

**А.Б. Цветков, Л.Д. Павлова, В.Н. Фрянов**

## **НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ УГЛЕПОРОДНОГО МАССИВА**

*Представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния геомассива, полученные на основе нелинейной математической модели. Проведена оценка адекватности модели посредством сопоставления результатов численного моделирования с данными натурного эксперимента.*

*Ключевые слова: математическая модель, геомассив, нелинейное деформирование пород, теория пластичности, численное моделирование, вычислительный эксперимент, натурные измерения.*

**П**ри проведении подземных горных работ воздействие техногенных процессов приводит к нелинейному деформированию горных пород, что необходимо учитывать при исследовании методами математического моделирования геомеханического состояния углепородного массива. Решение этой задачи позволит получить более приближенную к реальным условиям горного производства информацию о геомеханическом состоянии области исследования по сравнению с упругой моделью, что обеспечит повышение надежности прогноза предаварийных ситуаций при подземной отработке угольных пластов [1].

Математическая модель, предложенная авторами, отличается от известных тем, что позволяет учитывать нелинейное деформирование горных пород при переходе их из упругого в упругопластическое и запредельное состояния. Для этого используются диаграммы «напряжения деформации», полученные по результатам испытаний на одноосное сжатие и растяжение разных видов пород: угля, аргиллитов, алевролитов и песчаников.

Система уравнений для решения нелинейной задачи теории пластичности в перемещениях имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \mu(\psi) \cdot (u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) + (\lambda(\psi) + \mu(\psi)) \cdot (u''_{xx} + v''_{xy} + w''_{xz}) + F_x = 0; \\ \mu(\psi) \cdot (v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) + (\lambda(\psi) + \mu(\psi)) \cdot (u''_{xy} + v''_{yy} + w''_{yz}) + F_y = 0; \\ \mu(\psi) \cdot (w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz}) + (\lambda(\psi) + \mu(\psi)) \cdot (u''_{xz} + v''_{yz} + w''_{zz}) + F_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $(u, v, w)$  – компоненты вектора перемещений,  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  – вектор объемных сил,  $\lambda(\psi)$  и  $\mu(\psi)$  – параметры Ламе.

Функция  $\Psi$  отражает зависимость обобщенных напряжений от обобщенных деформаций и определяется следующим образом [2]:

$$\Psi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)};$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$  – компоненты тензора деформаций,

$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  – компоненты тензора напряжений.

Для решения нелинейной системы уравнений применяется итерационный метод И.А. Биргера, который предусматривает пересчет секущего модуля деформации и коэффициента Пуассона согласно зависимостям [2]:

$$E^* = \frac{3E}{2E\Psi + 1 - 2\mu}; \quad \nu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{E} \frac{1}{2\Psi}}{1 + \frac{1-2\nu}{E} \frac{1}{2\Psi}}, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E^*$ ,  $\nu^*$  – переменные параметры упругости.

При решении нелинейной задачи теории пластичности, как итерационной последовательности решения линейных задач [2], в первом приближении функция  $\Psi$  принимается равной  $1/2\mu$ . Так как функция  $\Psi$  характеризует разупрочнение горных пород, то на каждой последующей итерации вместо модуля упругости  $E_0$  вычисляется секущий модуль деформации  $E_i$  (рис. 1).

После решения системы (1), по вычисленным на первой итерации величинам обобщенных упругих деформаций, определяются значения функции  $\Psi$  по формуле (2), в которой напряжения соответствуют вычисленным деформациям согласно заданной диаграмме деформирования. В соответствии с зависимостями (3) на каждой итерации пересчитываются секущий модуль деформации и коэффициент Пуассона. Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока величины напряжений не будут отличаться от вычисленных на предыдущей итерации на малую, заданную величину.

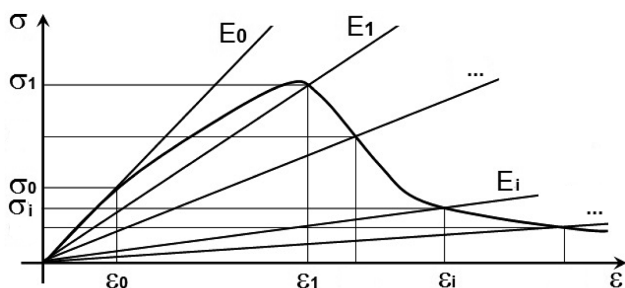
Частный случай математической модели для решения двумерной задачи при условии плоского деформирования определяется системой уравнений в перемещениях:

$$\begin{cases} \mu(\psi) \cdot (u''_{xx} + u''_{yy}) + (\lambda(\psi) + \mu(\psi)) \cdot (u''_{xx} + v''_{xy}) + F_x = 0; \\ \mu(\psi) \cdot (v''_{xx} + v''_{yy}) + (\lambda(\psi) + \mu(\psi)) \cdot (u''_{xy} + v''_{yy}) + F_y = 0. \end{cases} \quad (4)$$

