

УДК 622.02:539.2

**А.С. Вознесенский, С.В. Вильямов, Я.О. Куткин**

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ В ГЕОМАТЕРИАЛЕ,  
КАК ИСТОЧНИКОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ**

*Определена оптимальная скорость увеличения температуры с помощью численного моделирования, позволяющая исключить влияние температурного градиента при установлении генотипа горной породы по проявлениям акустической эмиссии во время нагревания образцов горной породы.*

*Ключевые слова: акустическая эмиссия, горные породы, нагревание, термонапряжения, идентификация, генотип.*

---

**В** последнее время развивается направление идентификации состава и генезиса горных пород путем регистрации акустической эмиссии (АЭ), возникающей при их нагревании [1, 2]. Акустическая эмиссия возникает при образовании новых или развитии существующих трещин, а также при трении берегов последних. В случае теплового воздействия на горные породы это может произойти как результат двух механизмов. В однородной среде с одинаковым по объему коэффициентами теплового расширения  $\alpha(x, y, z)$ , но при наличии температурного градиента, при котором участки с различной температурой расширяются в различной степени. Такой градиент возникает при переменном тепловом поле, например, когда температура нагревающего элемента, воздействующего на образец, линейно увеличивается во времени. Условно назовем такой механизм первым. Образование трещин и возникновение акустической эмиссии возможно также при возникновении напряжений в неоднородной среде на границах отдельных областей с различным значением темпера-

турного коэффициента расширения  $\alpha(x, y, z)$ , и этот механизм условно назовем вторым. Третий механизм, связанный с химическими преобразованиями или фазовыми переходами здесь не рассматривается.

Исследование неоднородной структуры горных пород путем регистрации акустической эмиссии при их нагревании не должно маскироваться акустической эмиссией, вызванной чрезмерно большим градиентом температуры в матрице. Поэтому скорость нагревания следует выбирать не слишком большой, чтобы она не вызвала градиентного разрушения, и достаточной, чтобы проявились явления на границах областей с различными  $\alpha(x, y, z)$ .

Рассмотрим изменение термических напряжений, возникающих в образце размером 20x20x10 мм, находящемся в горизонтальном положении (минимальный размер по высоте) в печи с линейно возрастающей температурой, которая прикладывается к его боковым поверхностям. Для упрощения примем, что температура возрастает линейно во времени, в бо-

лее сложном варианте можно задать переменную величину теплового потока, поступающего через эти стенки.

### 1. Исходные предпосылки для расчета термонапряжений

Определение термонапряжений осуществляется с помощью компьютерного моделирования в среде Comsol Multiphysics, позволяющей производить расчеты по нескольким физическим законам в совокупности. Все расчеты осуществляются на основе линейных или нелинейных дифференциальных уравнений методом конечных элементов. В данном случае используются две системы уравнений, объединяемых мультифизическим режимом расчета. Одна из них описывает тепловые процессы и позволяет рассчитать распределение температур по пространству образца, а другая – механические, с ее помощью рассчитываются возникающие при этом напряжения и деформации. В рассматриваемой среде моделирования в общем случае используется дифференциальное уравнение в коэффициентной форме, которое имеет вид

$$e_a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \nabla (c \nabla \bar{u} + \alpha \bar{u} - \gamma) + \beta \nabla \bar{u} + a \bar{u} = f$$

Коэффициенты, входящие в это уравнение, обозначают:  $e_a$  – коэффициент масс (плотность);  $d_a$  – коэффициент демпфирования или коэффициент масс;  $c$  – коэффициент диффузии (рассеяния);  $\alpha$  – коэффициент конвекции консервативного потока (консервативного означает без потери, в отличие от диссипативного, когда при переносе масс происходят потери энергии с переходом в тепло);  $\beta$  – коэффициент конвекции;  $\gamma$  – член уравнения, характеризующий источник консервативного потока;  $a$  – коэффициент поглощения;  $f$  – член уравнения, характеризующий источ-

ник. Из этого уравнения путем приравнивания нулю определенных коэффициентов образуются более простые уравнения, предназначенные для решения определенных конкретных задач.

Уравнение структурной механики для статического расчета напряжений, осуществляемого в данной задаче, записывается в виде уравнения Навье

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) = F,$$

где  $c$  – коэффициент, определяемый упругими свойствами материала;  $u$  – перемещения;  $F$  – силы. Статический режим выбран здесь потому, что тепловые процессы протекают значительно медленнее, чем механические.

