УДК 622.013

А.В. Агейкин, А.Б. Агафонова, Н.А. Аверчева, В.В. Агафонов

АНАЛИЗ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МЕТОДОВ И КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХСЯ В ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ ПРИ ОЦЕНКЕ И ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ УГОЛЬНЫХ ШАХТ

Рассмотрены основные оптимизационные методы и критерии оптимальности, которые на современном этапе развития оптимизационных моделей используются при оптимизации параметров угольных шахт.

Ключевые слова: критерий оптимальности, оптимизация, параметры, угольные шахты.

Анализ методов, использующихся в том или ином прикладном аспекте при оптимизации параметров шахт в настоящее время показал, что их условно можно разделить на следующие основные группы:

1. Методы линейного программирования с моделями общей задачи линейного программирования, линейного программирования в условиях определенности (детерминированная постановка), параметрического линейного программирования, дробно-линейного программирования, целочисленного линейного программирования.

В настоящее время существуют две основные группы методов решения задач линейного программирования:

• симплексный метод и его модификации;

• метод внутренней точки и его модификации

2. Методы безусловной оптимизации (минимизации) — методы нелинейного программирования. Методы решения задач безусловной минимизации (оптимизации) большинство авторов делят на три группы:

• первая группа — методы нулевого порядка решения задач безусловной минимизации. К ним относятся такие методы, в которых вычисляются и используются только значения минимизируемой функции:

• метод конфигурации (Хука-Дживса);

• метод деформируемого многогранника (Нелдера — Мида)

• метод Розенброка;

• метод Пауэлла;

• адаптивный метод случайного поиска;

• метод сопряженных направлений;

• методы одномерной оптимизации;

вторая группа — методы первого порядка (градиентные методы) решения задач безусловной минимизации. К ним относятся методы, в которых вычисляются первые частные производные минимизируемой функции;

• метод градиентного спуска с постоянным шагом;

• метод наискорейшего градиентного спуска;

• метод Флетчера — Ривса (метод сопряженных градиентов);

• методы переменной метрики (метод Дэвидона — Флетчера — Пауэлла (ДФП), метод Бройдена — Флетчера — Шэнно и др.);

• метод Гаусса — Зейделя и другие;

• метод покоординатного спуска,

третья группа — методы второго порядка решения задач безусловной минимизации. К ним относятся такие методы, в которых вычисляются вторые частные производные минимизируемой функции;

- метод Ньютона;
- метод Ньютона — Рафсона;
- метод Левенберга — Марквардта.

3. Методы одномерной оптимизации включают:

- метод дихотомии;
- метод золотого сечения;
- метод Фибоначчи;
- метод равномерного поиска и их модификации

4. Методы нелинейного программирования с моделями условной оптимизации (сепарабельное программирование, геометрическое программирование).

5. Методы динамического программирования.

Методы линейного программирования

В краткой форме с помощью знаков суммирования модель линейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

Определить оптимальные значения переменных $x_1,\ldots, x_n$, максимизирующие целевую функцию

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,.$$

при выполнении системы линейных ограничений неравенств

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \\ i = \overline{1,m};\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Модели параметрического линейного программирования

На практике значения коэффициентов и свободных членов задачи линейного программирования реально изменяются в некоторых пределах (интервалах). Найдя оптимальный проект некоторой экономической задачи при фиксированных значениях ci, aij, b_i, полученных из опыта, необходимо каким-либо способом определить, в каких допустимых пределах можно их изменить, чтобы проект оставался оптимальным. Это и составляет предмет параметрического линейного программирования.

Алгоритмическая структура общей схемы достаточно трудоемка. Но в некоторых частных случаях, нередко встречающихся в практике проектирования горнотехнических систем, вычислительная процедура существенно упрощается и вычисление оптимальных решений для всего диапазона изменений параметра λ лишь немного сложнее решения задачи при фиксировании λ.