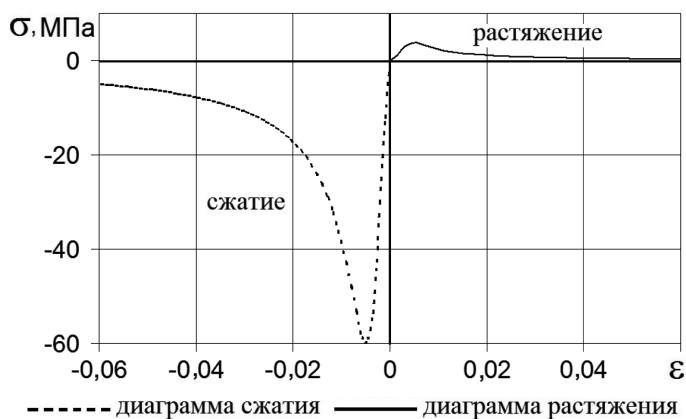
При решении двумерной задачи зависимость между напряжениями и деформациями на диаграмме деформирования принимается в виде:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{a \cdot (\varepsilon)^2 + b \cdot \varepsilon + c}, \quad (5)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются согласно эмпирическим зависимостям:



**Рис. 1. Схематизированная диаграмма «напряжения – деформации»**



**Рис. 2. Диаграммы деформирования при растяжении и сжатии песчаника**

$$a = \frac{9 \cdot n \cdot \varepsilon^*}{(n \cdot \varepsilon^* - \varepsilon^*)^2 \sigma^*}, \quad b = \frac{1}{\sigma^*} - \frac{18 \cdot n \cdot (\varepsilon^*)^2}{(n \cdot \varepsilon^* - \varepsilon^*)^2 \sigma^*}, \quad c = \frac{9 \cdot n \cdot (\varepsilon^*)^3}{(n \cdot \varepsilon^* - \varepsilon^*)^2 \sigma^*}, \quad (6)$$

где  $\sigma^*$  – предел прочности пород при сжатии или растяжении,  $\varepsilon^*$  – предельные сжимающие или растягивающие деформации,  $n$  – эмпирический коэффициент.

Для каждого вида пород и угля задаются диаграммы деформирования при растяжении или сжатии породы. На рис. 2, в качестве примера, представлены диаграммы деформирования при растяжении и сжатии песчаника.

Выбор диаграммы осуществляется согласно условиям (знак минус соответствует сжатию):

$$\begin{cases} \text{диаграмма сжатия,} & \text{если } \sigma_x < 0 \text{ и } \sigma_y < 0; \\ \text{диаграмма растяжения,} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (7)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  – величины горизонтальных и вертикальных напряжений соответственно.

Пересчет секущего модуля деформации и коэффициента Пуассона проводится согласно зависимостям (3).

Разработанная математическая модель реализована в комплексе проблемно-ориентированных программ NDSolver [5] и применена для оценки геомеханического состояния углепородного массива в зоне влияния длинного комплексно-механизированного очистного забоя при отработке пласта 22 шахты «Юбилейная» Кузбасса.

Пласт 22 залегает в условиях Байдаевского угольного месторождения Кузбасса на глубине 120–130 м. Вынимаемая мощность пласта 1,25–1,40 м. Вмещающие породы представлены переслаиванием аргиллитов, алевролитов и песчаников. Предел прочности угля при сжатии 11 МПа, вмещающих пород 25–80 МПа. Угол падения пласта в пределах выемочного участка 0–15°. Длина лавы 152 м. В подрабатываемой толще залегают угольные пласты нерабочей мощности 21, 20, 19. Отработка пласта 22 в пределах выемочного столба осуществлялась от монтажной камеры в сторону бремсберга с использованием механизированной крепи. Скорость продвижения забоя составляла 2–3 м/сутки.

Для проведения натурных исследований на земной поверхности были заложены три наблюдательных станции: одна вдоль выемочного участка в среднем сечении лавы и две по падению пласта (рис. 3). Для определения смещений пород подрабатываемой толщи были пробурены три скважины, в которых были установлены глубинные реперы. В процессе натурного эксперимента определялись оседания и горизонтальные сдвиги каждого репера. Полученные результаты использовались для оценки адекватности разработанной математической модели нелинейного деформирования горных пород посредством сопоставления результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

Численное моделирование на основе метода конечных элементов осуществлялось с использованием разработанного комплекса проблемно-ориентированных программ.