Уравнение теплопроводности, используемое в расчетах, имеет вид

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-k \nabla T) = Q,$$

где  $\rho$  – плотность;  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $T$  – абсолютная температура;  $k$  – коэффициент теплопроводности, в общем случае тензор, в однородной изотропной среде скаляр;  $Q$  – тепло источников или тепло вязкого трения при движении.

В данном случае рассматривается однородная изотропная среда без вязкого трения. В качестве граничного принято условие Дирихле, при котором задается температура на границах, в данном случае линейной функцией вида

$$T(t) = (T_{\max} - T_{\min}) \frac{t}{t_e} + T_{\min}, \quad (1)$$

где  $T_{\min}$ ,  $T_{\max}$  – минимальная и максимальная температуры нагрева образца,  $T_{\min} = 273,15$  К,  $T_{\max} = 1273,15$  К;  $t_e$  – время нагрева, в расчетах принимается ряд значений: 1 мин., 10 мин., 100 мин., 1000 мин.

В расчетах приняты свойства материала, соответствующие обобщенным показателям для известняка:  $k_{mat}$  – коэффициент теплопроводности материала,  $k_{mat} = 2 \text{ Вт/(м·К)}$ ;  $C_{mat}$  – теплоемкость при постоянном давлении,  $C_{mat} = 750 \text{ Дж/(кг·К)}$ ;  $\rho_{mat}$  – плотность,  $\rho_{mat} = 2600 \text{ кг/м}^3$ ;  $E_{mat}$  – модуль упругости,  $E_{mat} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ;  $\nu_{mat}$  – коэффициент Пуассона материала,  $\nu_{mat} = 0,25$ ;  $\alpha_{mat}$  – коэффициент линейного теплового расширения,  $\alpha_{mat} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}$ .

### 1.2. Режимы расчета

Расчетная схема модели показана на рис. 1. При задании режимов расчета в качестве граничных условий задавалось линейное во времени увеличение температуры от минимального до максимального значения в соответствии с формулой (1). При исследовании поведения модели при различных скоростях нагревания задавались различные значения времени нагрева  $t_e$ , которые приведены выше, а шаг расчета по времени в каждом случае выбирался таким, чтобы на интервале расчета получить 600 значений. Например, при  $t_e = 6000 \text{ с}$  шаг расчета составил 10 с.

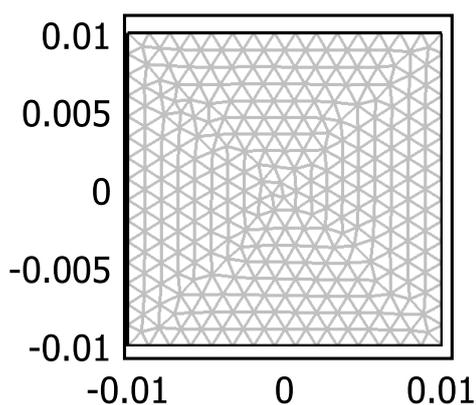


Рис. 1. Расчетная схема модели с разбивкой на элементы треугольной формы, единицы шкалы указаны в метрах

В расчетах был установлен режим линейной модели, что дало сокращение времени расчета. Время расчета одного варианта вне зависимости от заданного времени нагрева  $t_e$  составило около 160 с. Количество узлов расчета 2360, степеней свободы 14500. При этом использовался компьютер с частотой процессора 1,4 ГГц и оперативной памятью 630 МБ. Объем оперативной памяти, используемой непосредственно при решении задачи, около 300 МБ.

### 1.3. Результаты расчетов

Система Comsol Multiphysics обладает широким набором средств для визуализации результатов после проведения основного расчета.

На рис. 2 представлены результаты расчета изменений температуры в центре краевой части образца (верхняя кривая) и в центре самого образца (нижняя кривая) для скорости нагрева  $100 \text{ }^\circ\text{C/мин}$ . Как следует из этих графиков, разница температур на поверхности и внутри образца в этом случае доходит до  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ . При снижении скорости нагревания она пропорционально уменьшается.

