УДК 539.3: 622.8

Н.С. Хапилова, В.В. Залетов, С.В. Залетов

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА НА ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОСТИ

На основе решения осесимметричной задачи о деформации упругого полупространства предложен метод расчета нормального напряжения на контакте пород с угольным пластом в окрестности цилиндрической выработки. Численно исследовано влияние деформируемости пласта и глубины его залегания на опорное давление.

Ключевые слова: массив горных пород, угольный пласт, цилиндрическая выработка, опорное давление, теоретические и численные исследования.

Разработка и оптимизация способов охраны подземных выработок и предупреждения динамических явлений в шахтах, как правило, базируются на теоретических либо экспериментальных исследованиях закономерностей распределения напряжений в окрестности полостей, образованных в массиве горных пород. Ниже на основе аналитического решения задачи о пространственном напряженно-деформированном состоянии массива с выработкой, проведенной в пласте полезного ископаемого, проанализированы закономерности распределения напряжений в горных породах, вмещающих угольный пласт с полостью в форме прямоугольного параллелепипеда.

Обозначим через $2h$ мощность горизонтального угольного пласта, залегающего на глубине H от дневной поверхности.

Введем декартову прямоугольную систему координат, совместив координатную плоскость x, y с поверхностью контакта пласта полезного ископаемого с породами, ось z направим вертикально вверх (рис. 1).

Пространственное напряженное состояние ненарушенного массива опишем формулами

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \alpha\rho g(H - z), \quad \sigma_z^0 = \rho g(H - z), \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = 0 \tag{1}$$

Здесь $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \ldots, \tau_{yz}^0$ – компоненты тензора нормальных и касательных напряжений, α – коэффициент бокового распора, ρ – средняя плотность горных пород, g – ускорение силы тяжести.

В массиве с выработкой неизвестные напряжения $\sigma_x^e, \sigma_y^e, \ldots, \sigma_{yz}^e$ представим в виде сумм

$$\begin{gathered}\sigma_x^e = \sigma_x^0 + \sigma_x, \quad \sigma_y^e = \sigma_y^0 + \sigma_y, \\ \sigma_z^e = \sigma_z^0 + \sigma_z, \sigma_{xy}^e = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}, \\ \sigma_{xz}^e = \tau_{xz}^0 + \tau_{xz}, \quad \sigma_{yz}^e = \tau_{yz}^0 + \tau_{yz}.\end{gathered} \tag{2}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{yz}$ – дополнительные напряжения, появление которых связано с созданием полостей в массиве.

Для достаточно больших глубин залегания разрабатываемого пласта при определении дополнительных напряжений можно пренебречь влиянием дневной поверхности. Тогда задача о напряженном состоянии массива с горизонтальным угольным пластом может быть рассмотрена как трехмерная задача теории упругости для полупространства, лежащего на перфорированном упругом основании, моделирующим пласт полезного ископаемого с выработками.

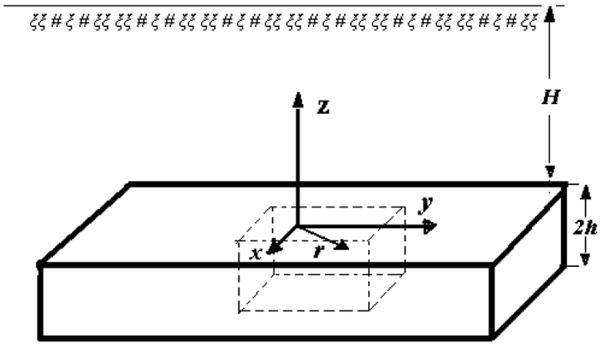

Рис. 1. Схема угольного пласта с призматической выработкой

Считаем, что в плане сечение V призматической выработки имеет произвольную форму. Сформулируем граничные условия смешанной задачи. При $z = 0$ в области V, являющейся потолком выработки, в случае отсутствия крепи дополнительное напряжение σ_z, согласно (1), (2), равно ρgH. Касательные напряжения $\tau_{xz}\tau_{yz}$ в точках граничной плоскости равны нулю. Чтобы учесть деформируемость пласта, принимаем, что в точках поверхности контакта угля с породами выполняется условие пропорциональности нормальных напряжений и смещений.

В работе [1] построено решение сформулированной смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства, позволяющее рассчитать опорное давление на угольный пласт, другими словами, определить распределение нормального напряжения σ_z^e в плоскости контакта угля с породами. Численные результаты исследования пространственного опорного движения в концевой части (нише) очистной выработки приведены в книге [2]. Ниже кратко изложим один из способов решения смешанной задачи, позволяющий вычислить компоненты тензора напряжений не только в плоскости контакта угля с породами, но и в произвольных точках массива.

