

УДК 553: 519.688

В.А. Подольский

**РАСЧЕТ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ,
ДЕФОРМАЦИЙ И ДАВЛЕНИЯ ВОДЫ
ПРИ ЗАТОПЛЕНИИ ШАХТ**

*Предложен метод численного моделирования фильтрационных и механических процессов развивающихся в массиве при затоплении шахт. Решение задачи выполнено для двухмерной модели на основе метода конечных элементов.
Ключевые слова: шахта, деформация, фильтрация, итерационный процесс.*

Ликвидация шахт обычно связана с затоплением выработок и, следовательно, с восстановлением естественного режима подземных вод. Очевидно, этот процесс должен сопровождаться изменением характеристик фильтрационных потоков, восстановлением напоров и т.п. Одновременно за счет изменений нейтральных напряжений и дополнительной нагрузки, вызываемой весом воды, заполняющей пустые полости сдренированных ранее областей, будут изменяться эффективные напряжения и соответственно деформационные характеристики массива шахтного поля. Кроме этого возможно и влияние изменившихся геомеханических характеристик на фильтрационные и инфильтрационные параметры массива. Таким образом, влияние затопления выработок на условия безопасности при ликвидации шахт необходимо рассматривать в тесной связи с геомеханическими процессами, т.е. как единый гидрогеомеханический процесс.

На рис. 1 показан общий вид двухмерной схемы для численного моделирования гидрогеомеханических процессов развивающихся в массиве при затоплении шахт. Вся расчетная область разделена на зоны (области 1—8 на рис. 1.), которые от-

личаются друг от друга гидрогеомеханическими параметрами. В пределах каждой зоны механические характеристики породы приняты изотропными, фильтрационные – анизотропными. На рис. 1 зона 1 – затопляемая зона (зона обрушения) для которой должна быть задана пустотность. В начальный момент времени эта зона заполнена водой до некоторого уровня (в частности может быть полностью осушенной).

Границы поля фильтрации в рассматриваемой схеме обозначены штрихпунктирной линией (они могут совпадать с границами расчетной области). В нижней части фильтрационной области расположен абсолютный водоупор (зона 2 на рис. 1). На боковых границах поля фильтрации принято постоянное во времени гидростатическое распределение давления. На некотором участке верхней границы задано инфильтрационное питание. На той части верхней границы, где нет инфильтрации, давление воды равно нулю. Горизонтальные смещения на боковых границах расчетной области и вертикальные на нижней границе равны нулю, величина вертикальных смещений на боковых границах определяется аналитически или численно для условий одномерной задачи.

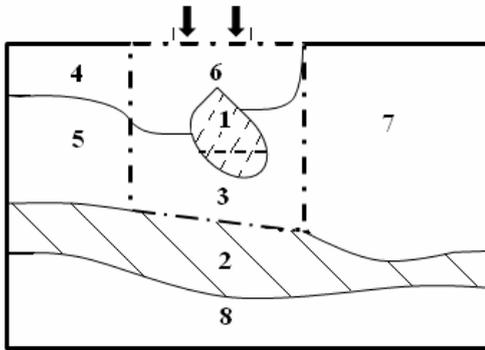


Рис. 1. Расчетная схема: 1-8 — области, отличающиеся гидрогеомеханическими параметрами. 1 — зона затопления, 2 — водоупор. Штрихпунктирная линия — область фильтрации. Стрелки — область инфильтрации

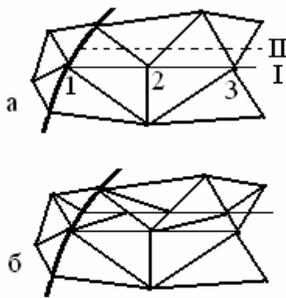


Рис. 2. Линия I — начальный уровень воды, II — изменение уровня воды. а — треугольные элементы для начального уровня воды, б — для нового уровня.

Расчет напряженно-деформированного состояния породы и давления воды основан на решении уравнения равновесия среды для условий плоской деформации, в котором действие воды учтено в виде градиента давления, и уравнении упругого режима фильтрации:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \gamma_{\square} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + k_{xy} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[k_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + k_{yy} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - 1 \right) \right] = \eta \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2)$$

$$k_{xx} = k_x (\cos \alpha)^2 + k_y (\sin \alpha)^2; \quad k_{yy} = k_x (\sin \alpha)^2 + k_y (\cos \alpha)^2; \quad k_{xy} = (k_y - k_x) \sin \alpha \cos \alpha,$$

где σ_{ij} — эффективное напряжение пород, p — давление воды равное $p = \gamma_w h$, h — пьезометрическая высота, η — коэффициент упругости, γ_{\square} и γ_w — удельный вес соответственно породы и воды; k_x, k_y , главные коэффициенты фильтрации, угол α — угол между главной осью тензора коэффициентов фильтрации Y_1 и осью координат Y .