Модели дробно-линейного программирования

В общем виде математическая постановка задачи дробно-линейного программирования заключается в том, чтобы максимизировать целевую функцию Z:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ge b_j \left(i = \overline{1,m}\right); \\ x_j \ge 0;\ \ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} — известные постоянные коэффициенты, причем

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j > 0.$$

Целочисленное линейное программирование

Целочисленность и дискретность возникают из-за физической неделимости объектов. Если, например, в задаче рассматривается планирование производства неделимых видов, количество панелей, горизонтов и т.д., то применение методов решения задач целочисленного линейного программирования нецелесообразно по причине сложности методов их решения, так как в этих случаях более оправдано применение методов решения с последующим округлением полученных нецелочисленных значений переменных до их целочисленного значения.

Модель общей целочисленной задачи линейного программирования может быть представлена следующим образом.

Определить оптимальные значения целочисленных переменных x_1, $x_2,\ldots,x_n$, максимизирующих (минимизирующих) целевую функцию

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при выполнении системы линейных ограничений неравенств:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_j \quad i = 1,\ldots,m \\ i \le x_j \le u \quad j = 1,\ldots,n \\ x_j \text{ — целое;} \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Целочисленные задачи линейного программирования можно разделить следующим образом:

1. Полностью целочисленные (все переменные целочисленные).
2. Смешанные (частично целочисленные) (часть переменных целочисленных, остальная часть — нецелочисленные).
3. С булевыми переменными.

Методы решения целочисленных задач линейного программирования разделяются на три основные группы, принципиально разнящиеся по подходу к задаче:

1. Методы отсечения;
2. Комбинаторные методы;
3. Приближенные методы.

Методы и модели нелинейного программирования (условная оптимизация)

Общая задача нелинейного программирования заключается в определении экстремума целевой функции многих переменных при заданных ограничениях в виде равенств и (или) неравенств. Ограничения могут быть линейными и (или) нелинейными. Но общепринятой является постановка, в которой исключаются из рассмотрения следующие специальные случаи:

1. Переменные принимают лишь целочисленные значения (нелинейное целочисленное программирование).
2. Ограничения включают как параметр время, при этом используются дифференциальные уравнения (оптимальное управление, динамическая оптимизация).

Экстремальные задачи (задачи оптимизации), в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо и то, и другое нелинейны, называются задачами нелинейного программирования.

Математическая постановка или модель задач нелинейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

определить оптимальные значения переменных x_1, $x_2,\ldots,x_n$, минимизирующих целевую функцию:

$$f\left(x_1, x_2,\ldots, x_j,\ldots, x_n\right)$$

при выполнении m линейных и (или) нелинейных ограничений неравенств:

$$h_i\left(x_1, x_2,\ldots, x_n\right) = 0; \;\; i = \overline{1,m}$$

и $(p — m)$ линейных и (или) нелинейных ограничений неравенств

$$g_i\left(x_1, x_2,\ldots, x_n\right) \ge 0;$$

$$i = \overline{m+1,p}; \;\; x_j \ge 0; \;\; i = \overline{(1,n)}.$$

Применительно к задачам выбора и обоснования проектных решений в горном деле рассматриваются некоторые весьма важные частные случаи, когда целевая функция сепарабельная или квадратичная.

Сепарабельное программирование. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Функция $F(x_\downarrow 1, x_\downarrow 1,\ldots,x_\downarrow n,)$ называется сепарабельной, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной:

$$F = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Приближенным методом решения задачи нелинейного программирования с сепарабельными функциями является метод кусочно-линейной аппроксимации.

Геометрическое программирование

Геометрическое программирование является разделом нелинейного программирования и применяется особенно в области технического проектирования и других областях.

Геометрическое программирование — теория и методы отыскания наименьших значений функций специального вида, называемых позиномами.

