

УДК 622.831 + 539.3

**М.В. Курленя, В.Е. Миренков**

## **ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЕРИМЕТРА БЛОКА ПОРОД С ОСЛАБЛЕНИЯМИ**

*Рассматривается блок пород с ослаблением (трещиной), выходящим на границу. Используя систему сингулярных интегральных уравнений, связывающую компоненты напряжений и смещений на границе, получено уравнение по определению напряжений на продолжении трещины. Обсуждаются примеры деформирования контура блока пород.*

*Ключевые слова: блок пород, разрез, уравнение, напряжение, смещение, сингулярность, решение.*

**В** проблеме добычи блочного камня, разрушения негабаритов, образцов, целиков, т.е. когда необходимо отделить часть от массива или разделить блок на плитки и, вообще в механике разрушения, интересно проследить процесс деформирования при разделении целого на части. Математическое моделирование таких ситуаций представляется наиболее оптимальным. Численный эксперимент при рассмотрении сложных задач приобрёл в настоящее время практически равные права с традиционным физическим. Среди достаточно общих численных методов лидирующее положение занимает метод конечных элементов. Значительные успехи, достигнутые в применении численных методов к решению задач для конечных областей, не снимают проблему разработки эффективных аналитических методов.

Рассмотрим блок пород с трещиной, моделируемой прямолинейным разрезом, половина которого в силу симметрии представлена на рис. 1. Границу исследуемой области обозначим  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ . Зна-

чения компонент напряжений и смещений, относящиеся к частям  $\Gamma_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) имеют соответствующий индекс.

Все величины имеющие размерность длины отнесены к половине ширины блока, а имеющие размерность напряжений — к максимальному значению внешних усилий  $\sigma_0(y)$ .

Граничные условия на разрезе сформулируем в виде

$$\sigma_n(y) = \tau_n(y) = 0, \quad h_1 \leq y \leq h, \quad x = 0. \quad (1)$$

На продолжении разреза в силу симметрии

$$u_n(y) = 0, \quad \tau_n(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h_1, \quad x = 0. \quad (2)$$

Для остальной части контура блока пород

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) = \tau_n(x) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \\ \sigma_x(y) = \sigma_0(y), \tau_n = 0 \text{ на } \Gamma_2 \text{ для } 0 \leq y \leq h_0 \\ \sigma_x(y) = \tau_n(y) = 0 \text{ на } \Gamma_2 \text{ для } h_0 \leq y \leq h \\ \sigma_y(x) = 0, \tau_n(y) = Ax, A = \text{const на } \Gamma_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения, связывающие граничные значения компонент напряжений и смещений, для рассматриваемой области  $\Omega$  имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
f(t_0) + 2\mu g(t_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt, \\
\overline{\kappa f(t_0)} - 2\mu \overline{g(t_0)} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\kappa f(t)} - 2\mu \overline{g(t)}}{t - t_0} dt - \\
-\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [f(t) + 2\mu g(t)] d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}, \quad (4)
\end{aligned}$$

где  $\kappa = 3-4 \nu$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $g = u + iv$  — смещение точек границы;

$$f = i \int_0^h (X_n + iY_n) ds = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f, \quad (5)$$

где  $X_n, Y_n$  — усилия на  $\Gamma$  в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $t \in \Gamma, t_0$  — аффикс точки границы; чёрточка над функцией обозначает сопряжённое значение;  $i$  — мнимая единица.

Из (4), разделяя действительные и мнимые части, после простых но достаточно громоздких алгебраических операций (в силу того, что уравнение контура  $\Gamma$  области  $\Omega$  содержит четыре различные формы записи) получаются уравнения определяющие явно компоненты смещений и напряжений для частей  $\Gamma_{\kappa}$  ( $\kappa=1, 2, 3, 4$ ). Приведём эти уравнения только для части границы  $\Gamma_4$ , так как они имеют самостоятельный интерес, т.е.

