

УДК 622.831

В.Ф. Демин, Т.В. Демина**АДАПТАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА
ПО ПРОГНОЗИРОВАНИЮ ОЖИДАЕМЫХ
НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ПОДЗЕМНОЙ ВЫРАБОТКИ**

Проведенные исследования напряженно-деформированного состояния вмещающих пород в зависимости от мощности слоя легкообрушающихся пород при разной длине анкерирования позволили установить характер поведения боковых пород по зонам их расположения.

Ключевые слова: горный массив, анкерное крепление, анкерирование, вмещающие породы.

Наиболее подходящим для прогнозирования ожидаемых напряжений вблизи подземной выработки является реологическая модель, учитывающая долговечность пород.

Под долговечностью породы, понимается длительность сохранения прочности пород, под действием внешних нагрузок меньших мгновенной прочности. Кроме того, реологические модели учитывают свойство ползучести горных пород, их способность деформироваться во времени при постоянных напряжениях. В свою очередь, в вязком элементе напряжения пропорциональны скорости деформирования

$$\sigma = \eta \, d\varepsilon / dt \quad (1)$$

где η – коэффициент динамической вязкости, Па*с.

Величина обратная вязкости, является текучестью. Вязкость характеризуется также коэффициентом кинематической вязкости [1]

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

где ρ – плотность.

Единица измерения коэффициента кинематической вязкости: м²/с; см²/с.

Деформация ε складывается из условно-мгновенной деформации ε_0 и деформации, развивающейся во времени $\varepsilon(t)$. При затухающей ползучести $d\varepsilon/dt \rightarrow 0$, соответственно значение деформации $\varepsilon(t)$ стремится к некоторому конечному значению $\varepsilon_{\infty} = \text{const}$, зависящему от величины нагрузки.

Полная деформация складывается из начальной деформации ε_0 , деформации неустановившейся ползучести ε_1 , деформации установившейся ползучести ε_2 и деформации прогрессирующего течения [2].

Согласно теории наследственной ползучести деформация зависит не только от величины напряжения, действующего в рассматриваемый момент времени, но и от истории предшествующего деформирования.

Основные реологические уравнения имеют следующий вид [3]:

$$\varepsilon = \frac{\tau_k}{G_0} \left[1 + \int_0^t K(t) dt \right], \quad (3)$$

$$\tau_k = G_0 \varepsilon \left[1 - \int_0^t R(t) dt \right], \quad (4)$$

где K и R – ядра интегральных уравнений наследственной ползучести

Для описания реологических свойств различных материалов в уравнение состояния записывают в виде связи между деформацией ε , напряжением τ_k и временем t , или в виде связи между скоростью деформирования $\dot{\varepsilon}$, напряжением τ_k и времени t , или в виде связи между $\dot{\varepsilon}$, τ_k и ε .

Физическое уравнение для объемного напряженного состояния линейно-деформируемого упруго-вязко-пластического массива выглядит следующим образом [3]:

$$v_1 D_H + v_2 \dot{D}_H = v_3 + v_4 D_D + v_5 \dot{D}_D, \quad (5)$$

где $v_1 = 1, v_2 = t_0, v_3 = \sigma^*, v_4 = 2G_\infty, v_5 = 2G_0 \cdot t_0$; t_0 — время релаксации; σ^* — имеет размерность напряжения и характеризует предельное напряженное состояние при переходе породного массива из одного физического состояния ($D_H < \sigma^*$) в другое ($D_H > \sigma^*$); D_H и $\dot{D}_H$ — соответственно, девиатор напряжений и девиатор скоростей напряжения; D_D и $\dot{D}_D$ — соответственно, девиатор деформаций и девиатор скоростей деформаций; $G_\infty = G_0 / \alpha$ — длительный или статический модуль сдвига; G_0 — мгновенный или динамический модуль сдвига; α — реологический параметр.

Девиатор напряжений представляет собой

$$D_H = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_{CP}, \tau_{XY}, \tau_{XZ} \\ \tau_{YX}, \sigma_Y - \sigma_{CP}, \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX}, \tau_{ZY}, \sigma_Z - \sigma_{CP} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

где $\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ – среднее напряжение, МПа.

Максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (7)$$

Из тензора напряжений можно три комбинации, так называемые инварианты

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0 \\ I_1 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ I_1 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Цилиндрические координаты произвольной точки выражаются через ее декартовы координаты

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_2 - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_3 - \sigma_{cp})^2} = \sqrt{J_2} = \tau_i \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sqrt{3}}{3}I_1 = \sqrt{3\sigma_{cp}} \\ \theta &= \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При задании главных напряжений им присваивают номера следующим образом

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (10)$$

Объемное напряженно-деформированное состояние можно выразить следующим образом

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T; \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T$$

