© Л.Д. Певзнер, В.Г. Костиков,
О.А. Леттиев, Р.В. Костиков, 2012

УДК 622.73

Л.Д. Певзнер, В.Г. Костиков, О.А. Леттиев, Р.В. Костиков

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РУДОИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Разработана математическая модель процесса рудоизмельчения и его решению, которое может быть использовано для оценки выхода продукта необходимого класса. Приводится анализ литературы, а также рассмотрены различные пути автоматизации процесса измельчения. Кроме того, предложен вариант решения уравнения диффузии, приемлемый на практике для создания на его основе математической модели процесса рудоизмельчения.

Ключевые слова: руда математическая модель рудоподготовка уравнение диффузии.

Одними из наиболее энергоемких и трудоемких процессов в технологии производства дисперсных материалов являются операции сокращения крупности кускового материала, затраты на эти процессы занимают 30—50 % в себестоимости горно-обогатительного передела. Совокупность процессов обработки руды разнообразными методами для получения гранулометрического и вещественного составов, определяемых требованиями последующих переделов или нормативами на готовую продукцию называется процессом рудоподготовки. Как правило на комбинатах по переработке руд цветных и черных металлов, в химическом производстве данный этап предшествует этапу обогащения руд.

Исследования показывают [1], что максимальная эффективность извлечения полезного компонента при обогащении руд достигается при крупности части 0,074 мм.

Как видно из рис. 1 этап рудоподготовки состоит из нескольких процессов:

1. Процесс дробления руды. К дроблению относятся механические процессы, посредством которых добытая в руднике порода разбивается до размеров, подходящих для дальнейшего измельчения посредством размалывания. Устройства, которые разбивают добытое в руднике сырье, относятся к первичным дробилкам; дробилки щекового и конусного типов среди них являются основными.

2. Процесс предварительного измельчения руды представляет собой предварительный этап получения материала необходимой крупности. Обычно производится в водной среде посредством машин, в которых порода измельчается при помощи гальки, образующейся из твердых кусков руды или вмещающей породы.

3. Процесс измельчения руды представляет собой конечный этап сокращения крупности кускового материала. Как правило, измельчение на этой стадии производится в водной среде посредством машин, в которых порода измельчается при помощи чугунных или стальных шаров. В результате происходит об-

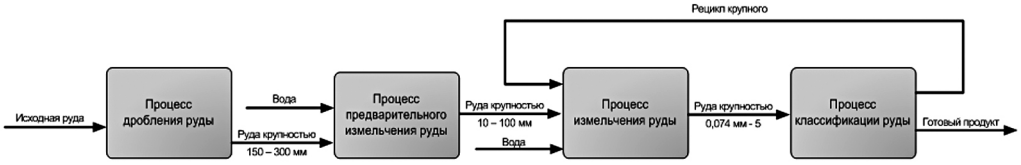

Рис. 1. Структура процессов этапа рудоподготовки

разование пульпы с повышенным содержанием частиц класса крупности – 0,074 мм (порядка 70-80 % от общей массы пульпы).

4. Процесс классификации руды необходим для приготовления материала определенной размерности, поступающего на обогащение. При этом в результате процесса выделяется крупная фракция пульпы, которая возвращается на доизмельчение.

С позиции управления наиболее важными и сложными являются непрерывные процессы измельчения руды. Сложность управления заключается в том, что оптимальный режим находится в непосредственной близости от предела устойчивости, что с учетом значительных транспортных запаздываний еще больше осложняет задачу его поддержания.

Для анализа процесса необходим выбор физико-математической модели, позволяющей установить связь между параметрами процесса. В литературе, посвящённой рудоподготовке [3, 4, 5], предлагается ряд моделей для описания процесса измельчения руды, такие как модель идеального перемешивания, полного вытеснения и ячеечная модель, которая может представлять комбинацию первых двух. Существенным недостатком этих подходов [5] является невозможность описать явление перемешивания (обратного движения) материала в барабане мельницы, для решения этой проблемы можно применить модель, основанную на описании процесса измельчения при помощи уравнения диффузии. В этой модели перемешивание материала в потоке (в направлении движения) описывается выражением, формально соответствующим закону молекулярной диффузии Фика [4]. По аналогии с коэффициентом молекулярной диффузии в законе Фика степень продольного перемешивания в диффузионной модели характеризуется коэффициентом продольного перемешивания D_L. Применительно к процессам измельчения этот коэффициент определяет меру смещения частиц различной дисперсности относительно друг друга в осевом направлении.

