УДК 622.83: 550.83

П.Е. Сизин, В.Л. Шкуратник

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МИКРОТРЕЩИНОВАТОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД НА ИХ ПРОВОДИМОСТЬ В ПРИБЛИЖЕНИИ МАКСВЕЛЛА

Рассматривается теоретическое решение задачи о влиянии концентрации микротрещин в образце горной породы на его электрическое сопротивление. Задача решается в приближении Максвелла применительно к трещинам в виде эллипсоидов вращения с заданным значением R большой полуоси и малой полуосью, стремящейся к нулю. Предполагается, что результаты решения будут зависеть только от ориентации трещин относительно измерительных электродов, величины R и отношения среднего расстояния между трещинами к их характерному размеру. Проанализированы случаи ортогонального и параллельного расположения трещин по отношению к направлению протекания тока, а также равномерного их распределения по телесному углу, при различных соотношениях проводимости включений и вмещающей породы. Отмечено, что полученные аналитические соотношения будут справедливы и для оценки влияния микротрещиноватости на диэлектрическую проницаемость образцов. Представлены численные оценки относительного изменения проводимости и диэлектрической проницаемости образцов для различных значений концентрации трещин. Эти оценки свидетельствуют о малой чувствительности метода сопротивлений к микротрещиноватости исследуемой геосреды. Отмечено существенное несовпадение полученных теоретических оценок с имеющимися экспериментальными данными, которое может быть объяснено отсутствием в предложенной модели учета кластеризации трещин даже при незначительных механических нагрузках.

Ключевые слова: горные породы, микротрещины, геофизические методы, метод сопротивлений, теоретическая модель, приближение Максвелла.

Введение

Характерной особенностью практически всех типов горных пород является их структурная поврежденность, которая проявляется в виде дефектов различной природы и масштабов, от дислокаций до макротрещин. В тех случаях, когда речь идет об исследовании свойств горных пород на образцах, определяющим видом дефектов выступает микротрещиноватость, оказывающая наиболее существенное влияние практически на все свойства геоматериала. В тоже время эффективная количественная оценка микротрещиноватости остается до конца еще не решенной задаачей. Так используемый для такой оценки метод микроскопии шлифов достаточно трудоемок и, кроме того, является по сути разрушающим [1]. Что касается геофизических методов, то с одной стороны, их преимущества очевидны и связаны с возможностью получения статистически усредненной по всему объему образца информации, а с другой – однозначная интерпретация геофизических данных затруднительна. Более того, на сегодняшний день для большинства геофизических методов отсутствуют даже приблизительные оценки их потенциальной информативности по отношению к наличию и концентрации микротрещин. В качестве одного из немногих исключений здесь выступает ультразвуковой высокочастотный вело-

симетрический метод, позволяющий количественно оценивать плотность микротрещиноватости с использованием аналитических и корреляционных зависимостей, связывающих ее со скоростью продольных упругих волн [2]. Можно отметить также теоретическую модель, отражающую взаимосвязь электрического сопротивления с концентрацией *z*-образных микротрещин в горных породах в условиях их механического нагружения [3], которая, однако, является чисто качественной. В связи с изложенным в рамках настоящей работы предлагается теоретическое решение задачи количественной оценки влияния микротрещиноватости на проводимость горной породы, которая является основным информативным параметром электрометрического метода геоконтроля.

Решение задачи

Для вычисления проводимости тела с трещинами необходимо конкретизировать форму последних. На сегодняшний день наиболее обоснованной представляется модель *z*-образных трещин, которая нашла в том числе и экспериментальное подтверждение [4]. В этой модели трещины имеют форму эллипса с двумя отростками. Рассчитать сопротивление образца с такой трещиной аналитически не представляется возможным. Поэтому упростим задачу, считая трещины дискообразными, а точнее, эллипсоидальными. Трещину, имеющую форму диска радиусом R, для удобства заменим сплюснутым эллипсоидом вращения, большая полуось которого равна R, а малая стремится к нулю. Возможность корректного вычисления такого предела будет означать, что ширина раскрытия трещин не имеет существенного значения в нашей задаче, результаты решения которой будут зависеть только от радиуса трещин и их расположения. Также пренебрежимо мала ошибка, вызванная тем, что толщина трещины на различных ее участках вряд ли совпадает с «толщиной» эллипсоида.