Система уравнений (1), (2) решалась методом конечных треугольных элементов с линейной функцией формы. Применяя метод взвешенных невязок в аппроксимации Галеркина [1] для уравнений (1) получим для упругой деформации систему уравнений:

$$[K]_{\sigma} \{ \varphi \} = \{ f \}_{\sigma} \quad (3)$$

Элементы матрицы жесткости $[K]_{\sigma}$, лежащие на пересечении ряда с номером α и столбца β , находятся суммированием по треугольным элементам содержащими одновременно узел «l» и «m» следующих выражений:

$$K_{u_l u_m} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m E_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m E_3 \right] S,$$

$$K_{u_l v_m} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m E_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m E_3 \right] S,$$

$$K_{v_l u_m} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m E_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m E_3 \right] S,$$

$$K_{v_l v_m} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m E_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m E_3 \right] S, \quad (4)$$

а элементы столбца свободных членов (узловых усилий) $\{f\}_\sigma$ — суммированием по всем треугольным элементам, включающих узел «л», выражений

$$f_{u_l} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l \gamma_B h_{tp} S - t_x L / 2 - K_{u_l u_m} u_{m,0} - K_{u_l v_m} v_{m,0}$$

$$f_{v_l} = \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l \gamma_B h_{tp} S - t_y L / 2 - \gamma_n S / 3 - K_{v_l u_m} u_{m,0} - K_{v_l v_m} v_{m,0} \quad (5)$$

В этих уравнениях столбец $\{\varphi\}$ — столбец узловых горизонтальных смещений u и вертикальных v ; N — линейная функция формы треугольного элемента; S — площадь треугольного элемента; h_{tp} — среднее давление по узлам треугольного элемента;

$$E^* = E / [(1+\nu)(1-2\nu)], \quad E_1 = E^*(1-\nu),$$

$$E_2 = E^* \nu, \quad E_3 = E^*(1-2\nu)/2,$$

где E — модуль деформации, ν — коэффициент Пуассона. В уравнениях (5) первые слагаемые учитываются для водоносных горизонтов ($h \neq 0$), вторые — для грани, длиной L , у которой узел «л» и «м» лежат на границе с известными механическими напряжениями t_x и t_y , последние два — для тех узлов границы, для которой известны смещения, при этом соответствующие элементы матрицы $[K]_\sigma$ не заполняются.

Для уравнения (2), заменяя производную по времени конечной разностью, применяя метод взвешенных невязок, получим систему уравнений:

$$[K]_h \{h^{n+1}\} = \{f\}_h, \quad (6)$$

где элементы матрицы $[K]_h$ и свободные члены $\{f\}_h$, получают суммиро-

ванием по треугольным элементам (аналогично уравнению (3)) соответствующих выражений

$$K_{h_l h_m} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m k_{xx} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m k_{xy} + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m k_{xy} + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m k_{yy} + \lambda_{lm} \frac{\eta}{\Delta t} \right] S, \quad (7)$$

$$f_{h_l} = \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_l k_{xy} + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_l k_{yy} \right] S + 3\lambda_{lm} h_{tp}^n \frac{\eta}{\Delta t} S + wL_x / 2 - K_{h_l h_m} h_{m,0}, \quad (8)$$

$\lambda_{lm} = 1/12$ при $l \neq m$, $\lambda_{lm} = 1/6$ при $l = m$.

В уравнениях (6-8) h^n и h^{n+1} соответственно давление воды, полученное для итерации n и $n+1$. В уравнении (8) третье слагаемое рассчитывается для границы, на которой задан инфильтрационный расход w ; последнее слагаемое — если узел «м» принадлежит границе или треугольному элементу, для которого известно давление, при этом соответствующий элемент матрицы $[K]_h$ не заполняется (если границы водонепроницаемые третье слагаемое обращается в ноль).

Последовательность расчета следующая. На начальный момент времени (отключение системы водоотлива) по уравнению стационарной фильтрации — уравнению (6) в котором $\eta = 0$, рассчитывается поле давлений воды. В затопляемой зоне это давление равно гидростатическому ниже уровня воды в этой зоне (на рис. 1 пунктирная линия в зоне 1) и равно нулю выше этого уровня. Эти значения входят в последнее слагаемое уравнения (8). После расчета давления воды по уравнениям равновесия (3) определяется поле смещений и деформаций. Далее рассчитывается расход воды по

всей границе затапливаемой зоны. Через грань треугольного элемента, лежащую на границе этой поверхности расход Q равен:

$$Q = V_y L n_y - V_x L n_x,$$

где V_x и V_y составляющие скорости фильтрации; n_x , n_y — направляющие косинусы грани, длина которой L . Для линейной функции формы скорости фильтрации V_x и V_y определяются соотношениями

$$\begin{aligned} V_x &= k_{xx} \sum \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m h_m + \\ &+ k_{xy} \left(\sum \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m h_m - 1 \right), \\ V_y &= k_{xy} \sum \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m h_m + \\ &+ k_{yy} \left(\sum \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m h_m - 1 \right). \end{aligned}$$