Модель, основанная на принципе диффузии, позволяет наиболее точно описать процесс измельчения, объединяя в себе преимущества модели идеального вытеснения и модели полного перемешивания, она позволяет описать такие явления как застойные зоны и обратное перемешивание в теле измельчительного агрегата [5].

Для того чтобы получить математическую модель процесса измельчения, представим мельницу в виде структуры потоков (см. рис. 2).

Уравнение сохранения массы системы, представленной на рис. 2, будет выглядеть следующим образом:

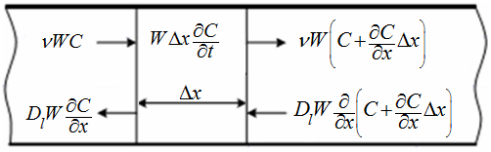

Рис. 2. Модель структуры потоков мельничного агрегата с обратным перемешиванием: *v* – скорость движения массы (м/с), *W* – интенсивность подачи массы (т/м), *C* – концентрация вещества класса крупности -0,074 мм (г/т), D_i – коэффициент обратного перемешивания (м^2/с)

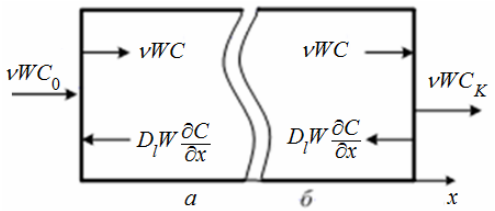

Рис. 3. Материальный баланс на концах измельчительного агрегата: *а—у* левого края агрегата, *б–у* правого края агрегата: C_0 – концентрация вещества класса крупности -0,074 мм, в загрузке мельницы, $C_к$ – концентрация вещества класса крупности -0,074мм, на выходе из аппарата

$$W\Delta x\frac{\partial C}{\partial t}=\nu WC+D_l W\frac{\partial}{\partial x}\left(C+\frac{\partial C}{\partial x}\Delta x\right)-$$

$$-\nu W\left(C+\frac{\partial C}{\partial x}\Delta x\right)-D_l W\frac{\partial C}{\partial x} \qquad (1)$$

После преобразования и перехода к пределу при $\Delta x\to 0$, получим уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D_l\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial C}{\partial x}.$$

Уравнение (2) представляет собой основное уравнение разрабатываемой математической модели процесса измельчения.

Очевидно, что для уравнения (1) должны быть заданы одно начальное и два граничных условия. В качестве начального условия зададим профиль концентраций по аппарату в начальный момент времени: $C(0,x)=C_0(x)$ при $t=0$.

Граничный условия зададим исходя из условия материального баланса на концах аппарата (рис. 3).

Рассмотрим левый конец аппарата, в который поступает руда с некоторой средней скоростью ν (рис. 3, а). Сумма потоков подходящих к границе, должна быть равна потоку вещества, отходящего от границы, таким образом, для левой границы получаем:

$$\nu(C_0-C)+D_l\frac{\partial C}{\partial x}=0\cdot \qquad (1)$$

Учитывая то, что мельница является аппаратом конечной длинны, можно предположить что $C\approx C_K$, с учетом этого граничное условие у правого края аппарата:

$$\frac{dC}{dx} = 0\,. \qquad (2)$$

Для упрощения уравнений и нахождения передаточной функции процесса измельчения, введем безразмерные переменные:

$$z = \frac{x}{l}, \qquad (3)$$

$$\theta = \frac{t}{\bar{t}}, \qquad (4)$$

где l — длина мельницы, t — время, в которое рассматривается частица, x — координата, в которой находится рассматриваемая частица, $\bar{t}$ — среднее время нахождения всех частиц в мельнице.