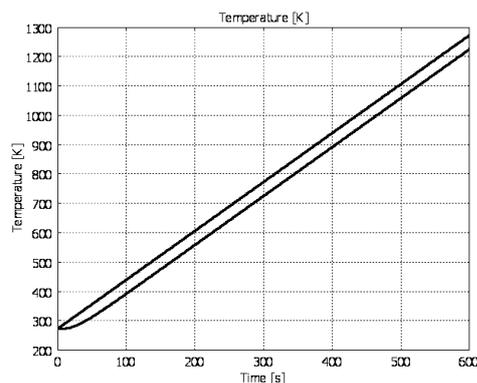
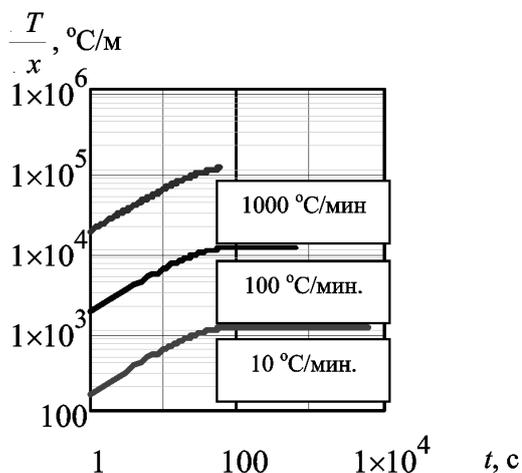
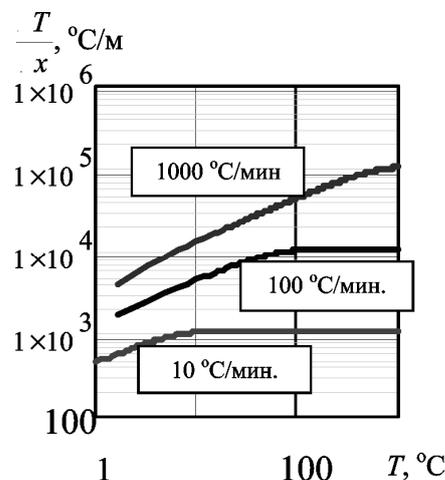


Рис. 2. Графики зависимостей изменений температуры от времени в центре краевой части образца (верхняя кривая) и в центре самого образца (нижняя кривая) для скорости нагрева  $100 \text{ }^\circ\text{C/мин}$ .



**Рис. 3. Графики зависимостей температурного градиента  $\frac{\partial T}{\partial x}$  от времени для различных скоростей нагрева 1000  $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ ., 100  $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ ., 10  $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ .**

На рис. 3 представлены графики зависимостей температурного градиента  $\frac{\partial T}{\partial x}$  от времени для различных скоростей нагрева 1000  $^{\circ}\text{C}/\text{с}$ , 100  $^{\circ}\text{C}/\text{с}$ , 10  $^{\circ}\text{C}/\text{с}$ . Из них следует, что при линейно возрастающей температуре внешней стенки образца градиент возрастает, стабилизируясь через 120 с независимо от скорости нагрева. Из графиков следует также, что величина температурного градиента в целом пропорциональна скорости увеличения температуры. Ясно, что такая высокая скорость увеличения температуры, как 1000  $\text{K}/\text{мин}$ . имеет лишь теоретический характер и рассматривается здесь лишь как предельный случай для выяснения общих закономерностей. Коэффициент пропорциональности между скоростью нагрева и величиной температурного градиента  $K=110$  [мин/м].