Модель задачи геометрического программирования может быть сформулирована следующим образом:

Определить оптимальные значения искомых переменных, минимизирующих функцию:

$$\min g(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

При выполнении системы ограничений:

$$\begin{cases} L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i; \ \ i = \overline{1, m}; \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Практически рассматриваются задачи, не содержащие ограничений, например:

$$g(x, y) = x^{\frac{1}{3}} + 2x^2y^{-3} + xy^{\frac{1}{2}}.$$

Методы безусловной минимизации (оптимизации) функций многих переменных

Математическая постановка (модель) задач нелинейного программирования без ограничений (равенств или неравенств), представляющая собой задачу безусловной минимизации (оптимизации), может быть сформулирована следующим образом:

определить оптимальные значения переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ минимизирующие целевую функцию

$$\min_{x \in X} f(x) = \min_{x \in R} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где *f(x)* — функция многих переменных, непрывна и дифференцируема (не менее 2-го порядка); X — некоторое подмножество n-мерного евклидова пространства E^n, XcE^n.

Методы решения задач безусловной минимизации (оптимизации) большинство авторов делят на три группы:

- первая группа — методы нулевого порядка решения задач (безусловной минимизации. К ним относятся такие методы, в которых вычисляются и используются только значения минимизируемой функции;
- вторая группа — методы первого порядка (градиентные методы) решения задач безусловной минимизации. К ним относятся методы, в которых вычисляются первые частные производные минимизируемой функции;
- третья группа — методы второго порядка решения задач безусловной минимизации. К ним относятся такие методы, в которых вычисляются вторые частные производные минимизируемой функции.

Методы безусловной минимизации нулевого порядка функций многих переменных

В этих методах для определения направления спуска не требуется вычислять производные целевой функции. Направление минимизации в этом случае полностью определяется последовательными вычислениями значений функции. Критерий оптимальности может быть задан не в явном виде, а системой уравнений. В этом случае аналитическое или численное определение производных становится очень сложным, а иногда невозможным. Для решения таких практических задач оптимизации могут быть успешно применены методы нулевого порядка.

Критерии оптимальности
КЛАССИЧЕСКИЕ
1. Максиминный критерий Вальда
2. Критерий Байеса-Лапласа
3. Минимаксный критерий Сэвиджа
ПРОИЗВОДНЫЕ
1. Критерий Гурвица
2. Критерий Ходжа-Лемана
3. Критерий Гермейера

Методы безусловной минимизации первого порядка

Методы первого порядка, использующие значения первой производной функции, являются градиентными методами и представляют собой одну из наиболее распространенных групп методов поиска безусловного экстремума. Все они используют значения градиента функции $f(x)$.

Методы безусловной минимизации второго порядка

Методы безусловной минимизации (оптимизации) второго порядка используют вторые частные производные минимизируемой функции многих переменных $f(x)$. Напомним, что градиентные методы, включая метод наибольшего спуска, используют линейную аппроксимацию целевой функции

$$f(x) \approx \Phi(x) = f(x^n) + f'(x^n)(x - x^n).$$

Все методы второго порядка являются прямым обобщением известного метода Ньютона отыскания корня уравнения $\varphi(x) = 0$,

где $\varphi(x)$ — скалярная функция скалярного аргумента.

Классификация критериев оптимальности (принятия решений) в условиях неопределенности информации и принятия решений при риске приведены в таблице

Анализ критериев оптимальности показал, что в условиях детерминированной постановки следует ориентироваться на *NPV* («Чистый дисконтированный доход»), а в условиях неопределенности информации и принятия решений при риске на минимаксный критерий Сэвиджа (динамическая или вероятностная постановка), который рассчитан на самую пессимистическую стратегию и обеспечивает минимальный риск при принятии решения по обоснованию основных параметров угольных шахт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Швецов А.Н.* Агентно-ориентированные системы: от формальных моделей к промышленным приложениям, 2008.

2. *Прангишвили И.В.* Энтропийные и другие системные закономерности. Вопросы управления сложными системами. М.: 2003 — 428 с.

3. *Методология* IDEFO. http://www.moy-univer.ru/metodologiya-idefo. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Агейкин А.В.— студент,
Агафонова Алла Борисовна — старший преподаватель,
Аверчева Н.А.— студент,
Агафонов В.В. — аспирант,
Московский государственный горный университет, ud@msmu.ru.