После подстановки введенных коэффициентов в уравнение (2), получаем:

$$\frac{\nu l}{D_l}\frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\nu l}{D_l}\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \qquad (5)$$

Множитель $(\nu l)/D_l$ представляет собой безразмерное число Пекле (Pe), с учетом этого уравнение (7) будет выглядеть следующим образом

$$Pe\frac{\partial C}{\partial \theta} + Pe\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\,. \qquad (6)$$

Граничные условия (3) и (4) также приведем к безразмерной форме

$$\left(C_0 - C\right) + \frac{1}{Pe}\frac{dC}{dz} = 0 \quad при \quad z = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{dC}{dz} = 0 \quad при \quad z = 1 \qquad (8)$$

Получим передаточную функцию диффузионной модели процесса измельчения, для этого применим преобразование Лапласа к уравнению (8), в результате чего получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\tilde{C}}{dz^2} - Pe\frac{d\tilde{C}}{dz} - Pe\,p\tilde{C} = 0 \qquad (9)$$

Применяя преобразование Лапласа к граничным условиям (9) и (10), получим следующее

$$1 - \tilde{C} + \frac{1}{Pe}\frac{d\tilde{C}}{dz} = 0 \quad при \quad z = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{d\tilde{C}}{dz} = 0 \quad при \quad z = 1. \qquad (11)$$

Найдем решение уравнения (11) относительно искомой, преобразованной по Лапласу концентрации $\tilde{C}(p)$, решая соответствующее характеристическое уравнение, с учетом граничных условий [2]. В результате получаем искомую

передаточную функцию, описывающую процесс получения фракции требуемого класса крупности:

$$W(p)=\frac{4\sqrt{\frac{Pe+4p}{Pe}}\;e^{Pe/2}}{\left(\sqrt{\frac{Pe+4p}{Pe}}+1\right)^2 e^{\sqrt{\frac{Pe^2}{4}+Pe\,p}}-\left(\sqrt{\frac{Pe+4p}{Pe}}-1\right)^2 e^{-\sqrt{\frac{Pe^2}{4}+Pe\,p}}} \qquad (12)$$

Как видно из уравнения (14) основным параметром модели является число Пекле, которое определяется как $(\nu l)/D_l$, неизвестными в этом уравнении являются продольная скорость движения потока ν и коэффициент диффузии D_l, для их определения воспользуемся данными эксперимента над мельницей МШЦ 50*84, установленной на золотоизвлекательной фабрике горнодобывающего и перерабатывающего предприятия на базе руд Олимпиадинского месторождения. Характеристики мельницы МШЦ 50*84 представлены в табл. 1.

Целью эксперимента было установить отклик измельчающего агрегата на ступенчатое входное воздействие. Входное воздействие было реализовано методом ступенчатого (с точки зрения инерционности процесса) изменения интенсивности подачи питания мельницы.

Схема установки, над которой проводился эксперимент, представлена на рисунке 4. Исходная руда с карьера подается в шнекозубчатую дробилку поз.5 (1-2). Негабаритные куски руды крупностью +900мм разбиваются бутобоем поз.2, на решетке поз.1(1-2). Дробленая руда по наклонному конвейеру (пластинчатому питателю) поз.6 (1-2) транспортируется в бункера дозировки дробленой руды в мельницу поз.7 (1-4) и образует над ними конус дробленой руды массой 2000 — 2500 кг.

Дробленая руда из двух бункеров (поз.7) с помощью вибропитателей поз. 8(1-2) подается на ленточный конвейер поз.9 и дозируется в мельницу. Для обеспечения условий эксперимента при помощи вибропитателей поз.8 (1,2) была увеличена подача руды на конвейер поз.9, скорость которого также была увеличена таким образом, чтобы нагрузка на конвейер осталась неизменной.

Таблица 1

Характеристики мельницы МШЦ 50*84

Тип мельницы	МШЦ 50*84
Длина барабана, м	8,4
Диаметр барабана, м	5,0
Нагрузка по питанию, т/час	400-500
Массовая доля твердого в сливе мельницы, %	68-72
Коэффициент заполнения мельниц измельчающей средой, отн. ед.	0,4
Максимальный диаметр загружаемых шаров, мм	80
Массовая доля класса -0.074 мм в подбутарном продукте не ниже, %	68-70
Удельный расход шаров, кг/т руды	1,0