$$\begin{aligned}
4\mu u_4(y) &= \frac{1}{\pi} \int_h^0 \frac{(\kappa+1)f_{42}}{s-y} ds + \\
&+ \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{4\mu y u_1}{s^2 + y^2} ds + \right. \\
&+ \int_0^h \frac{4\mu y u_2 + (\kappa+1)(s-y)f_{22}}{1+(s-y)^2} ds + \\
&\left. + \int_1^0 \frac{(\kappa+1)s f_{32} - 4\mu(h-y)u_3}{s^2 + (h-y)^2} ds \right\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{8\mu y^2 s v_1 - 4\mu y(s^2 - y^2)u_1}{(s^2 + y^2)^2} ds + \right. \\
&+ \int_0^h \frac{4\mu \left[ (s-y)^2 - 1 \right] u_2 -}{\left[ (s-y)^2 + 1 \right]^2} ds + \\
&+ \frac{-4(s-y)(f_{22} + 2\mu v_2)}{[s^2 + (h-y)^2]^2} \left. \right\} + \\
&+ \int_1^0 \frac{4\mu(h-y) \left[ s^2 - (h-y)^2 \right] u_3 +}{\left[ s^2 + (h-y)^2 \right]^2} ds + \\
&+ \frac{4s(h-y)^2(f_{32} + 2\mu v_3)}{[s^2 + (h-y)^2]^2} \left. \right\}, \\
4\mu v_4(y) &= (\kappa-1)f_{42}(y) - \\
&-\frac{1}{\pi} \left\{ - \int_0^1 \frac{4\mu y v_1}{s^2 + y^2} ds + \right. \\
&+ \int_0^h \frac{(\kappa-1)f_{22} - 4\mu v_2}{(s-y)^2 + 1} ds - \\
&+ \left. - \int_1^0 \frac{(h-y) \left[ (\kappa-1)f_{32} - 4\mu v_3 \right]}{s^2 + (h-y)^2} ds \right\} - \\
&-\frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{8\mu y^2 s u_1 + 2y(s^2 - y^2)2\mu v_1}{(s^2 + y^2)^2} ds + \right. \\
&+ \int_0^h \frac{-8\mu(s-y)u_2 - 2 \left[ (s-y)^2 - 1 \right] \times}{\left[ (s-y)^2 + 1 \right]^2} ds + \\
&+ \frac{\times(f_{22} + 2\mu v_2)}{[s^2 + (h-y)^2]^2} ds + \\
&+ \int_1^0 \frac{8\mu s(h-y)^2 u_3 - 2(h-y) \times}{\left[ s^2 + (h-y)^2 \right]^2} ds + \\
&\left. \times \frac{\left[ s^2 - (h-y)^2 \right] (f_{32} + 2\mu v_3) ds}{[s^2 + (h-y)^2]^2} \right\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

Система (4) с граничными условиями (1) — (3) решалась методом ко-

локаций. В результате получены компоненты смещений и функции от нормальных и касательных напряжений на  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ .

На рис. 2 представлены результаты расчёта для случая  $\sigma_0(y)=1$ , коэффициент Пуассона  $\nu=0,3$ , модуль Юнга  $E=10^5$ ,  $A=0$ ,  $h=6$ ,  $h_0=4$  и вариантов:

$$h_1=1; 2. h_1=2; 3. h_1=3; 4. h_1=4, \quad (7)$$

соответствующим кривым 1, 2, 3, 4. Значения  $Imf$  впереди разреза приведены по точкам счёта, поэтому масштабы разные, т.е. расстояния между точками возрастают пропорционально (7). С уменьшением длины разреза убывают компоненты смещений, а минимальные значения  $Im f=f_{42}$  будут  $-5,01; -0,306; 0; 0$