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

В свою очередь упругие константы Ляме λ и μ , модуль объемного сжатия K , модуль Юнга E связаны между собой следующим образом

$$\left. \begin{aligned} E &= 2G(1+\nu) \\ \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \\ \mu &= G \\ K &= \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Согласно критерию Кулона величина предельного касательного напряжения τ на площадке в зависимости от нормального напряжения

$$\tau = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (13)$$

Напряжения τ и σ на площадках выражаются через главные напряжения с помощью формул поворота осей

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 \sin^2 a + \sigma_3 \cos^2 a; \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2a\end{aligned}\quad (14)$$

где a – угол между площадкой и направлением действующего направления

Согласно теории прочности – максимальных касательных напряжений или критерия Кулона-Треска разрушение тела происходит в момент достижения максимальных касательных напряжений $\tau_{\text{к max}}$ предельной величины $\tau_s(\tau_{Kp})$ — предела текучести (разрушения):

$$|\tau_{ki}| \leq \tau_{Kp}, \quad (15)$$

$$\tau_{K1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{K2} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_{K3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad (16)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; \quad \tau_{\text{к max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_{K3} = \frac{\sigma_s}{2}, \quad (17)$$

Взаимосвязь между временем релаксации τ (долговечности, времени до разрушения), температурой испытываемого тела T и действующей внешней нагрузкой σ может быть выражена как [3]

$$\tau = \tau_0 \exp \frac{U_0 - 2\gamma\tau_{\text{max}}}{kT} \quad (18)$$

где τ_0 — период тепловых колебаний атомов; U_0 – начальный активационный барьер; k – константа Больцмана; γ — структурный параметр.

Максимальное касательное напряжение определяется из выражений (15, 16, 17).

В расчетах применяют следующие корреляционные зависимости [3]

$$\gamma' = 3,55 \cdot 10^6 \sigma_{сж}^{-1,4}, \text{ Дж/моль} \cdot \text{мм}^2 / \text{кг}, \quad (19)$$

$$U'_0 = (2,18 - 0,0085\sigma_{сж}) \cdot 10^5, \text{ Дж/моль}, \quad (20)$$

$$\sigma' = 1,40\sigma_{сж}, \text{ МПа}. \quad (21)$$

Рассмотренный математический аппарат положен в основу разработанной компьютерной программы.

Исследуемая область делится на элементарные блоки и полагается, что свойство блока совпадает со свойствами всего массива. На каждом элементарном блоке определяются возникающие напряжения.

Сущность подхода заключается в следующем. Изначально определяется напряженно-деформированное состояние массива, а затем на поле напряжений накладываются физико-механические свойства пород. Опираясь на критерий устойчивости реологической модели, определяются условные зоны неупругих деформаций.

Расчет напряжений производится по вышеприведенным формулам механики деформирования твердого тела в упругой постановке.

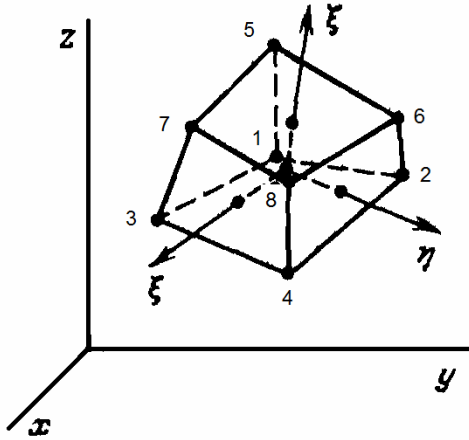


Рис. 1. Трехмерный изопараметрический элемент – гексаэдр

Для разделения области расчета на элементарные блоки рекомендуется использовать восьмиузловые гексаэдры с линейно аппроксимирующими функциями перемещений. Координаты x, y, z внутренних точек элемента через узловые координаты ξ, η, ζ следующим образом

$$\left. \begin{aligned} x &= N_1 x_1 + \dots + N_8 x_8 \\ y &= N_1 y_1 + \dots + N_8 y_8 \\ z &= N_1 z_1 + \dots + N_8 z_8 \end{aligned} \right\}$$

где $x_1, y_1, \dots, z_8$ – координаты узлов; $N_1 - N_8$ – функции формы, определяемые уравнением общего вида

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad (23)$$

При нумерации узлов как на рисунке 1 координаты i -го узла ξ_i, η_i, ζ_i определяются по формуле

$$\xi_i = (-1)^i, \eta_i = (-1)^{\text{int}(\frac{i+1}{2})}, \zeta_i = (-1)^{\text{int}(\frac{i+3}{4})}$$

где $i - \text{int}$ обозначает целую часть.