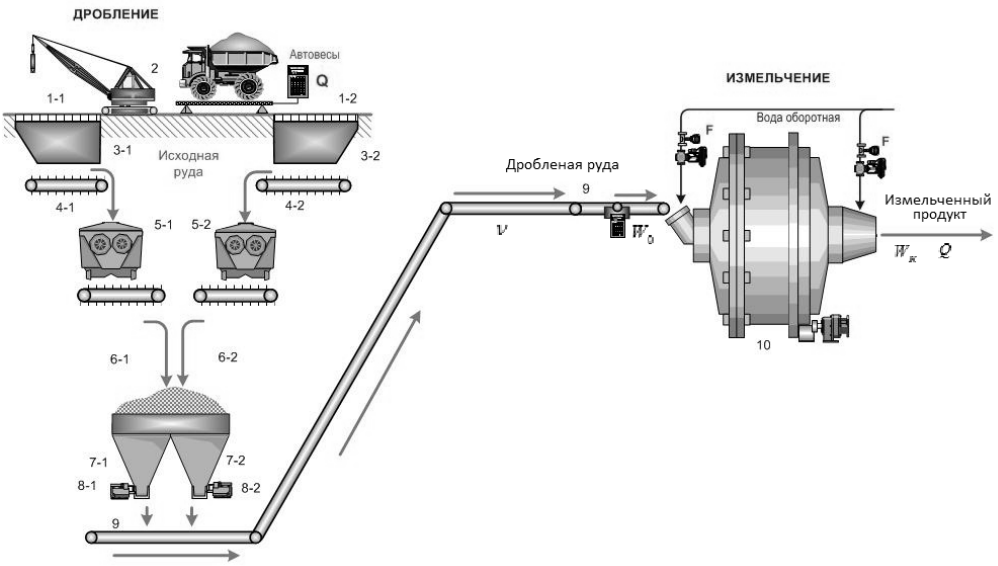

Рис. 1. Схема рудоизмельчительной установки.

В результате чего общая интенсивность подачи руды в мельницу была увеличена с 400 т/час до 450 т/час. При этом подвергались измерению следующие величины:

- Интенсивность подачи руды в мельницу W_0 (т/час);
- Интенсивность потока руды на выходе из мельницы W_K (т/ч);
- Концентрация частиц класса крупности -0,074 мм Q (%).

График изменения интенсивности питания мельницы представлен на рис. 5.

