УДК 539.217

Т.Р. Тедеев

*К ВОПРОСУ УЧЕТА АНИЗОТРОПНОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЛАГОПРОВОДНОСТИ**

Проведен анализ результатов проведенных исследований по распределению полей влажности в пространстве и во времени.

Ключевые слова: влагопроницаемость, анизотропность, коэффициент влагопроводности, математическое моделирование.

Известно [1—5], что жидкость в пористой среде (почва, грунт, горная порода) может находиться под влиянием сил различной природы: адсорбционных (монослойной и полислойной), осмотических, капиллярных и гравитационных. Величина этих сил зависит от минералогического и гранулометрического составов, влажности, плотности скелета среды, концентрации порового раствора и нагрузки, действующей на многофазную среду. Совокупность действия указанных сил определяет статику и динамику влаги в пористой среде. Полный потенциал влажности, зависящий от совокупности действия силовых полей, в этом случае подразделяется на отдельные слагаемые, соответствующие каждому силовому полю:

$$\Phi = \Psi_{wA} + \Psi_{wo} + \Psi_{wc} + \Psi_{wz} + \Psi_{wp} + \dots, \tag{1}$$

где Ψ_{wA} — потенциал полислойной влаги; Ψ_{wo} — потенциал осмотической влаги; Ψ_{wc} — потенциал капиллярной влаги; Ψ_{wz} — потенциал капиллярно-гравитационной влаги; Ψ_{wp} — потенциал от действующей на среду нагрузки.

Следуя основным принципам теории влагопроводности с учетом анизотропности в многофазной грунтовой среде, движение влаги под действием адсорбционно — капиллярно — осмотических сил в случае неустановившегося режима можно представить уравнением:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \theta_W \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_A^{\theta} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \overline{Q}_W, \tag{2}$$

где $W(x,y,t)$ — влажность грунтовой среды; θ_W — коэффициент влагопроводности; K_A^{θ} — коэффициент анизотропности влагопереноса; t — время; x, y — декартовы координаты; $\overline{Q}_W$ — функция внутреннего распределенного источника влажности.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00419-а.

Для корректности решения нестационарного уравнения влагопроницаемости (1) с учетом анизотропности необходимо задать дополнительные условия:

— начальное:

$$W(x, y, o) = f(x, y)\,, \tag{3}$$

— граничное:

$$W(x, y, t)\big|_s = \varphi(P_s, t)\,, \tag{4}$$

где P_s — точка границы исследуемой области D.

Вариационная постановка исследуемой задачи следующая: найти функцию влажности $W(x,y,t)$, определенную и непрерывную в замкнутой области D вместе со своими частными производными первого порядка, удовлетворяющую дополнительным начальным (3) и граничным (4) условиям и сообщающую минимальное значение функционалу

$$J(W) = \iint_D \left\{ \frac{1}{2}\theta_w \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + K_A^\theta \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \right] - \left(\overline{Q}_W - \frac{\partial W}{\partial t} \right) W \right\} dxdy\,. \tag{5}$$

Следует заметить, что в традиционной постановке интеграл (5) отличается от интеграла для стационарного режима влагопереноса только наличием дополнительного члена, учитывающего изменение влажности во времени:

$$J(W) = J_0(w) + \iint_D \frac{\partial W}{\partial t} W dxdy\,. \tag{6}$$

Заданную область D представим совокупностью М конечных элементов, каждый из которых имеет n узловых точек [6]. Примем, что в пределах конечного элемента справедливо следующее соотношение:

$$W\,(x, y, t) = [N(x, y)]\overline{W}_э(t)\,, \tag{7}$$

где $[N(x,y)]$ — матрица функции формы конечного элемента; $\overline{W}_э(t)$ — вектор узловых значений функции влажности по элементу.

Интеграл (5) с учетом зависимости (7) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} J_э(W) = \iint_{D_э} \frac{1}{2}\theta_w \left[\left(\frac{\partial [N]}{\partial x} \overline{W_э} \right)^2 + K_A^\theta \left(\frac{\partial [N]}{\partial x} \overline{W_э} \right)^2 \right] dxdy - \\ - \iint_{D_э} Q_W [N] \overline{W_э} dxdy + \iint_{D_э} \frac{\partial([N]\overline{W})}{\partial t} [N] \overline{W_э} dxdy \end{aligned} \tag{8}$$

Отдельно для каждого слагаемого из зависимости (8) преобразованием можно получить:

$$J_э^{(1)} = \frac{1}{2} \overline{W}_э^T \left\{ \iint_{D_э} \theta_w \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + K_A^\theta \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dxdy \right\} \overline{W}_э\,, \tag{9}$$

$$J_э^{(2)} = -\overline{W}_э^T \iint_{D_э} Q_w [N]^T \, dxdy \,, \tag{10}$$

$$J_э^{(3)} = \overline{W}_э^T \left\{ \iint_{D_э} [N]^T [N] dxdy \right\} \frac{\partial \overline{W}_э}{\partial t} \,, \tag{11}$$

где т — знак транспонирования.