Для построения искомого решения смешанной задачи используем аналитическое решение задачи о действии сосредоточенной силы на полупространство, лежащее на упругом основании [3]. В этом случае задача осесимметрична, поэтому введем цилиндрическую систему координат r, θ, z. В результате решения задачи с помощью интегрального преобразования Ханкеля для компонент напряжений, действующих в изотропном полупространстве, лежащем на упругом основании, имеем следующие формулы [4], [5]:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{r^2}\left(1-\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}}\right)-\frac{3rz^2}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}\right]+$$

$$+\frac{P\chi}{2\pi r}\int_0^\infty\left\{rt\left(1-zt\right)J_0\left(rt\right)-\left(1-2\nu-zt\right)J_1\left(rt\right)\frac{e^{-tz}}{t+\chi}\right\}dt, \qquad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi}(1-2\nu)\left(\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}}\right)\right)+$$

$$\frac{P\chi}{2\pi}\int_0^\infty \left\{2\nu t^2 J_0(rt) + (1-2\nu-zt)J_0(rt)\right\}\frac{e^{-tz}}{t+\chi}dt, \tag{4}$$

$$\sigma_z = -\frac{3Pz^3}{2\pi\left(r^2+z^2\right)^{5/2}} + \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty \frac{t(1+tz)}{t+\chi}J_0(rt)e^{-tz}dt, \tag{5}$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3Prz^2}{2\pi\left(r^2+z^2\right)^{5/2}} + \frac{P\chi z}{2\pi}\int_0^\infty \frac{t^2 e^{-tz}}{t+\chi}J_1(rt)dt. \tag{6}$$

Здесь P – сосредоточенная сила, $J_0(rt)$, $J_1(rt)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка, $r = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$. Постоянная χ определяется из соотношения

$$\chi = 2k\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E}, \tag{7}$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости пород, k – «коэффициент постели» упругого основания, характеризующий деформируемость угля.

Приравнивая в формуле (5) координату z нулю, получаем закон распределения нормального напряжения на границе полупространства

$$\sigma_z = \frac{P\chi}{2\pi}\int_0^\infty tJ_0(rt)\frac{dt}{t+\chi} = PG(x,y) \tag{8}$$

При единичной сосредоточенной силе равенство (8) совпадает с аналогичной формулой для σ_z, приведенной в работе [1]. Закономерности распределения напряжений и перемещений в изотропном полупространстве, лежащем на упругом основании, при действии на него сосредоточенной силы исследованы в [4], [5].

При переходе в решении (3)-(6) от цилиндрической к прямоугольной системе координат вычислим напряжения от единичной сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке (ξ,η) области V. Составляющие напряжений в декартовой системе координат x, y, z имеют вид [6]:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\left[(\sigma_r+\sigma_\theta) + \frac{(\sigma_r-\sigma_\theta)}{2}\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right], \tag{9}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2}\left[(\sigma_r+\sigma_\theta) - \frac{(\sigma_r-\sigma_\theta)}{2}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right], \tag{10}$$

$$\sigma_z = \sigma_z^c, \tag{11}$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_r-\sigma_\theta)\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \tag{12}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \frac{(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \tag{13}$$

$$\tau_{yz} = \frac{\tau_{rz}(y-\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \tag{14}$$

Здесь напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z^c, \tau_{rz}$ задаются соотношениями (3)–(6), в которых величина r полагается равной $r = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]^{1/2}$.

Переход от сосредоточенной силы к распределенной нагрузке осуществим общепринятым в теории упругости способом с помощью принципа суперпозиции. Выделим в окрестности точки приложения сосредоточенной силы (ξ,η) элементарную площадку $d\xi d\eta$ и проинтегрируем, используя [7], [8], правые части соответствующим образом преобразованных соотношений (9)–(14) по области приложения распределенной нагрузки неизвестной интенсивности $\beta(\xi, \eta)$.

