© К.В. Халкечев, 2015

УДК 519.7 (075.8)

К.В. Халкечев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ИДЕАЛЬНО-ГЛАДКОМ КОНТАКТИРОВАНИИ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Построена математическая модель упругого поля напряжений в поликристаллических материалах при идеально-гладких поверхностях контакта. Математическая модель сводиться интегральным уравнениям, решение которых позволяет получить конечную формулу для подсчета тензора напряжений в зернах различной ориентации в зоне контакта. Проведен компьютерный эксперимент с различными металлами и геоматериалами по определению упругого поля напряжений в зоне контакта Анализ масштаба неоднородности позволил определить необходимые размеры площади контакта и глубины поверхностного слоя, позволяющие создать условия для предсказуемости и управления процессами формирования напряженно-деформируемого состояния.

Ключевые слова: изнашивание и напряженно-деформированное состояние контактирующих твердых тел; структурно чувствительные параметры; масштаб статистической неоднородности поликристаллических материалов; характерный размер элементарного объема; идеально-гладкие поверхности; интегральные уравнения; тензор модулей упругости отдельного зерна; тензора напряжений в зерне при различной ориентации в пространстве; компьютерный эксперимент.

Изнашивание контактирующих твердых тел при механических процессах, протекающих в зоне контакта, зависит от поля напряжений во взаимодействующих материалах. В свою очередь реализованное поле напряжений при взаимодействии является ответственным за разрушение и, очевидно, за изнашивание, как за частный случай разрушения в поверхностном слое контакта. При этом все параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние контактирующих тел являются структурно чувствительными, и существенную роль в них играет масштабный фактор. Эти обстоятельства никак не учитываются в существующих трудах, посвященных изнашиванию контактирующих твердых тел. В связи с этим следует отметить монографию с исчерпывающей библиографией на эту тему [1].

Анализ масштаба статистической неоднородности поликристаллических материалов [2, 3] показывает, что поликристаллический материал начинается как целое с размера $l = 6d$, где d – характерный размер зерна. Отсюда следует, что l – характерный размер элементарного объема, свойства которого идентичны свойствам всего материала. И только начиная с этого объема однозначно определимы такие понятия как напряжение, деформация, модуль упругости, средние напряжения и деформации, эффективные модули упругости и др. Таким образом, чтобы процессы в контактной области были предсказуемыми и управляемыми необходимо, чтобы характерный размер площади контакта и глубины поверхностного слоя должны быть равен или больше l.

Для определения упругого поля напряжений в поликристаллических

материалах построим математическую модель. Для этого вначале, согласно процедуре математического моделирования, рассмотрим следующую содержательную модель, предположения которой могут быть сформулированы следующим образом: условия на контакте поверхностей согласованные, т.е. поверхности идеально-гладкие или смазаны смазочным материалом, свободно перемещающимся по поверхности; на формирование внешнего и внутреннего поля напряжений оказывает влияние условия на контакте поверхностей: при контакте идеально-гладких поверхностей в зоне контакта имеют место только упругие деформации, силы давления нормальны к поверхности касания, трением на контакте, возникающим в процессе приложения нагрузки, пренебрегают; материал неоднородный и анизотропный на структурном уровне; концентратор напряжений на границе зерен из-за сосредоточенности в малой области не влияет на поле напряжений внутри зерна, если и влияет, то пренебрежимо мал по величине; каждое зерно испытывает влияние остальных зерен через поле; упругие свойства зерен и внешнее поле напряжений считаем известными; неизвестным считается поле напряжений внутри зерна.

На основе этой содержательной модели переходим к следующей математической модели: неограниченная упругая трехмерная анизотропная среда, которую назовем основной с неоднородностями в эллипсоидальных областях $V(x)$, где $x(x_1, x_2, x_3)$ – точка среды. Эти эллипсоидальные области плотно прилегают друг к другу и соответствуют зернам однокомпонентных (однофазных) конструкционных материалов.