Считая, что за достаточно малый промежуток времени Δt , расход остается постоянным можно найти объем воды заполняющий затапливаемую зону за это время. По величине пустотности и геометрическим размерам затапливаемой зоны рассчитывается новый уровень воды в этой зоне. Полученные значения давления воды есть значения h^n_0 для уравнения (8). Далее методом последовательных итераций по уравнению (6) определяются новые значения давлений воды в области фильтрации. Общее время итераций должно быть равно интервалу времени, за который определялся объем воды поступивший в затапливаемую зону $\sum \Delta t = \Delta t$. После расчета поля давлений воды по уравнению (3) вычисляются характеристики напряженно деформированного состояния массива. Далее расчет повторяется для новых значений уровня воды. Таким образом, можно определить уровень воды и поле давлений

воды во всей расчетной области для любого момента времени, а, имея эти данные рассчитать смещения и деформации.

В расчетах необходимо перестраивать треугольные элементы в затапливаемой зоне и на ее границе в соответствии с новым уровнем воды (рис.2). Для оценочных расчетов треугольные элементы можно не перестраивать. В таком случае для узлов, расположенных ниже уровня воды (узлы 1-3 на рис. 2, а) надо принимать гидростатическое давление в соответствии с их глубиной. Численный анализ показал, что точность таких расчетов ниже, чем в расчетах с перестройкой треугольных элементов.

Из уравнения (7) следует, что для уменьшения ошибка итерации для интервала времени Δt должно выполняться условие $\Delta t < \lambda_{\text{ин}} \eta / K$, где K равно:

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_i \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m k_{xx} + \\ &+ \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_i \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m k_{xy} + \\ &+ \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_i \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_m k_{xy} + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_i \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_m k_{yy} \end{aligned}$$

В идеальном случае это неравенство должно выполняться для всех треугольных элементов. Ясно, что при $\eta \rightarrow 0$ фильтрационный процесс практически стационарный, т.е. для любого реального интервала времени Δt за который он рассчитывается, при любом времени Δt (т.е. при любом числе итераций) получится результат соответствующий стационарному распределению давлений. Для уточнения вопроса об интервале времени итерации были выполнены расчеты для одномерной задачи, в которой давление воды на «кровле» увеличивалось со временем по линейному закону. Сравнение аналитического решения и

метода конечных элементов показало, что для оценки времени итерации Δt можно рассчитать среднее значение величины

$$\langle K/\lambda_{i\eta} \rangle = (\sum K/\lambda_{i\eta})/N$$

по всем диагональным элементам (N — число слагаемых). В этом соотношении надо исключить слагаемые $\lambda_{i\eta}/K$ величина которых значительно меньше Δt . Тогда за интервал времени Δt можно принять значение равное

$$\Delta t = 1/\langle K_i/\lambda_{i\eta} \rangle.$$

Если фильтрационные характеристики зависят от механических напряжений породы, то это можно учесть, используя в очередной итерации результаты предыдущего расчета. Аналогично можно учесть и зависи-

мость механических параметров породы от давления воды.

Рассмотренная методика может быть применена и при нелинейных деформациях и расчетах, в которых определяется положение свободной поверхности [2]. При нелинейных деформациях, после определения давлений воды, смещения и напряжения породы рассчитываются каким-либо итерационным процессом соответствующим выбранной модели нелинейности. Процесс определения свободной поверхности фактически «совмещен» с расчетом давления воды, однако требует гораздо большего числа итераций. При этом алгоритмически он значительно сложнее, так как требует перестройки треугольных элементов в области свободной поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зинкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
2. Подольский В.А. Применение метода конечных элементов для решения профи-

ной задачи расчета изменения положения депрессионной кривой. Горный информационно-аналитический бюллетень. 2007. Т.4. С. 58—63. **ГИАБ**

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Подольский В.А. — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физики, Новомосковский институт РХТУ им. Д.И. Менделеева, rector@muctr.ru



ГИАБ-ДАЙДЖЕСТ

На российский электроэнергетический рынок пытаются прорваться «умные сети» (smart grid). По задумке предпринимателей, энергокомпаний и потребителей, будут интегрированы коммуникационная магистраль на основе PLC-технологии (Power Line Communication — когда информационный сигнал идет прямо по электрическому проводу) и интеллектуальными устройствами управления в единую интеллектуальную систему. Такая система будет способна осуществлять автоматический менеджмент нагрузки и спроса внутри сети. Дополнительные услуги, которые можно будет предоставлять через эту сеть, существенно повысят ее рентабельность, что приведет к снижению тарифов. К тому же технология smart grid сделала бы электроэнергетический бизнес в России более прозрачным. Подобные системы функционируют уже во многих странах. Однако проект «пробуксовывает» — в условиях существующей устаревшей энергетической инфраструктуры создание интеллектуальных систем является неразрешимой проблемой, оно противоречит нынешнему российскому законодательству, да и общество не готово пока к новому образу жизни.

По материалам журнала «Эксперт» (788), 2012 г.