В пределах конечного элемента, по правилам матричного анализа, интеграл (8) принимает вид

$$J_э(W) = \frac{1}{2} \bar{W}_э^T [h]_э \bar{W}_э + \bar{W}_э^T \bar{F}_э + \bar{W}_э^T [S]_э \frac{\partial \bar{W}_э}{\partial t} \,, \tag{12}$$

где $$[h]_э = \iint_{D_э} \theta_w \left(\frac{\partial [N]^T}{dx} \frac{\partial [N]}{dx} + K_A^\theta \frac{\partial [N]^T}{dy} \frac{\partial [N]}{dy} \right) dxdy \tag{13}$$

— матрица жесткости конечного элемента;

$$\bar{F}_э = -\iint_{D_э} Q_w [N]^T \, dxdy \tag{14}$$

— грузовой вектор или вектор свободных членов

$$[S]_э = \iint_{D_э} [N]^T [N] dxdy \tag{15}$$

— матрица влагоемкости конечного элемента.

Зависимость (12) для всей области D окончательно принимает вид:

$$J(W) = \bar{W}^T [S] \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{W}^T [H] \bar{W} + \bar{W}^T \bar{F} \,, \tag{16}$$

где $[S] = \sum_M [S]_э$, $[H] = \sum_M [h]_э$ — суммарные матрицы влагоемкости и жесткости всей системы элементов.

Для всей области D условием минимизации интеграла (16) можно получить систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$[S] \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + [H] \bar{W} + \bar{F} = 0 \,. \tag{17}$$

Для практических расчетов с целью построения экономной вычислительной программы, систему (17) можно привести к нормальному виду:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + [H]_n \bar{W} + \bar{F}_{\,n} = 0 \,, \tag{18}$$

где для матрицы жесткости всей системы имеем:

$$[H]_n = [S]^{-1} [H] \,, \tag{19}$$

а также для вектора свободных членов всей системы:

$$\bar{F}_n = [S]^{-1} \bar{F} \,. \tag{20}$$

Разработанную методику определения полей влажности методом конечных элементов надо рассматривать как теоретическую основу решения поставленной задачи, которая должна быть преобразована в вычислительную программу. Сама программа по существу является аппаратом математического моделирования всех процессов, протекающих в грунтовой среде. Полученная нормализованная система дифференциальных уравнений (18) решалась методом Рунге-Кутта. В первом приближении для корректности решения нестационарного уравнения влагопроницаемости было принято условие постоянства. При этом система (18) была дополнена соответствующим начальным условием

$W(x,y,0) = f(x,y) = W_0$,

а на границе расчетной области граничным условием

$W(x,y,t) = f(x,y,t) = W_s$

На основе разработанной методики были решены модельные задачи по определению нестационарных полей влажности в многофазной грунтовой среде. Размеры расчетной

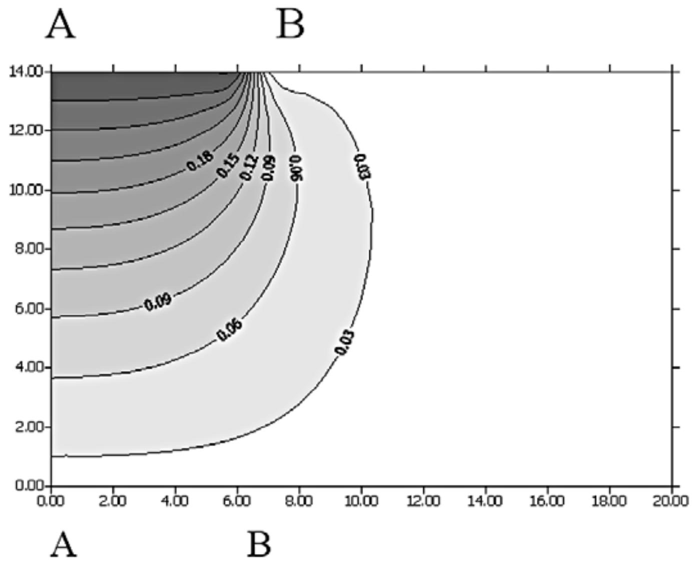

Рис. 1. Распределение поля влажности в многофазной грунтовой среде (время – 6 лет, $K_A^0 = 3$)