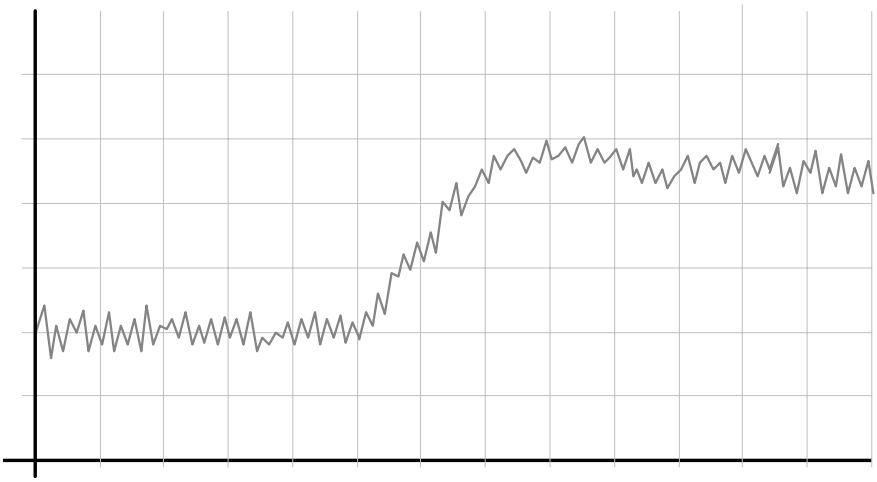

Рис. 2. График подачи руды в мельницу

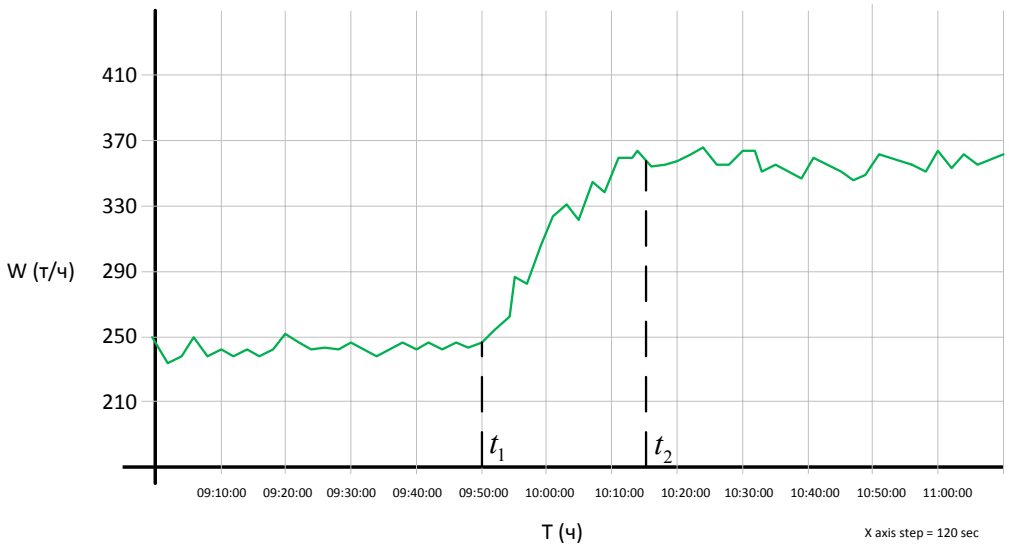

Рис. 3. Выход фракции крупности 0,074 мм в готовом продукте мельницы

На рис. 6 представлен график выхода фракции крупности -0,074 мм в готовом продукте мельницы. На графике: t_1 — время возникновения отклика на воздействие, t_2 — время возникновения установившегося значения.

Для определения недостающих коэффициентов передаточной функции выведем уравнения связи между этими параметрами и моментными характеристиками экспериментальной кривой.

Запишем уравнение диффузионной модели (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\nu}{D_l}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{D_l}\frac{\partial C}{\partial t} \qquad (13)$$

Составим схему материального баланса на загрузке и выходе мельницы (рис.7), при этом предположим что ступенчатое воздействие происходит в момент $t = 0$, соответственно величина воздействия может быть записана как $W_2 \cdot 1(t)$, где W_2 это величина на которую была увеличена интенсивность питания мельницы.

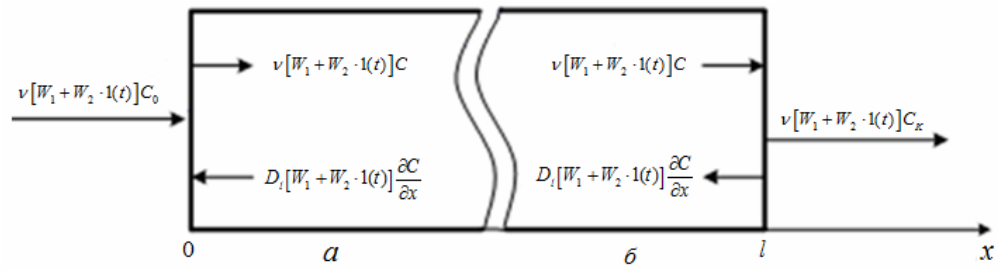

Рис. 4. Материальный баланс на концах измельчительного агрегата, при наличии ступенчатого воздействия: *а* — у левого края агрегата, *б* – у правого края агрегата

В соответствии с рис.7, а также учитывая, что концентрация требуемого класса крупности во входящем потоке крайне мала по сравнению с мельничным продуктом, при $x = 0$ уравнения материального баланса будет выглядеть следующим образом:

$$D_l \frac{dC}{dx} = \nu C. \tag{14}$$

При $x = l$ концентрация C равна искомой C_K, таким образом, уравнение материального баланса имеет вид:

$$D_l \frac{dC}{dx} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dC}{dx} = 0. \tag{15}$$

Преобразуем уравнение диффузионной модели, для чего умножим обе части на t и проинтегрируем от 0 до ∞, кроме того введем замену $\int_0^\infty tCdt = \alpha$, а $\int_0^\infty t\frac{\partial C}{\partial t}dt = \int_0^\infty tdC = \beta.$, таким образом получим:

$$\int_0^\infty t\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}dt - \frac{\nu}{D_l}\int_0^\infty t\frac{\partial C}{\partial x}dt = \frac{1}{D_l}\int_0^\infty t\frac{\partial C}{\partial t}dt \tag{16}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{\nu}{D_l}\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\beta}{D_l}. \tag{17}$$