В результате получаем аналитические формулы для расчета напряжений в произвольных точках полупространства

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_V \beta(\xi,\eta)\left\{-\frac{3z(x-\xi)^2}{\rho_1^5} + \frac{1-2\nu}{\rho^2\rho_1}\left[\frac{z(y-\eta)^2}{\rho_1^2} + \frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{\rho_1+z}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\chi}{2}\int_0^\infty\left[(1+2\nu-tz)J_0(\rho t) - \frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{\rho^2}(1-2\nu-tz)J_1(\rho t)\right]e^{-tz}\frac{tdt}{t+\chi}\right\}d\xi d\eta,$$

$$\sigma_z(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{V_1}\beta(\xi,\eta)\left\{-\frac{3z^2}{\rho_1^5} + \chi\int_0^\infty(1+tz)J_0(\rho t)e^{-tz}\frac{tdt}{t+\chi}\right\}d\xi d\eta \tag{15}$$

$$\tau_{yz}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{V_1}\beta(\xi,\eta)(y-\eta)\left\{-\frac{3z^2}{\rho_1^5} + \frac{\chi z}{\rho}\int_0^\infty J_1(\rho t)e^{-tz}\frac{t^2dt}{t+\chi}\right\}d\xi d\eta$$

В соотношениях (15) введены обозначения

$$\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \rho_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$$

Неизвестная функция $\beta(x, y)$ находится из решения неоднородного интегрального уравнения

$$\beta(x,y) = \rho gH + \iint_V \beta(\xi,\eta)G(x-\xi, y-\eta)d\xi d\eta, \quad (x,y)\in V, \tag{16}$$

в котором функция G определяется равенством (8). При переходе к безразмерным напряжениям левые и правые части соотношений (15), (16) делятся на ρgH.

Результаты численных исследований распределения напряжения для прямоугольной области V со сторонами 10 м и 6 м приведены на рис. 2, 3. Начало декартовой системы координат совмещено с точкой пересечения диагоналей прямоугольника. Так как область V симметрична относительно координатных осей x, y то пространственное распределение безразмерных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_x = \sigma_x / \rho gH$, $\bar{\sigma}_z = \sigma_z / \rho gH$ в плоскости $z = 6$ (рис. 2 *а*, 3 *а*) исследовано в области $V_1 = \{x \in [0;10], y \in [0,10]\}$, а в плоскости $z = 0$ (рис. 2 *б*, 3 *б*)

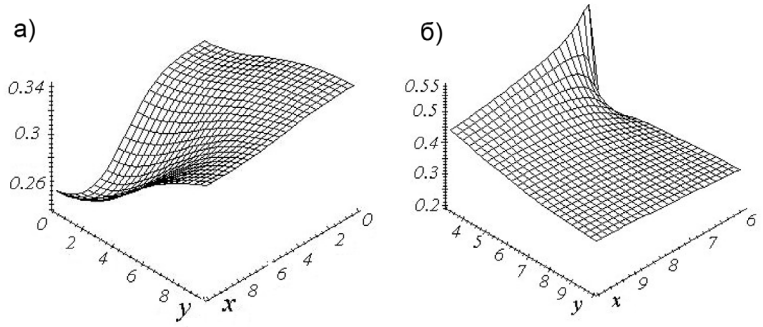

Рис. 2. Распределение безразмерных напряжений $\overline{\sigma_x}$: а) область V_1, плоскость z = 6; б) область V_2, плоскость z=0

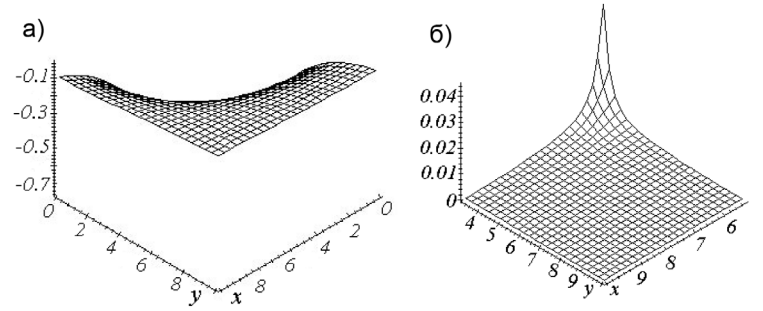

Рис. 3. Распределение безразмерных напряжений $\overline{\sigma_z}$: а) область V_1, плоскость z = 6; б) область V_2, плоскость z = 0

в области $V_2 = \{x \in [5;10], y \in [3,10]\}$, которая является поверхностью контакта угольного пласта с породой. При расчетах коэффициент Пуассона пород полагался равным 0,25.

Входящий в равенстве (7) коэффициент k оценивался по известной формуле [2]

$$k = \frac{(1-\nu_c)E_c}{h(1+\nu_c)(1-2\nu_c)}$$

где ν_c, E_c – коэффициент Пуассона и модуль Юнга угольного пласта. Трехмерные графики построены при $\chi = 1\text{м}^{-1}$. Аналогичные графики строились для всех компонент напряжений при варьировании параметра χ.