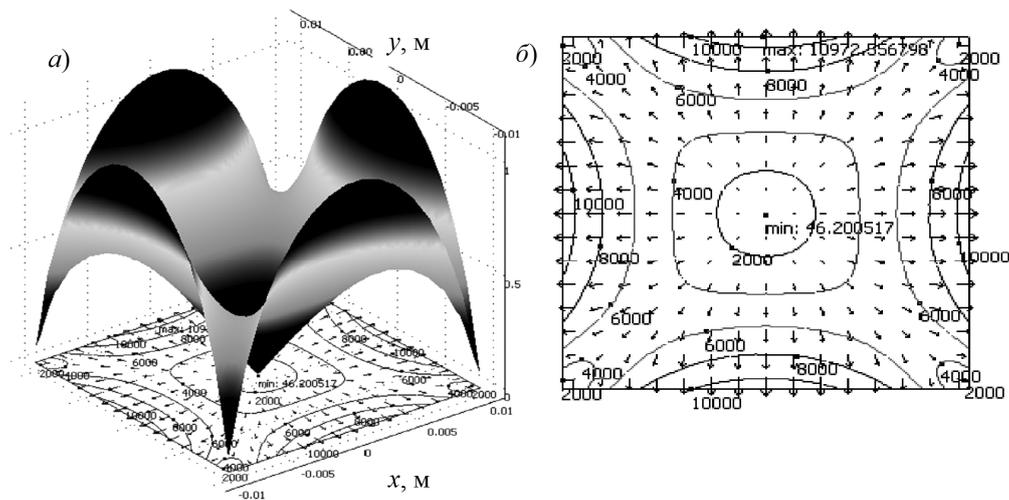


**Рис. 4. Графики зависимости температурного градиента от температуры  $T$  для различных скоростей нагрева 1000  $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ ., 100  $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ ., 10  $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ .**

На рис. 4 представлены те же графики, но в зависимости от температуры  $T$ . Из этих графиков следует, что достижение максимального значения температуры для больших скоростей нагрева происходит при более высокой температуре.

Поскольку температурный градиент является причиной возникающих механических напряжений, на рис. 5 приведены результаты расчета в виде карты изолиний величины  $\frac{\partial T}{\partial x}$  для скорости нагрева 100  $^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ ., что соответствует времени нагрева 10 мин. до температуры 1000  $^{\circ}\text{C}$ .

Минимальное и максимальное значения температурного градиента отмечены надписями min и max соответственно. Минимальный температурный градиент, как и следовало ожидать, находится в геометрическом центре образца. Наибольшие же его значения, доходящие почти до 11000  $\text{K}/\text{м}$ , находятся в серединах краевых



**Рис. 5. Величины и изолинии температурного градиента в  $^{\circ}\text{C}/\text{м}$  в виде трехмерного изображения (а) и в виде карты изолиний (б); стрелками отображены направление и величины температурного градиента**

частей пластины. Здесь следует ожидать максимальных растягивающих напряжений. Хотя программой расчета отмечена только одна точка максимума температурного градиента в середине верхней границы образца, аналогичные места будут находиться и в середине трех других сторон.

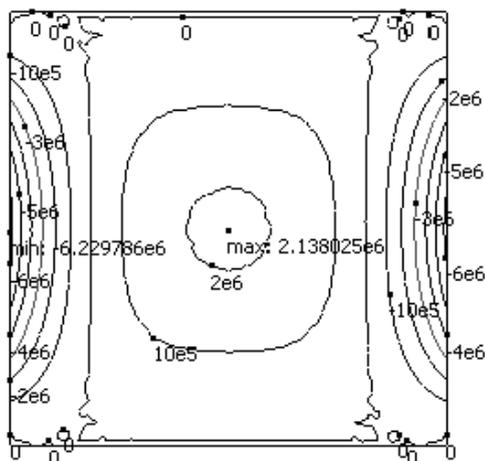
На рис. 6 представлена карта изолиний термических напряжений, вызванных соответствующим температурным градиентом. Здесь аналогично изображениям на рис. 5 минимальное и максимальное значения напряжений отмечены надписями min и max соответственно.

Максимальные растягивающие (минимальные по своей величине) напряжения находятся в серединах краевых частей слева и справа при  $y = 0$ . Они имеют знак минус. Их величина превосходит 6 МПа. Максимальное сжимающее напряжение находится в центре пластины, оно превосходит 2 МПа. Т. е. растягивающие напряжения по абсолютной величине превосходят сжимающие. Горизон-

тальная составляющая растягивающих напряжений наиболее сильно проявляется в центрах верхней и нижней сторон образца при  $x = 0$ . Можно констатировать, что наибольшие растягивающие напряжения проявляют себя именно в этих частях образца. Здесь и возможно наиболее вероятное образование трещин и находится начало разрушения образца, вызванное термическими напряжениями.

Местоположение других областей возможного зарождения трещин может быть определено при рассмотрении сдвиговых напряжений  $\sigma_{xy}$ . На рис. 7 представлены изолинии таких напряжений, рассчитанных для  $\partial T/\partial t = 100^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ .

Наибольшая концентрация напряжений наблюдается вблизи центров областей, образующихся разделением образца на четыре равные части. При этом напряжения сдвига доходят почти до 1,5 МПа, что может привести к образованию трещин и началу разрушения образца.