Функции перемещений в пределах элемента имеют вид

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + \dots + N_8 u_8 \\ v &= N_1 v_1 + \dots + N_8 v_8 \\ w &= N_1 w_1 + \dots + N_8 w_8 \end{aligned} \quad (24)$$

Относительные деформации в пределах элемента $\Delta_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \Delta_y = \frac{\partial v}{\partial y},$

$$\Delta_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

определяется дифференцированием выражения (1.24)

$$\{\Delta\} = [B] \{\delta\}$$

где $\{\delta\} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, \dots, u_8, v_8, w_8\}^T$

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{1x} & 0 & 0 & N'_{2x} & 0 & \dots & N'_{8x} & 0 & 0 \\ 0 & N'_{1y} & 0 & 0 & N'_{2y} & \dots & 0 & N'_{8y} & 0 \\ 0 & 0 & N'_{1z} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N'_{8z} \\ N'_{1y} & N'_{1x} & 0 & N'_{2y} & N'_{2x} & \dots & N'_{8y} & N'_{8x} & 0 \\ 0 & N'_{1x} & N'_{1y} & 0 & N'_{2z} & \dots & 0 & N'_{8z} & N'_{8y} \\ N'_{1z} & 0 & N'_{1x} & 0 & N'_{2z} & \dots & N'_{8z} & 0 & N'_{8x} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Производные функции формы по координатам x, y, z связаны с производными прообраза ξ, η, ζ

$$\begin{Bmatrix} N'_{ix} \\ N'_{iy} \\ N'_{iz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N'_i \xi \\ N'_i \eta \\ N'_i \zeta \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\text{где } [J] = \begin{Bmatrix} x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N'_{1\xi} & N'_{2\xi} & \dots & N'_{8\xi} \\ N'_{1\eta} & N'_{2\eta} & \dots & N'_{8\eta} \\ N'_{1\zeta} & N'_{2\zeta} & \dots & N'_{8\zeta} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} - \text{Матрица}$$

Якоби

Выражение для производных функций форм по координатам прообраза в общем виде можно представить как

$$N'_{i\xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad (27)$$

В нашем случае напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$\{\sigma\} = [D]\{\Delta\} = [D][B]\{\delta\} \quad (28)$$

Связь узловых сил с узловыми перемещениями определяется путем приравнивания работы узловых сил работе внутренних напряжений, вычисляемых путем интегрирования величины $\{d\Delta\}^T \{\delta\}$ по объему элемента:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (29)$$

$$\text{где } [K] = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} |J| [B]^T [D][B] d\xi d\eta d\zeta - \text{матрица жесткости.}$$

Матрицу жесткости можно определить также по квадратуре Гауса-Лежандра

$$[K] = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 \text{abs} |J_{mnk}| |B_{mnk}|^T [D_{mnk}] [B_{mnk}] \quad (30)$$

Узловые силы связаны с напряжениями в точках интегрирования соотношением

$$\{F\} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 \text{abs} |J_{mnk}| |B_{mnk}|^T \{\sigma_{mnk}\} \quad (31)$$

Координаты точек интегрирования ξ, η, ζ , в которых вычисляются значения матриц $|J_{mnk}|, |B_{mnk}|$ определяются по формулам

$$\xi_m = (-1)^m 0,57735; \eta_n = (-1)^n 0,57735; \zeta_k = (-1)^k 0,57735 \quad (32)$$

Распределенные силы к узловым можно привести по формуле

$$F_{x,i} = \gamma_x \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 N_{i,mnk} \text{abs}|J| \quad (33)$$

где $N_{i,mnk}$ – значение функции формы i -го узла в очередной точке интегрирования; γ_x – удельная (на единицу объема) массовая сила, действующая вдоль оси x .

У кубического элемента с восемью узлами суммарная распределенная по объему сила делится между узлами поровну.

Представленный подход может быть успешно реализован в алгоритме программы по созданию расчетного каркаса рассчитываемой области напряженно-деформированного состояния во вмещающих породах вокруг горной выработки. **ПИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Демин Владимир Федорович — доктор технических наук, профессор, академик Международной академии информационных наук,

Демина Татьяна Владимировна — кандидат технических наук, старший преподаватель, Карагандинский государственный технический университет, kargtu@kstu.kz.



ГОРНАЯ КНИГА

Процессы открытых горных работ. Часть 3. Перемещение и складирование горных пород

Репин Н.Я., Репин Л.Н.

2013 г.

224 с.

ISBN: 978-5-98672-349-5

UDK: 622.221

Изложены сведения об особенностях карьерного транспорта, его современном состоянии и тенденциях развития. дана технологическая характеристика основных видов транспорта и условий их применения. приведены данные о важнейших технологических параметрах подвижного состава, параметрах, устройстве и схемах развития транспортных коммуникаций в карьерах и на рабочих уступах. дано описание схем и организации транспортного обслуживания выемочно-погрузочных и отвальных машин. приведена методика расчета производительности транспортного оборудования и потребности в подвижном составе. описаны способы отвалообразования, приведены данные о параметрах отвалов и методах их расчета.

Н.Я. РЕПИН
Л.Н. РЕПИН

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ
И СКЛАДИРОВАНИЕ
ГОРНЫХ ПОРОД

ПРОЦЕССЫ
ОТКРЫТЫХ
ГОРНЫХ
РАБОТ