Преобразуем также граничные условия, при $x = 0$ получим:

$$D_l\int_0^\infty t\frac{dC}{dx}dt = \nu\int_0^\infty tCdt, \text{ или } \alpha - \frac{D_l}{\nu}\frac{d\alpha}{dx} = 0. \tag{18}$$

При $x = l$

$$\frac{d\alpha}{dx} = 0. \tag{19}$$

Найдем решение уравнения (16), в результате получим следующее выражение:

$$\alpha = \frac{\beta}{D_l}x - \frac{\beta}{D_l}\cdot e^{-\frac{v}{D_l}l}\cdot\frac{D_l}{v}e^{\frac{v}{D_l}x} + \frac{D_l\beta}{v^2} = \frac{\beta}{D_l}x - \frac{\beta}{v}e^{\frac{v}{D_l}(x-l)} + \frac{D_l\beta}{v^2}. \tag{20}$$

При $x = l$ получим:

$$\alpha = \frac{\beta}{D_l}l - \frac{\beta}{v} + \frac{D_l\beta}{v^2} = \beta\left(\frac{l}{D_l} - \frac{1}{v} + \frac{D_l}{v^2}\right) \tag{21}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\int_0^\infty tCdt}{\int_0^\infty Cdt} = \frac{l}{D_l} - \frac{1}{v} + \frac{D_l}{v^2} \tag{22}$$

Используя уравнение (24), а также экспериментальные кривые (рис.5,6) определим коэффициент обратной диффузии D_l, для этого определим в интервале t_1, t_2 суммы $\sum C\Delta t$ и $\sum tC\Delta t$, которыми можно заменить соответствующие интегралы. Таким образом, формула для нахождения коэффициента обратной диффузии будет выглядеть следующим образом:

$$D_l^2 \frac{1}{v^2} - D_l \frac{1}{v} + l - \frac{\sum tC\Delta t}{\sum C\Delta t} = 0 \qquad (23)$$

$$D_l = \frac{v}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\left(l - \frac{\sum tC\Delta t}{\sum C\Delta t}\right)}\right] \qquad (24)$$

Исходя из графиков (рис. 5, 6), определено, что $\frac{\sum tC\Delta t}{\sum C\Delta t} = 15{,}59$, а установившаяся скорость потока руды $\approx 0{,}125$ т/с, по данным мельницы МШЦ 50*84 (табл.1) $l = 8{,}4$ м, подставляя данные в уравнение (26), а также учитывая, что коэффициент обратной диффузии не может быть отрицательным, получаем:

$$D_l = 0{,}0625 \cdot \left[1 + \sqrt{29{,}76}\right] = 0{,}403 \qquad (25)$$

Определим число Пекле:

$$Pe = \frac{vl}{D_l} = \frac{0{,}125 \cdot 8{,}4}{0{,}403} = 2{,}605 \qquad (26)$$

Таким образом, передаточная функция мельничного агрегата (14), примет следующий вид:

$$W(p) = \frac{14{,}55\sqrt{1 + 1{,}54p}}{\left(\sqrt{1 + 1{,}54p} + 1\right)^2 e^{\sqrt{1{,}7 + 2{,}605p}} - \left(\sqrt{1 + 1{,}54p} - 1\right)^2 e^{-\sqrt{1{,}7 + 2{,}605p}}}. \qquad (27)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров Г.С.* Технологическая оптимизация обогатительных фабрик. – М.: НЕДРА, 1976, 120 с.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: ГИТТЛ, 1953. – 679 с.
3. *Линч А.Дж.* Циклы дробления и измельчения. Моделирование, оптимизация, проектирование и управление. – М.: НЕДРА, 1981, 343 с.
4. *Кафаров В.В., Вердиян М.А.* Математические модели структуры потока материала в мельницах. — М.: Цемент, 1977; -№5. — С. 9 — 11; — №6. — С. 12 — 13.
5. *Кафаров В.В., Глебов М.Б.* Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1991, 400 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Певзнер Л.Д. — доктор технических наук, профессор,
Костиков В.Г. — доктор технических наук,
Леттиев О.А. — аспирант,
Московский государственный горный университет, ud@msmu.ru,
Костиков Р.В. — ведущий специалист «АБН».