**Рис. 6.** Изолинии вертикальной составляющей термических нормальных напряжений  $\sigma_y$  при скорости увеличения температуры  $\partial T/\partial t = 100$  °С/мин.

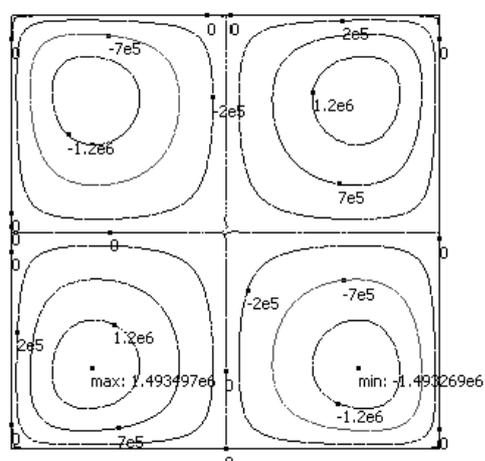
Можно сделать вывод, что образование трещин, вызванное термическими напряжениями, с наибольшей вероятностью может произойти либо в центре краевых зон, либо вблизи центров областей, образующихся разделением образца на четыре равных части.

#### 1.4. Основные закономерности

Результаты расчета максимальных и минимальных (растягивающих) нормальных, а также максимальных сдвиговых напряжений приведены в таблице. Отрицательные значения нормальных напряжений соответствуют растяжению.

Графики зависимостей максимальных термических напряжений приведены на рис. 8.

По этим данным можно сделать следующие выводы. Зависимость  $\sigma(v_T) = k \cdot v_T$  максимальных напряжений  $\sigma$  от скорости термического нагружения  $v_T = \partial T/\partial t$  линейная с коэффициентами пропорциональности между ними  $k_{сж} = 21,4$  кПа/(°С/мин)



**Рис. 7.** Изолинии сдвиговой составляющей термических напряжений при  $\partial T/\partial t = 100$  °С/мин.

для сжимающих,  $k_p = 62,3$  кПа/(°С/мин) для растягивающих,  $k_{сдв} = 14,9$  кПа/(°С/мин) для сдвиговых. Небольшое отличие зависимости от линейной наблюдается при больших скоростях (1000 °С/мин) и малом времени (60 с) нагрева. Однако большие значения растягивающих и сдвиговых напряжений, заведомо превышающие соответствующие пределы прочности, не позволяют использовать такие режимы для исследования структуры горных пород.

Предел прочности при сжатии известняков колеблется от 0,4 МПа (для ракушечника) до 300 МПа (для кристаллического и афанитового известняка) [3]. Если предел прочности на сжатие  $\sigma_{сж} = 60$  МПа, предел прочности на растяжение в 20-50 раз меньше, т. е. можно принять его ориентировочное значение в диапазоне 1,2-3,0 МПа. С учетом вышеуказанных значений коэффициента пропорциональности можно получить для этих границ диапазон максимально допустимых скоростей нагрева, при кото-

**Величины нормальных и сдвиговых напряжений при различных временах и скоростях нагрева**

Время нагрева до 1000 °С, с	Скорость нагрева, °С/мин	Нормальные напряжения, МПа		Сдвиговые напряжения, МПа
		$\sigma_{y \max}$	$\sigma_{y \min}$	$\sigma_{xy \max}$
60	1000	20,1	-59,2	14,1
600	100	2,13	-6,23	1,49
6000	10	0,214	-0,623	0,149
60000	1	0,0214	-0,0623	0,0149

рых еще не происходит образование трещин. При этом расчет по формуле  $v_{T_{\max}} = \sigma_{сж} / k_p$  дает диапазон скоростей нагрева, приводящих к таким напряжениям  $v_T = 56,1 \dots 140,2$  °С/мин. При выбранной скорости нагревания  $v_{T0} = 10$  °С/мин напряжения растяжения составят  $v_{T0} k_p = 0,623$  МПа, они не превышают нижней границы указанного диапазона предела прочности, равной 1,2 МПа.

**1.5. Влияние коэффициентов теплопроводности и теплоемкости на величину термонапряжений**

При обосновании скорости нагрева следует учесть, что испытываться будут различные породы, обладающие отличающимися тепловыми свойствами. К последним в первую очередь относятся теплопроводность и теплоемкость. Рассмотрим их влияние на величину термонапряжений при постоянной скорости 10 °С/мин.