в точках

$$u=0,567; 1,4; 0; 0. \quad (8)$$

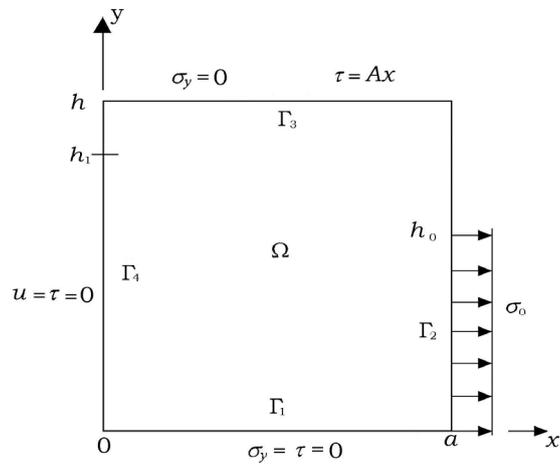
соответственно для кривых 1, 2, 3, 4. В то же время (8) обозначает, что для случаев 1 и 2 напряжения  $\sigma_x(y)$  равны нулю, т.е. в этих точках происходит смена знака от сжатия к растяжению, а для вариантов 3 и 4 имеют место только растягивающие значения  $\sigma_x(y)$ . Необходимо отметить, что с уменьшением длины разреза, при прочих равных условиях, область сжимающих напряжений в окрестности вершины уменьшается и исчезает при переходе от варианта 2 к — 3. Другими словами, наблюдается не только количественное, но и качественное изменение напряжённого состояния на  $x=0$ ,  $0 \leq y \leq h_1$ .

Граница области  $\Gamma$  развёрнута в прямую линию так, что  $\Gamma_1$  соответствуют точки от 1 до 11,  $\Gamma_2$  — от 11 до 51,  $\Gamma_3$  — от 51 до 61 и  $\Gamma_4$  — от 61 до 111.

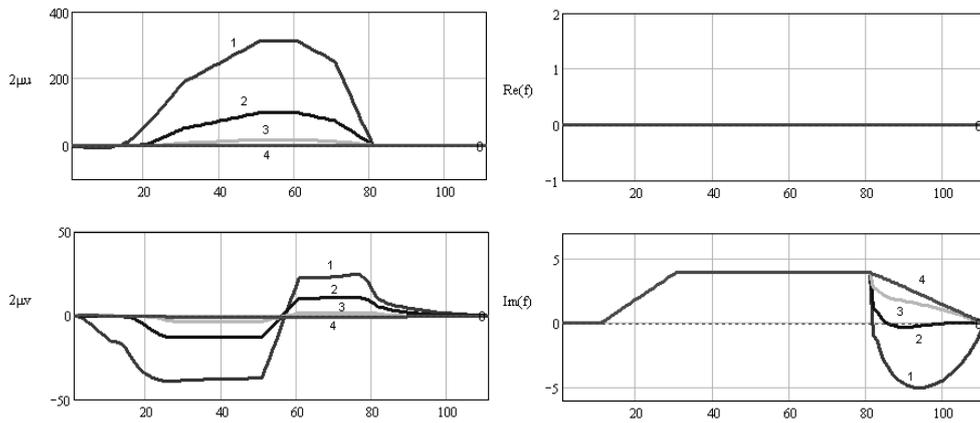
На рис. 3 приведены результаты расчёта тех же вариантов (7), что и на рис. 2 в предположении  $A = 0,8$ . Введение касательных напряжений,

моделирующих, например, подкрепление сопротивляющееся растяжению и не сопротивляется изгибу, качественно и количественно изменяет процесс деформирования области  $\Omega$ . В данном случае фактически допускаются отрицательные смещения для компонент  $u(y)$ , если смотреть на область  $\Omega$  как просто на блок, приведённый на рис. 1 с граничными условиями (1) — (3). Для исходной задачи с разрезом данные граничные условия приводят к результату с проникновением берегов разрезов друг в друга. При строгом решении необходимо учесть возможность контакта берегов и определить величину этой области и распределение напряжений сжатия в ней, что при необходимости легко учесть подбором нормальных напряжений на разрезе, исключаящих эффект проникания материала в материал. Однако основная задача — показать, как сильно влияют касательные напряжения на процесс деформирования рассматриваемой области  $\Omega$ . При переходе от варианта 1 к вариантам 2, 3 и 4 происходит количественное и качественное изменение напряжений на продолжении разреза (или любого ослабления горной породы с известным законом, выражаемым граничными условиями). Другими словами, область растягивающих напряжений в окрестности вершины переходит в область сжимающих (рис. 3).