Из рис. 2, 3 видно, что картины распределения напряжений в плоскостях $z = 6$ м и $z = 0$ отличаются качественно. Расчеты показывают, что в плоскости $z = 6$ м в некоторой области V_3, находящейся непосредственно над областью V, распределение напряжений зависит в основном от нагрузки ρgH, по мере удаления от области V_3 в плоскости $z = 6$ м усиливается влияние параметра χ, характеризующего деформируемость угольного пласта. Зависимость распределения напряжений от параметра χ также возрастает при приближении к граничной плоскости. Из расчетов следует, что в плоскостях $z = \text{const}$ нормальные напряжения с ростом χ от 0,2 до 1 увеличиваются в 2–4 раза, касательные изменяются на 20–30%. Для получения полных напряжений в массиве необходимо к рассчитанным величинам σ_x, σ_y,… τ_{yz} прибавить начальные напряжения, которые задаются соотношениями (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кавлакан М.В., Михайлов А.М.* Решение смешанной статической задачи теории упругости для полупространства на упругом основании // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 251. – № 6. – С. 1338–1341.

2. *Хапилова Н.С.* Теория внезапного отжима угольного пласта. – Киев: Наукова думка, 1992. – 232 с.

3. *Залетов В.В.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного полупространства, лежащего на упругом основании, при действии сосредоточенной силы // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2004. – Т. 9. – С. 61–67.

4. *Залетов В.В.* Распределение напряжений в изотропном полупространстве при заданных граничных условиях смешанного типа // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2006. – Т. 13. – С. 83–91.

5. *Залетов В.В., Хапилова Н.С.* / Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 65–73.

6. *Амензаде Ю.А.* Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1971. – 287 с.

7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1974. – 1108 с.

8. *Корн Г., Корн. Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1978. – 832 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Хапилова Нелли Сергеевна – доктор технических наук,
Залетов Владислав Всеволодович – кандидат физико-математических наук,
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, e-mail: hapines.nelly@gmail.com;
Залетов Сергей Владиславович – аспирант, e-mail: hapines.nelly@gmail.com,
Таганрогский государственный педагогический институт.

UDC 539.3: 622.8

THE INFLUENCE OF DEFORMABILITY OF COAL SEAM AT SPATIAL STRESSED-STRAINED STATE OF ROCK MASS NEAR OF CAVITY

Khapilova N.S.[1], Doctor of Technical Sciences, e-mail: hapines.nelly@gmail.com,
Zaletov V.V.[1], Candidate of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: hapines.nelly@gmail.com,
Zaletov S.V., Graduate Student, e-mail: hapines.nelly@gmail.com,
Taganrog State Pedagogical Institute, 347936, Taganrog, Russia,
[1] Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine,
83114, Donetsk, Ukraine.

It is created the method of the calculation of the three-dimensional stressed state of a rock mass with a working, which has an arbitrary form of the section in the plane. It is numerically investigated the distribution of stresses near the cavity in the form of a cuboid.

Key word: rock mass, coal seam, prismatic working, the spatial stressed-strained state, regularities.

REFERENCES

1. Kavlakan M.V., Mikhailov A.M. *Doklady AN SSSR* (Proceedings of the USSR Academy of Sciences), 1980, vol. 251, no 6, pp. 1338–1341.

2. Khapilova N.S. *Teoriya vnezapnogo otzhima ugol'nogo plasta* (Theory of sudden squeeze of coal), Kiev, Naukova dumka, 1992, 232 p.

3. Zaletov V.V. *Trudy Instituta prikladnoi matematiki i mekhaniki NAN Ukrainy* (Transactions of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine), 2004. T. 9, pp. 61–67.

4. Zaletov V.V. *Trudy Instituta prikladnoi matematiki i mekhaniki NAN Ukrainy* (Transactions of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine), 2006. T. 13, pp. 83–91.

5. Zaletov V.V., Khapilova N.S. *Trudy Instituta prikladnoi matematiki i mekhaniki NAN Ukrainy* (Transactions of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine), 2010, vol. 20, pp. 65–73.

6. Amenzade Yu.A. *Teoriya uprugosti* (Theory of elasticity), Moscow, Vysshaya shkola, 1971, 287 p.

7. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* (Tables of integrals, sums, series and products), Moscow, Nauka, 1974, 1108 p.

8. Korn G., Korn. T. *Spravochnik po matematike* (Handbook on mathematics), Moscow, Nauka, 1978, 832 p.