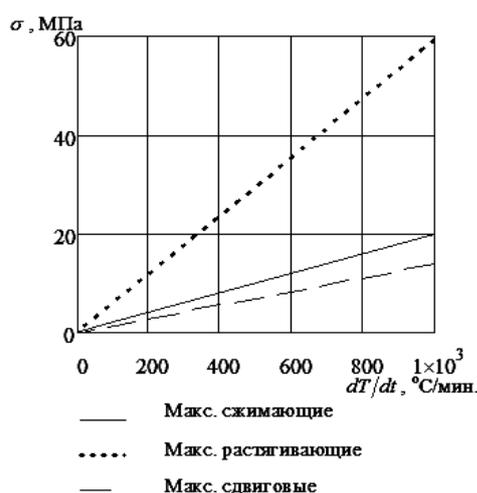
Для широкого спектра горных пород пределы изменения теплопроводности 0,44-7,6, т. е. более чем в 17 раз. Пределы изменения теплоемкости 0,32-1,49 кДж/(кг·К) или в 4,7 раз, т. е. гораздо меньше, чем теплопроводности [4-6].

По результатам расчетов получено, что при 0,44 Вт/(м·К) (базальт) максимальные растягивающие напряже-

ния равны 2,83 МПа, а сжимающие и 0,97 МПа. При 7,6 Вт/(м·К) (кварцит) получены значения 0,16 МПа и 0,056 МПа соответственно.

Меньшим значением теплопроводности соответствуют большие напряжения, с учетом повышенной прочности базальта можно предполагать, что указанные термонапряжения растяжения не приведут к образованию трещин, что было бы вызвано данной скоростью увеличения температуры.

Анализ влияния теплоемкости проведен при значении теплопроводности 2,0 Вт/(м·К). Расчет для крайних значений диапазона  $C_p$  от 0,32 кДж/(кг·К) до 1,49 кДж/(кг·К) (гипс и



**Рис. 8. Графики зависимости термонапряжений от скорости нагрева образца**

базальт соответственно) получены величины максимальных и минимальных напряжений сжатия 0,09 МПа и 0,4 МПа, растяжения 0,26 МПа и 1,18 МПа, сдвига 0,063 МПа и 0,28 МПа соответственно, что также не превосходит соответствующих значений прочности.

### **Выводы**

При установлении генотипа горной породы путем регистрации акустической эмиссии во время нагревания скорость увеличения температуры может быть принята равной 10

°С/мин. При такой скорости термонапряжения в однородной изотропной среде, вызванные градиентом температуры при ее увеличении, не приводят к образованию трещин. В то же время акустическая эмиссия, вызванная образованием трещин на границах областей с различными температурными коэффициентами, будет образовываться в достаточной степени. Указанная скорость увеличения температуры является оптимальной и с точки зрения сокращения времени на эксперимент.

---

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Вознесенский А.С., Набатов В.В., Вильямов С.В. Характерные отличия акустической эмиссии гипсосодержащих пород на различных стадиях нагревания // Сб. трудов XX сессии Российского акустического общества. Т. 1. –М.:ГЕОС, 2008, с. 290-294.
2. Вознесенский А.С., Шкуратник В.Л., Вильямов С.В., Винников В.А. Установка для акустоэмиссионных исследований горных пород при их нагревании//Горный информационно-аналитический бюллетень. - 2007. - №12. - С. 143-150.
3. Горная энциклопедия. <http://www.mining-enc.ru/i/izvestnyak/>
4. Физические величины: Справочник / А. П. Бабичев, И. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др.; Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991, 1232 с.
5. Теплофизические свойства горных пород / В. В. Бабаев, В. Ф. Будымка, Т. А. Сергеева и др. // М.:Недра, 1987, 156 с.
6. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. СПб.:Наука, 2001, 343 с. **ИДБ**

---

### **КОРОТКО ОБ АВТОРАХ**

Вознесенский Александр Сергеевич – профессор, доктор технических наук, al48@mail.ru.  
Вильямов Сергей Владимирович – аспирант, serjo@mail.ru.  
Куткин Ярослав Олегович – студент, ftkp@mail.ru.  
Московский государственный горный университет,  
Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru