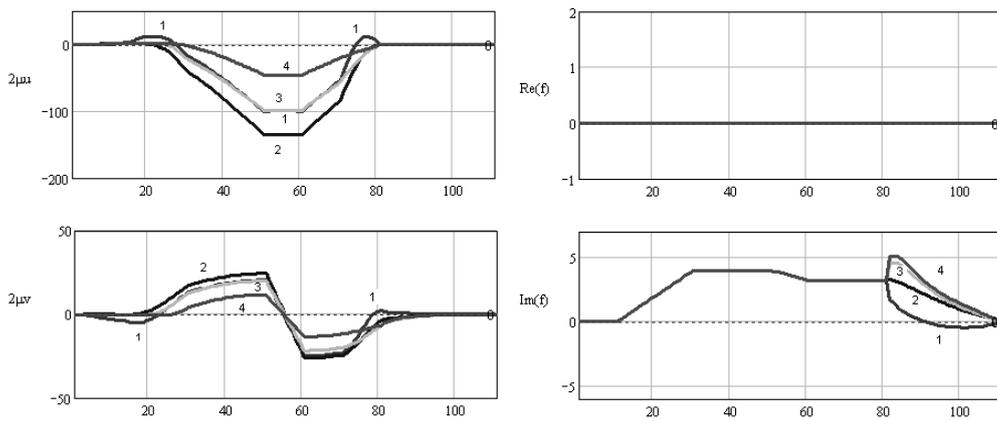
Наибольший научный и практический интерес представляет компонента  $\sigma_x(y)$  для  $0 \leq y \leq h_1$ , т.е. на продолжении разреза. Численное определение  $\sigma_x(y)$ , особенно в окрестности вершины, связано с потерей точности и поэтому желательно иметь явное аналитическое выражение для него. Если в уравнениях любой теории обнаруживаются



**Рис. 1. Расчётная схема блока пород**



**Рис. 2. Деформирование блока пород с разрезом при  $A=0$**



**Рис. 3. Деформирование блока пород с разрезом при  $A=0,8$**

слагаемые, дающие бесконечные значения каких-то параметров, то это сигнализирует о том, что не всё в порядке в теории и необходимо исключить бесконечности из формул. Особенность напряжений в вершине трещины считают, обычно, необходимым условием [2, 3]. Поэтому были предложены различные варианты реализации таких задач с явным выделением особенности ввода её априори в виде разыскиваемого аналитического решения или же, например, специальные конечные элементы для численного моделирования бесконечных напряжений. Общая теория сингулярных интегральных уравнений [4] говорит, что это недопустимо и определяет, например, для отрезка  $-1 \leq x \leq 1$  следующие возможности: либо особенности на обоих концах ( $x = \pm 1$ ), либо особенность на одном из концов и нулевые значения на другом, либо на обоих концах нулевые значения напряжений. Для выбора того или иного решения необходимо рассмотреть сначала регламентирующие его дополнительные условия [4].

Полученная система уравнений (6) впервые позволяет ответить на этот вопрос. Продифференцировав первое уравнение (6) по  $y$  и выделив явно интеграл содержащий  $\sigma_x(y)$  для  $0 \leq y \leq h_1$  после деления уравнения на  $(k+1)$ , получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{h_1}^0 \frac{\sigma_x(s)}{s-y} ds = F(y). \quad (9)$$

Результаты вычислений, типа приведённых на рис. 2, 3, полностью определяют правую часть (9).