Пусть C – тензор упругих модулей зерна (монокристалла, кристаллита), значения которого определены экспериментально, а C_0 – постоянный тензор упругих модулей основной среды, равный осредненным значениям тензора упругих модулей зерен $<C>$, $C_0 + C_1$ – то же для эллипсоидальной неоднородности, соответствующей зерну. Тогда тензор упругих модулей среды с неоднородностями можно представить в виде кусочно-постоянной функции $C(x) = C_0 + C_1\, V(x)$, где $V(x)$ – характеристическая функция области V, занятой неоднородностями, т.е. $V(x) = 1$ при $x \in V$ и $V(x) = 0$ при $x \in V$. Но так как в рассматриваемой модели неоднородности плотно прилегают друг к другу, то всегда $x \in V$, а значит $V(x) = 1$. Будем иметь в виду, что C_1 принимает различные значения в зависимости от ориентации эллипсоидальной неоднородности. В свою очередь ориентация последних случайна, следовательно C_1 – случайный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности. Обозначим через $\varepsilon_0(x)$ непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при $C_1 = 0$ в однородной основной среде при заданных внешних силах и через $\varepsilon(x)$ – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях. Как известно [4, 5] тензор деформаций $\varepsilon_1 = def u_1$, где смещение $u = u_0 + u_1$ в среде с неоднородностью удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varepsilon^1_{ij}(x) + \int_v K^0_{ijkl}(x - x')C^{klmn}_1 \varepsilon^1_{mn}(x')dx' = -\int_v K^0_{ijkl}(x - x')C^{klmn}_1 \varepsilon^0_{mn} dx' \quad , (1)$$

где оператор $K_0 = -def G_0 def$ имеет ядро

$$K^0_{ijkl}(x - x') = -\left[\partial_i \partial_j G^0_{kl}(x - x')\right]_{(ij)(kl)}, \quad (2)$$

круглые скобки (ij), (kl) обозначают симметризацию по индексам ij и kl соответственно; – функция Грина основной среды.

Так как G^0_{kl} – локально интегрируемая однородная функция степени –1, поэтому для построения ее вторых производных требуется регуляризация уравнения (1). В результате получим, что внешнее однородное поле ε_0 индуцирует внутри эллипсоидальной неоднородности однородное поле ε:

$$\varepsilon = (I + A \cdot C_1)^{-1} \cdot \varepsilon_0, \qquad (3)$$

где I – единичный четырехвалентный тензор; A – интеграл по поверхности единичной сферы в Фурье-пространстве от преобразования Фурье – ядра K_0.

Эта модель учитывает как наличие границ между зернами однокомпонентных (однофазных) конструкционных материалов, так и анизотропность зерен. Для того, чтобы полностью охарактеризовать напряженное состояние структурного уровня необходимо учесть взаимное влияние отдельных зерен друг на друга, а значит и на поле напряжений. Для этого используем метод самосогласованного поля. Но поскольку вспомогательная задача – эллипсоидальная неоднородность в упругой среде – допускает решение в деформациях [2, 3], то и предположения метода самосогласованного поля применительно к рассматриваемой задаче должны быть сформулированы через поле деформаций: 1) поле деформаций ε_c, в котором находится каждая из неоднородностей, складывается из внешнего поля деформаций ε_0 и поля, наведенного окружающими неоднородностями; 2) поле деформаций ε_c одинаково для всех неоднородностей и постоянно; 3) каждая из неоднородностей с известными свойствами представляется изолированным эллипсоидальным включением в среде.

В рамках метода самосогласованного поля и путем несложных алгебраических преобразований тензорных соотношений согласно [6] получим

$$\sigma = C\,(I+AC_1)^{-1} \langle C\,(I+AC_1)^{-1}\rangle^{-1}\,\sigma_0, \qquad (4)$$

где σ_0 – внешнее поле напряжений; знак <> означает усреднение по ансамблю полей неоднородностей; исходными данными в данном выражении являются $C_{(0,\,0,\,0)}$ и σ_0, т.е. тензор модулей упругости отдельного зерна (монокристалла) в лабораторной системе координат и внешнее поле напряжений. Следует отметить, что для принятого правила знаков положительные значения соответствуют напряжениям сжатия, а отрицательные – напряжениям растяжения.

Таким образом, используя соотношение (4), можно определить значения тензора напряжений $\sigma(\varphi, \theta, \psi)$ при различных углах Эйлера – φ, θ, ψ, которые определяют ориентацию неоднородности в пространстве. Тем самым, возвращаясь к исходному объекту исследования согласно указаниям заключительного этапа математического моделирования для интерпретации результатов, мы получим значения тензора напряжений $\sigma(\varphi, \theta, \psi)$ в зернах однокомпонентных (однофазных) конструкционных материалов в зависимости от их ориентации в пространстве при известном внешнем поле напряжений. Компьютерные эксперименты над различными металлами показали: при внешнем одноосном сжатии зерна находятся в сложнонапряженном состоянии; отдельные зерна в частности в области контакта испытывают растягивающие напряжения направленные перпендикулярно внешним сжимающим напряжениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов Е.М., Зернин М.В.* Контактные задачи механики разрушения. – М.: Машиностроение, 1999. – 544 с.
2. *Халкечев Р.К.* Стохастический метод определения элементарных объемов кристаллических и композиционных геоматериалов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2012. – № 2. – С. 38–41.
3. *Халкечев К.В.* Масштаб статистической неоднородности мономинеральных горных пород //Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2004. – т. 11. – Вып. 4. – С. 953.
4. *Кунин И.А., Соснина Э.Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Доклады РАН. – 1971. – т. 199. – № 3. – С. 571–574.
5. *Халкечев К.В., Халкечев Р.К.* О свойствах математической модели: эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Горный информационно-аналитический бюллетень. Отдельные статьи (специальный выпуск). – 2011. – С. 18–22.
6. *Халкечев К.В.* Случайное поле напряжений в поликристаллах и критерий разрушения //Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2005. – т. 12. – Вып. 2. – С. 548–550. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Халкечев Кемал Владимирович – доктор технических наук, доктор физико-математических наук, профессор, МГИ НИТУ «МИСиС», *e*-mail: ud@msmu.ru.

UDC 519.7 (075.8)

STAGES OF DEVELOPMENT OF KNOWLEDGE ABOUT THE EARTH'S NATURAL RESOURCES AND MINING SCIENCES

Khalkechev K.V., Doctor of Technical Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow Mining Institute, National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia, *e*-mail: ud@msmu.ru.

The mathematical model of an elastic field of tension in polycrystalline materials at ideal and smooth surfaces of contact is constructed. The mathematical model to be reduced to the integrated equations which decision allows to receive a final formula for calculation of a tensor of tension in grains of various orientation in a contact zone. Computer experiment with various metals and geomaterials by definition of an elastic field of tension in a contact zone the Analysis of scale of heterogeneity is made allowed to determine the necessary sizes of the area of contact and depth of a blanket allowing to create conditions for predictability and management of processes of formation of an intense and deformable state.

Key words: wear and stress–strain state of contacting solids; structure-sensitive parameters; scale of statistical heterogeneity of polycrystal materials; typical size of volume element; perfectly smooth surfaces; integral equations; tensor of elasticity moduli of an individual grain; stress tensors in grain at different spatialization; computer-aided experiment..

REFERENCES

1. Morozov E.M., Zernin M.V. *Kontaktnye zadachi mekhaniki razrusheniya* (Contact problems of failure mechanics), Moscow, Mashinostroenie, 1999, 544 p.
2. Khalkechev R.K. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*. 2012, no 2, pp. 38–41.
3. Khalkechev K.V. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*. 2004, vol. 11, issue 4, pp. 953.
4. Kunin I.A., Sosnina E.G. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk*. 1971, vol. 199, no 3, pp. 571–574.
5. Khalkechev K.V., Khalkechev R.K. *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten'*, special issue, 2011, pp. 18–22.
6. Khalkechev K.V. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*. 2005, vol. 12, issue 2, pp. 548–550.