Расчетная схема массива горных пород (рис. 4) представляет собой вертикальное сечение углепородной толщи вдоль оси выемочного столба (линия 1–9 на рис. 3) в виде области прямоугольной формы длиной по простиранию 400 м и глубиной 200 м. Вмещающая толща на глубине 123 м включает отрабатываемый пласт угля мощностью 1,40 м.

В процессе моделирования имитировалось движение очистного забоя от монтажной камеры (точка  $B_1$  на рис. 4) на сторону бремсберга (точки  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  на рис. 4). В каждом конечном элементе расчетной схемы вычислялись деформации, напряжения, горизонтальные и вертикальные перемещения. Для оценки вычисленных величин вертикальных перемещений, проводилось их сравнения с данными натурных измерений, полученных в устье скважины № 1 (рис. 3). Положение скважины соответствует  $X = 215$  м на рис. 4.

Результаты численного моделирования приведены

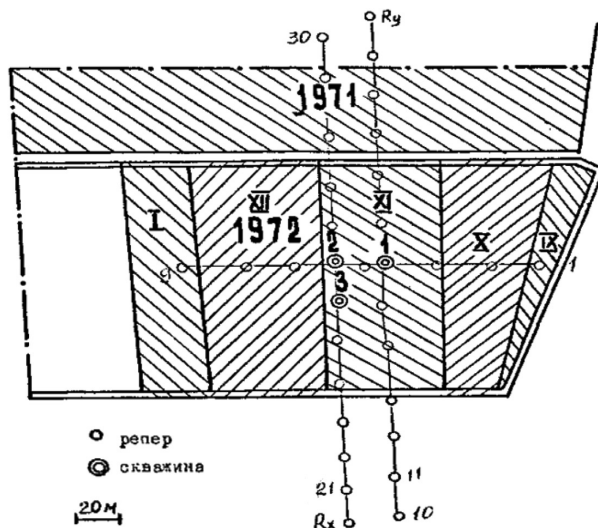


Рис. 3. Схема расположения реперов наблюдательной станции на земной поверхности, подрабатываемой длинным очистным забоем (пласт 22, шахта «Юбилейная», Кузбасс)

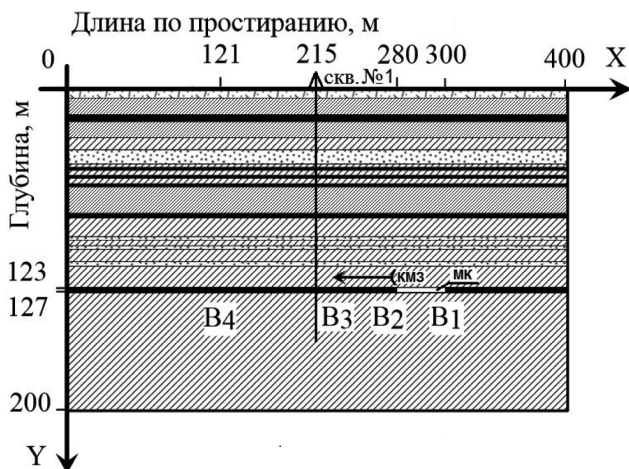
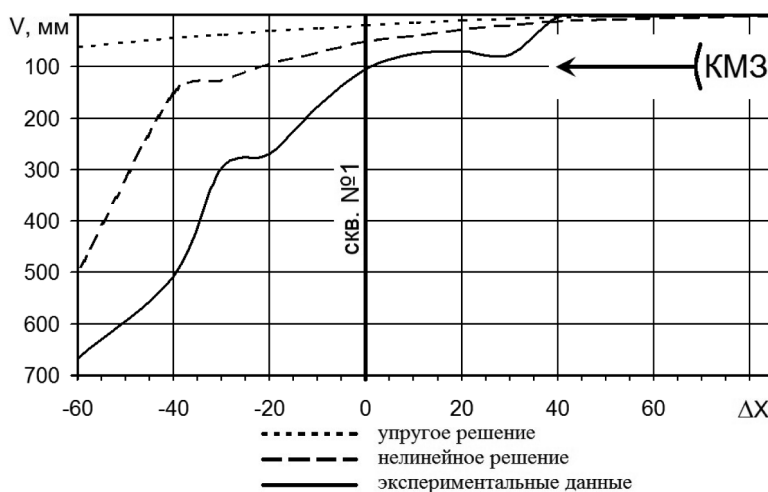


Рис. 4. Расчетная область углепородного массива



**Рис. 5. Графики вертикальных перемещений, мм**

на рис. 5. С целью наглядности на рис. 5 совмещены три графика вертикальных перемещений, полученные по результатам решения упругой и нелинейной задач. Для оценки адекватности результатов моделирования, совместно с результатами вычислительных экспериментов, на рис. 5 приведен график, построенный по экспериментальным данным.