Появление и рост трещин может приводить как к уменьшению, так и к росту проводимости горных пород. В случае полых трещин сопротивление, очевидно, растет. Однако в геофизике более реалистичным оказывается случай, когда трещины заполнены водой или минеральным раствором, проводимость которого существенно выше проводимости вмещающей породы, что приводит к падению сопротивления образца как целого [5]. Кроме того, в образце возможны самые различные варианты расположения трещин. Ниже будут рассмотрены следующие основные случаи. Влияние полых трещин на проводимость породы максимально, если они перпендикулярны направлению электрического поля. Такие трещины в наибольшей степени препятствуют протеканию электрического тока. Мы рассмотрим этот случай, а также случай равномерного распределения ориентации трещин по телесному углу. Если же полые трещины параллельны приложенному напряжению, то их влиянием заведомо можно пренебречь. В случае, если проводимость трещин много выше проводимости породы, то, напротив, наибольший вклад в изменение проводимости будут давать трещины, плоскость которых параллельна направлению поля – они играют роль «проводников» для тока. Ниже будет рассмотрен как этот случай, так и случай хаотической (равномерной) ориентации проводящих трещин.

Решение задачи о проводимости образца с включениями возможно с помощью известного приближения Максвелла. Пусть в бесконечной однородной и изотропной среде с проводимостью σ_2 имеется включение с проводимостью σ_1 в форме эллипсоида, оси которого направлены вдоль координатных осей. На бесконечности задано однородное поле E_∞, направленное вдоль оси Ox.

Тогда поле внутри эллипсоида однородно, направлено вдоль оси Ox и равно по величине

$$E_x^{(i)} = \frac{E_\infty \sigma_2}{\sigma_2 \left(1 - n_x\right) + \sigma_1 n_x} . \tag{1}$$

В (1) n_x – один из коэффициентов деполяризации эллипсоида [6], определяемый формулой

$$n_x = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\left(s^2 + a^2\right)\sqrt{\left(s^2 + a^2\right)\left(s^2 + b^2\right)\left(s^2 + c^2\right)}} , \tag{2}$$

где a, b и c есть полуоси эллипсоида, ориентированные соответственно вдоль осей Ox, Oy и Oz. Коэффициенты n_y и n_z могут быть вычислены по аналогичным формулам с заменой полуоси a на b и c соответственно, однако проще воспользоваться соотношением [6]:

$$n_x + n_y + n_z = 1 ,$$

а также равенством двух полуосей эллипсоида, $b = c = R$, и получить $n_y = n_z = (1 - n_x)/2$. В случае $b = c = R \geq a$ для n_x имеется приближенное выражение [6]:

$$n_x \approx \frac{1 + e^2}{e^3}\left(e - \operatorname{arctg} e\right) , \quad e = \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{a^2}} . \tag{3}$$

Оставляя первые два члена разложения этой формулы по малому параметру $1/e$, получаем

$$n_x \approx \frac{1}{e}\left(e - \operatorname{arctg} e\right) \approx 1 - \frac{\pi}{2}\frac{a}{R} , \quad n_y = n_z \approx \frac{\pi}{4}\frac{a}{R} . \tag{4}$$

Теперь легко найти поле внутри эллипсоидального включения. Рассмотрим трещину без заполнения, проводимость которой можно положить равной нулю. Тогда поле внутри трещины

$$E_x^{(i)} = \frac{E_\infty}{1 - n_x} \approx E_\infty \frac{2}{\pi}\frac{R}{a} . \tag{5}$$

В то же время ток внутри такой трещины очевидно равен нулю.

