АН СССР. – 1971. – Т. 199. – № 3. – С. 127–129. **ПЛАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Халкечев Руслан Кемалович – кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: syrus@list.ru, МГИ НИТУ «МИСиС».

UDC 519.6; 004.942; 331.45

HIERARCHICAL AND SELF-SIMILAR MATHEMATICAL MODEL OF MATERIAL OF THE SECOND ORDER OF COMPLEXITY (MINERAL, METAL) WITH THE FILLED LIQUID (OR GAS) PORES IN THE ELASTIC DEFORMATION STATE

Khalkechev R.K., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, e-mail: syrus@list.ru, Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia.

In the presented article the mathematical model allowing to define effective tensors of modules of elasticity and an elastic pliability of a mineral with filled with liquid (or gas) is developed by a time. The presented model is hierarchical and self-similar and consists of two mathematical models of self-similar mediums interconnected among themselves. The first of them – the self-similar medium of the first order, is the three-dimensional continuous medium with the casual not uniformity corresponding to grains. And the second – the self-similar medium of the second order, represents the three-dimensional continuous medium with effective deformation properties of the first self-similar medium with a casual field of ellipsoidal not uniformity in the form of the microinclusions.

Key words: self-similar medium, block Voronogo, group of insensitivity, strain field, effective tensor.

REFERENCES

1. Trusdell K. Pervonachal'nyi kurs ratsional'noi mekhaniki sploshnykh sred (Elementary course on rational continuum mechanics), Moscow, Mir, 1975, 240 p.
2. Khalkechev R.K. Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN. 2012, no 3, pp. 17–21.
3. Vol'kenshtein M.V. Entropiya i informatsiya (Entropy and information), Moscow, Nauka, 1986, 191 p.
4. Kanaun S.K. Zhurnal prikladnoi mekhaniki i tekhnicheskoi fiziki. 1977, no 2, pp. 160–170.
5. Kunin I.A., Sosnina E.G. Doklady Akademii nauk SSSR. 1971, vol. 199, no 3, pp. 127–129.