Согласно результатам численного моделирования с учетом пластических свойств горных пород (длинный пунктир) при увеличении длины выработки наблюдается неравномерное возрастание оседаний земной поверхности. При отходе очистного забоя от монтажной камеры на 45 м оседание земной поверхности незначительные и составляют 12 мм. При увеличении длины очистного выработанного пространства до 85 м вплоть до скважины (точка  $V_3$ ) приводит к оседаниям до 50 мм. После прохождения следующих 60 м наблюдается существенное увеличение оседаний в несколько раз, которые достигли 499 мм.

Результаты моделирования, полученные в результате решения упругой задачи (короткий пунктир), качественно соответствуют экспериментальным измерениям. При решении нелинейной задачи отклонения между вычисленными (длинный пунктир) и измеренными (сплошная линия) оседаниями земной поверхности существенно уменьшаются. Среднеквадратическое отклонение результатов математического моделирования от экспериментальных данных для пластичного решения, по сравнению с упругим, уменьшилось на 43,9%.

## Выводы

Адаптирована к условиям подземной угледобычи нелинейная математическая модель геомеханического состояния слоистого геомассива, в определяющих соотношениях которой учитываются пластические свойства горных пород.

Проведено сравнение и установлена согласованность результатов численного решения нелинейной задачи с натурными данными.

Рекомендуется использовать разработанный вариант нелинейной модели деформирования горных пород для прогноза сдвижений земной поверхности при отработке пологих угольных пластов подземным способом.

1. Фрянов В.Н., Павлова Л.Д. Состояние и направления развития безопасной технологии подземной угледобычи. – Новосибирск: СО РАН, 2009. – 238 с.

2. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.

3. Ершов Л.В., Максимов В.А. Математические основы физики горных пород. – М.: МГИ, 1968. – 293 с.

4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 531 с.

5. Цветков А.Б. Пакет программ NDSolver V1.0 для математического моделирования напряженно-деформированного состояния газоносного геомассива. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 19867 от 10.01.2014 – Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». **ГИАБ**

## КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Цветков Андрей Борисович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: atsvet@mail.ru, Фрянов Виктор Николаевич – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой, e-mail: zzz338@rdtc.ru,

Павлова Лариса Дмитриевна – доктор технических наук, доцент, директор института фундаментального образования, зав. кафедрой, e-mail: lara@rdtc.ru, Сибирский государственный индустриальный университет.

UDC 622:519.635.4

## NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL GEOMECHANICAL STATE OF COAL ROCK MASS

Tsvetkov A.B., Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, e-mail: atsvet@mail.ru, Fryanov V.N., Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Chair, e-mail: zzz338@rdtc.ru, Pavlova L.D., Doctor of Technical Sciences, Assistant Professor, Director of Institute of Fundamental Education, Head of Chair, e-mail: lara@rdtc.ru, Siberian State Industrial University.

*The article presents the results of a study of the stress-strain state of the rock mass, derived from a nonlinear mathematical model. Assessed the adequacy of the model by comparing simulation results with the data of field experiment.*

*Key words: mathematical model, rock massif, nonlinear deformation of rocks, theory of plasticity, numerical simulation, computer experiment, field measurements.*

## REFERENCES

1. Fryanov V.N., Pavlova L.D. *Sostoyanie i napravleniya razvitiya bezopasnoi tekhnologii podzemnoi ugledobychi* (Status and directions of development of safe technology of underground coal mining), Novosibirsk, SO RAN, 2009, 238 p.

2. Pisarenko G.S., Mozharovskii N.S. *Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti* (Equations and boundary tasks of the theory of plasticity and creep), Kiev: Naukova dumka, 1981, 496 p.

3. Ershov L.V., Maksimov V.A. *Matematicheskie osnovy fiziki gornykh porod* (Mathematical fundamentals of physics of rocks), Moscow, MGI, 1968, 293 p.

4. Bezukhov N.I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* (Bases of the theory of elasticity, plasticity and creep), Moscow, Vysshaya shkola, 1968, 531 p.

5. Tsvetkov A.B. *Paket programm NDSolver V1.0 dlya matematicheskogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya gazonosnogo geomassiva. Svidetel'stvo o registratsii elektronnoho resursa № 19867 ot 10.01.2014 Ob"edinennyy fond elektronnykh resursov «Nauka i obrazovanie»* (The software package of NDSolver V1.0 for mathematical modeling of the intense deformed condition of a gas-bearing rock mass. The certificate on registration of an electronic resource No. 19867 of 10.01.2014 – the Joint fund of the electronic resources «Science and education»).