В общем случае, если внешнее поле, заданное на бесконечности, направлено вдоль оси Ox, а поле внутри включения однородно, $E_x^{(i)} = kE_\infty$, для проводимости среды с эллипсоидальными включениями справедлива формула [7]:

$$\sigma_e = \sigma_2 \left(1 + pk\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2}\right) , \tag{6}$$

где $p = V_1/V$ – объемная концентрация включений, отношение суммарного объема включений V_1 к объему образца V. Дадим краткий вывод этой формулы. Вычислим двумя способами величину $\overline{W} = \frac{1}{V}\int_V \left(\overline{j} - \sigma_2 \overline{E}\right) dV$. Заметим, что в любой точке среды $\overline{j} = \sigma \overline{E}$. В среде, окружающей включения $\sigma = \sigma_2$; $\overline{j} = \sigma_2 \overline{E}$, и ее вклад в интеграл равен нулю. Остается проинтегрировать по объему включений:

$$\overline{W} = \frac{1}{V}\int_{V_1} \left(\sigma_1 \overline{E} - \sigma_2 \overline{E}\right) dV = \frac{V_1}{V}\overline{E}_i \left(\sigma_1 - \sigma_2\right) = pk\overline{E}_\infty \left(\sigma_1 - \sigma_2\right) . \tag{7}$$

Определим средние значения $\langle \bar{j} \rangle = \frac{1}{V}\int_V \bar{j} dV$ и $\langle \bar{E} \rangle = \frac{1}{V}\int_V \bar{E} dV$, тогда эффективная проводимость $\sigma_e = \frac{\langle \bar{j} \rangle}{\langle \bar{E} \rangle}$. В этих обозначениях

$$\bar{W} = \langle \bar{j} \rangle - \sigma_2 \langle \bar{E} \rangle = (\sigma_e - \sigma_2)\langle \bar{E} \rangle = (\sigma_e - \sigma_2)\bar{E}_\infty . \tag{8}$$

Суть приближения Максвелла состоит в том, что при стремлении концентрации включений к нулю можно принять $\langle \bar{E} \rangle \approx \bar{E}_\infty$. Тогда из (7) и (8) получаем формулу (6).

В случае нулевой проводимости включений формула (6) принимает простой вид:

$$\sigma_e = \sigma_2 (1 - pk) \tag{9}$$

Свяжем теперь проводимость породы с коэффициентом концентрации трещин. Будем считать для простоты, что образец поделен на кубы с длиной ребра L, и в центре каждого находится трещина радиусом R, тогда за ее размер примем $2R$, и $K = \left(\frac{L}{2R}\right)^3$. Предположим сначала, что все дискообразные трещины ориентированы перпендикулярно оси Ox. В соответствии с (5) имеем $k = \frac{2}{\pi}\frac{R}{a}$, объем эллипсоида вращения $V_0 = \frac{4\pi}{3} aR^2$, тогда концентрация включений $p = \frac{V_0}{L^3}$, и (9) дает

$$\sigma_e = \sigma_2 \left(1 - \frac{4\pi}{3}\frac{aR^2}{L^3}\frac{2}{\pi}\frac{R}{a}\right) = \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{3K^3}\right). \tag{10}$$

Полученный результат не содержит малую полуось a, что означает корректный переход к пределу бесконечно тонких трещин. Оказывается, что отличие проводимости от значения σ_2 без включений очень невелико. Считается, что при значениях $K \sim 3$ образец начинает разрушаться. Меньшие значения K, то есть большую концентрацию трещин, рассматривать не имеет смысла. При такой предельной концентрации трещин относительное изменение проводимости (и соответственно электрического сопротивления) образца в соответствии с (10) составляет около 1%. Это как минимум на порядок меньше реально наблюдаемого в экспериментах относительного изменения [5].

Больших сомнений в формальной справедливости этого результата нет. Хорошо известен результат для среды с включениями в виде непроводящих сфер: $\sigma = \sigma_2 \left(1 - \frac{3}{2}p\right)$. Рассматривая сферы радиуса R в центрах кубов с ребром L, находим

$$\sigma_e = \sigma_2 \left(1 - \frac{4\pi}{3}\frac{aR^2}{L^3}\frac{2}{\pi}\frac{R}{a}\right) = \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{3K^3}\right).$$

Здесь при $K \sim 3$ относительное изменение проводимости образца составляет около 3%, при том что вклад сфер в изменение проводимости образца очевидно больше, чем вклад тонких дисков того же радиуса.

В случае равномерного распределения трещин по ориентации усреднение по телесному углу дает

$$\sigma_e = \sigma_2\left(1 - \frac{1}{9K^3}\right). \tag{11}$$

Это связано с тем, что при ориентации поля, например, вдоль оси Ox, трещины, нормали которых ориентированы вдоль двух других осей, не дают вклада в изменение проводимости среды.

Пусть теперь включение является хорошо проводящим, $\sigma_1 \geq \sigma_2$. В этом случае поле внутри включения

$$E_x^{(i)} = \frac{E_\infty \sigma_2}{\sigma_2\left(1 - n_y\right) + \sigma_1 n_y} \approx \frac{E_\infty \sigma_2}{\sigma_1 n_y}. \tag{12}$$

Поскольку $n_x \leq 1$, это приближение работает только при очень больших σ_1. Снова приравниваем (7) и (8) и с учетом (12) получаем

$$\sigma_e = \sigma_2\left(1 + p\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 n_y}\right), \tag{13}$$

и окончательно

$$\sigma_e = \sigma_2\left(1 + \frac{p}{n_y}\right). \tag{14}$$

Используя $n_y \approx \frac{\pi}{4}\frac{a}{R}$, вновь получаем выражение через коэффициент концентрации трещин:

$$\sigma_e = \sigma_2\left(1 + \frac{4\pi}{3}\frac{aR^2}{L^3}\frac{4}{\pi}\frac{R}{a}\right) = \sigma_2\left(1 + \frac{2}{3K^3}\right). \tag{15}$$

Здесь относительное изменение проводимости в два раза больше, чем в случае непроводящих трещин и при $K \sim 3$ составляет приблизительно 2,5%. Однако это все равно в несколько раз меньше наблюдаемых значений. При хаотической ориентации трещин усреднение по углам дает

$$\sigma_e = \sigma_2\left(1 + \frac{4}{9K^3}\right). \tag{16}$$

В этом случае относительное изменение проводимости при $K \sim 3$ составляет приблизительно 1,5%.

Можно предполагать, что полученные результаты обладают высокой общностью. В частности, при рассмотрении диэлектрической проницаемости среды повторяются все те же выкладки для сплющенных эллипсоидов и получаются вполне аналогичные формулы для изменения диэлектрической проницаемости. Если при рассмотрении проводящего эллипсоида используется непрерывность на его границе вектора $\bar{j} = \sigma\bar{E}$, то для диэлектрического эллипсоида непрерывен вектор $\bar{D} = \varepsilon_0\varepsilon\bar{E}$. Для поля внутри эллипсоида оказывается справедливым выражение аналогичное (1):

$$E_x^{(i)} = \frac{E_\infty \varepsilon_2}{\varepsilon_2\left(1 - n_x\right) + \varepsilon_1 n_x}, \tag{17}$$

где ε_1 и ε_2 – диэлектрическая проницаемость среды вне и внутри включения соответственно. При рассмотрении диэлектрической проницаемости породы с трещинами практически важен лишь случай «полых» трещин, для которых $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$, что справедливо также для трещин , заполненных водой. Тогда получаются следующие результаты для эффективной диэлектрической проницаемости среды ε_e:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_2 \left(1 - pk\right) \tag{18}$$

Для диэлектрической проницаемости в зависимости от концентрации включений в случае трещин перпендикулярных полю:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_2 \left(1 - \frac{1}{3K^3}\right), \tag{19}$$

а для хаотической ориентации трещин

$$\varepsilon_e = \varepsilon_2 \left(1 - \frac{1}{9K^3}\right). \tag{20}$$

Формулы (18–20) аналогичны формулам (9–11) для проводимости породы с полыми трещинами. Отличие диэлектрической проницаемости образца с трещинами от диэлектрической проницаемости «чистого» образца при разумных значениях $K \le 3$ не превышает 1%.