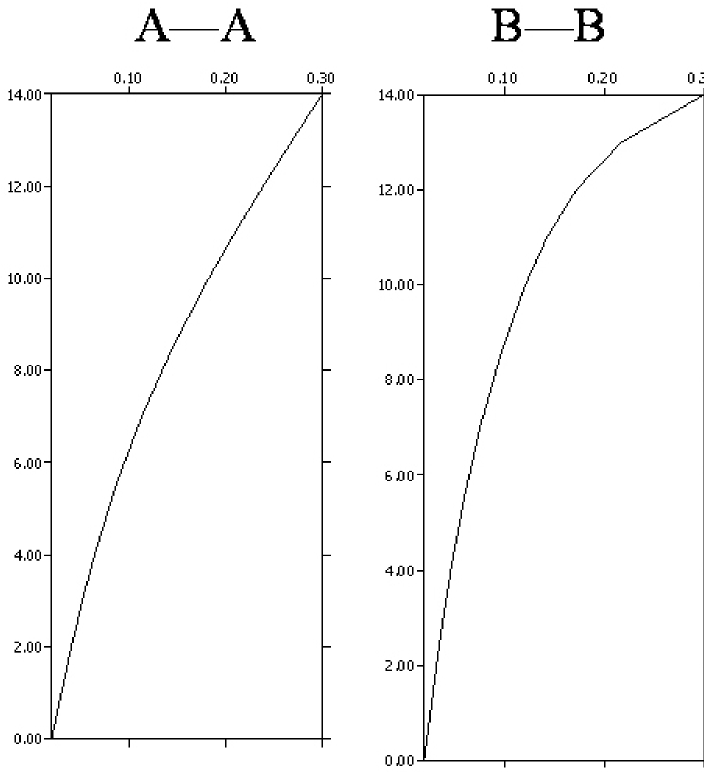

Рис. 2. Изменение профиля влажности по глубине расчетной области

области – 14х40м, начальное поле влажности W_0 = 0.02. На границе полуплоскости по ограниченной полосе поддерживается влажность W_s = 0.3, коэффициент влагопроводности $\theta_w(W)$ = 0.18х10^{-3} $м^2$/ч. Условия на боковой поверхности расчетной области отвечают требованиям влагообмена со внешней средой. На рис.1-2 приводятся результаты решения задач по определению полей влажности в многофазной грунтовой среде.

В целом анализ результатов проведенных исследовании по распределению полей влажности в пространстве и во времени позволяет сделать следующие выводы:

Полученное решение дифференциального уравнения анизотропной влагопроницаемости методом конечных элементов позволяет определить характерные зоны влагопроницаемости, что ранее установлено экспериментальными исследованиями других авторов [3].

Основным преимуществом предложенной методики является возможность рассмотрения широкого диапазона изменения коэффициента анизотропности многофазной системы на исследуемом интервале влажности.

Разработанная методика позволяет также учесть влияние коэффициента влагопроводности на общий вид профиля влажности и скорость проницания влаги (достижения фронта смачивания) в грунтовой среде.

Важным преимуществом предложенной методики является возможность рассмотрения различных теоретических и экспериментальных законов изменения коэффициента влагопроводности на исследуемом интервале влажности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ананьев В.П., Передельский Л.В.* Инженерная геология и гидрогеология — М.: Высшая школа, 1980. — 271 с.

2. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.

3. *Бэр Я.Д., Заславский С., Ирмей С.* Физико-математические вопросы фильтрации воды. — М.: Мир, 1971. — 452с.

4. *Цытович Н.А., Тер-Мартиросян З.Г.* Основы прикладной геомеханики в строительстве. — М.: Высшая школа, 1981.— 318 с.

5. *Тедеев Т.Р.* К вопросу влагопроницаемости грунтовой среды // Труды СКГТУ. — Владикавказ, 1998. — 8 с.

6. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. — Пер. с англ. — М.: Недра, 1974. — 240 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Тедеев Тимур Рутенович — кандидат технических наук, старший научный сотрудник,
Южный математический институт, backoffice@smath.ru