Как следует из рис. 2, 3 нормальные напряжения  $\sigma_x(y)$  в зависимости от граничных условий на продолжении разреза  $0 \leq y \leq h_1$  имеют переменную знака (за исключением вариантов 3, 4

на рис. 2 и -2 на рис. 3). Обратить уравнение (9), относительно  $\sigma_x(y)$  следуя [4], невозможно. Учитывая, что наибольший интерес представляет поведение напряжений в окрестности вершины разреза, то метод определения их сводится к следующему. Разбиваем интеграл в левой части (9) на два — от нуля и до значения  $y_0$  — координаты экстремального значения  $\text{Im } f$  и от  $y_0$  до  $h_1$ . Оставляя этот последний интеграл слева, перенесём первый в правую часть (9) так что к  $F(y)$  добавится известная величина  $\Delta(y)$ . Окончательно получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{y_0}^{h_1} \frac{\sigma_x(s)}{s-y} ds = -F(y) + \Delta(y). \quad (10)$$

Теперь можно, следуя [4], обратить (10) относительно  $\sigma_x(y)$ , так как представляется возможным получить или обращающееся в ноль решение на концах отрезка  $y_0 h_1$  или обращающееся в ноль решение при  $y=y_0$  и неограниченное при  $y=h_1$  в зависимости от выполнения некоторого условия. В результате получим

$$\sigma_x(y) = \frac{\sqrt{(h_1-y)(y-y_0)}}{\pi} \times \int_{y_0}^{h_1} \frac{[F(s) - \Delta(s)] ds}{\sqrt{(h_1-s)(s-y_0)} (s-y)} \quad (11)$$

при условии

$$\int_{y_0}^{h_1} \frac{F(s) - \Delta(s)}{\sqrt{(h_1-s)(s-y_0)}} ds = 0. \quad (12)$$

Если условие (12) не выполняется, то решение для  $\sigma_x(y)$ , следуя [4], имеет корневую особенность при  $y=h_1$ .

Результатом выполненных исследований является следующее.

В большинстве случаев разрушение начинается с границы тела. Поэтому вывод уравнений, связывающих компоненты напряжений и смещений на гра-

нице, позволяет с контролируемой точностью рассмотреть процесс деформирования их. Рассмотрены примеры расчёта напряжённо-деформированного состояния контура блока пород. Полу-

чено сингулярное интегральное уравнение, определяющее нормальные напряжения на продолжении разреза. Предложен метод его обращения, т.е. получение решения в квадратурах.

---

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курленя М.В. Определение напряжений и смещений пород, вмещающих пласт полезного ископаемого / М.В. Курленя, А.А. Красновский, В.Е. Миренков // ФТПРПИ, № 4, — 2008. — С. 3—12.

2. Слепян Л.И. Механика трещин / Л.И. Слепян. — Л.: Судостроение. — 1981. — 296 с.

3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Наука — 1966. — 707 с.

4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили — М.: Наука. — 1966. — 706 с. 

---

#### КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Курленя М.В. — академик РАН, Учреждение Российской академии наук Институт горного дела Сибирского отделения РАН, e-mail: Kurlenya@misd.nsc.ru;

Миренков В.Е. — доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией «Механика горных пород», Учреждение Российской академии наук Институт горного дела Сибирского отделения РАН, e-mail: Mirenkov@misd.nsc.ru.



---

#### ОТДЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ ГОРНОГО ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО БЮЛЛЕТЕНЯ (ПРЕПРИНТ)

##### ВОЗДУШНАЯ ЗАВЕСА И ОБЩЕРУДНИЧНАЯ ЕСТЕСТВЕННАЯ ТЯГА

Алыменко Н.И., д-р техн. наук, профессор, гл. научный сотрудник, ГИ УрО РАН,  
Каменских А.А., мл. научный сотрудник, ГИ УрО РАН,  
Николаев А.В., ассистент, ГИ УрО РАН,

Отдельные статьи Горного информационно-аналитического бюллетеня (научно-технического журнала). — 2011. — № 5. — 28 с.— М.: Издательство «Горная книга»

*Описаны моделирование и численный эксперимент двухсторонней встречной воздушной завесы, позволяющие уменьшить величину поверхностных утечек воздуха в устье вентиляционного ствола и методика расчета прогнозируемой общерудничной естественной тяги.*

*Alimenko N.I., Kamenskih A.A., Nikolaev A.V. AN AIR SHEET AND ALL-MINE NATURAL DRAUGHT*

*This publication describes the simulation and numerical experiment of bilateral counter-air curtain to reduce the amount of surface air leaks at the mouth of the ventilation shaft and description of method of calculation the projected total on mine natural draft.*