Заключение

Полученные теоретически результаты свидетельствуют о незначительной чувствительности электрометрического метода сопротивлений к микротрещиноватости образцов горных пород. Причем, эти результаты существенно отличаются от наблюдаемых в лабораторных экспериментах относительных изменениях проводимости образцов, нарушенных микротрещинами и находящихся в условиях одноосного напряженно-деформированного состояния. Это можно объяснить тем, что даже при незначительном сжатии реального образца в нем всегда происходит кластеризация трещин. Они не возникают равномерно по всему объему, а группируются вблизи различных дефектов, причем наличие трещин провоцирует возникновение новых поблизости. Таким образом, следует понимать, что представленная модель должна рассматриваться в качестве первого, достаточно идеализированного приближения и требует своего дальнейшего развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гоудстейн Дж., Ньюбери Д., Эглин П. и др.* Растровая электронная микроскопия и рентгеновский микроанализ. Кн. 1. – М.: Мир, 1984. – 303 с.
2. *Ямшиков В.С., Шкуратник В.Л., Бобров А.В.* О количественной оценке микротрещиноватости горных пород ультразвуковым велосиметрическим методом.// ФТПРПИ. – 1985. – № 4. – С. 110–114.
3. *Шкуратник В.Л, Лавров А.В.* Теоретическая модель электромагнитного эмиссионного эффекта памяти горных пород. // ПМТФ. – 1996. – № 6. – С. 165–169.
4. *Лавров А.В., Шкуратник В.Л., Филимонов Ю.Л.* Акустоэмиссионный эффект памяти в горных породах. – М.: Изд-во МГГУ, 2004. – 456 с.
5. *Соболев Г.А.* Основы прогноза землетрясений. – М.: Наука, 1993. – 280 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. – М.: Наука, 1976. – 386 с.
7. *Швидлер М.И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. – М.: Недра, 1985. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Сизин Павел Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, НИТУ «МИСиС»,
Шкуратник Владимир Лазаревич – зав. кафедрой, МГИ НИТУ «МИСиС», e-mail: ftkp@mail.ru.

UDC 622.83: 550.83

THEORETICAL ESTIMATION OF MICROCRACKS INFLUENCE ON ROCKS CONDUCTIVITY WITH MAXWELL APPROXIMATION

Sizin P.E., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia,
Shkuratnik V.L., Head of Chair, e-mail: ftkp@mail.ru, Moscow Mining Institute,
National University of Science and Technology «MISiS», 119049, Moscow, Russia.

Theoretical solution of problem of microcracks concentration in rock samples influence on its electrical resistance is considered. The problem is solved in the approximation of Maxwell applied to cracks in the form of ellipsoids of revolution with a given value R of major axis and minor axis tending to zero. It is assumed that the results of solution will depend only on orientation of cracks with respect to measuring electrodes, values of R and the ratio of average distance between cracks to their characteristic size. The cases of orthogonal and parallel cracks arrangement relative to direction of current flow, and their even location over the solid angle for different values of the conductivity of the inclusions and rock are analyzed. It is noted that the obtained analytical expressions are valid for assessing the impact of microcracks on dielectric constants of samples. Numerical evaluation of relative change of conductivity and permittivity of the samples for different values of cracks concentration are presented. These estimates indicate low sensitivity of electrometric control of microcracks geoenvironment study. A substantial mismatch of theoretical estimates with available experimental data is noted. It can be explained by the absence of clustering cracks in proposed model even at low mechanical stress.

Key words: rocks, microcracks, impedance method, theoretical model, Maxwell approximation

REFERENCES

1. Goudstein Dzh., N'yuberi D., Eglin P. *Rastrovaya elektronnaya mikroskopiya i rentgenovskii mikroanaliz*. Kn. 1 (Scanning electron microscopy and X-ray microanalysis, book 1), Moscow, Mir, 1984, 303 p.
2. Yamshchikov V.S., Shkuratnik V.L., Bobrov A.V. *Fiziko-tekhnicheskiye problemy razrabotki poleznykh iskopayemykh*. 1985, no 4, pp. 110–114.
3. Shkuratnik V.L, Lavrov A.V. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1996, no 6, pp. 165–169.
4. Lavrov A.V., Shkuratnik V.L., Filimonov Yu.L. *Akustoemissionnyi effekt pamyati v gornykh porodakh* (Acoustic emission memory effect in rocks), Moscow, Izd-vo MGGU, 2004, 456 p.
5. Sobolev G.A. *Osnovy prognoza zemletryasenii* (Principles of forecasting of earthquakes), Moscow, Nauka, 1993, 280 p.
6. Landau L.D., Lifshits E.M. *Statisticheskaya fizika*. Ch. 1 (Statistical physics, part 1), Moscow, Nauka, 1976, 386 p.
7. Shvidler M.I. *Statisticheskaya gidrodinamika poristykh sred* (Statistical hydrodynamics of porous media), Moscow, Nedra, 1985.

Инженер должен защищать свою честь не кулаками, а знаниями и логичными теориями.