УДК 622

С.В. Шерстов

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Рассмотрены гармонические волны в цилиндрических телах, состоящих из анизотропных материалов, обладающих гексагональной симметрией. Получено представление компонент вектора перемещений таких волн через собственные функции дифференциального оператора 4-го порядка

Ключевые слова: гармонические волны, гексагональная симметрия, дифференциальный оператор, цилиндрическая система координат.

Уравнения движения для физических величин $\theta^*, \varepsilon^*, \varepsilon_{zz}$, сопровождающих любой динамический процесс в анизотропных цилиндрических телах, состоящих из материалов обладающих гексагональной симметрией, имеет вид [1],[2],[4]

$$c_{66}\Delta\theta^* = \Delta_{44}\theta^* \tag{1}$$

$$\begin{cases} [c_{11}\Delta - \Delta_{44}]\varepsilon^* + [(c_{13}+c_{44})\Delta]\varepsilon_{zz} = 0 \\ [(c_{13}+c_{44})D_z]\varepsilon^* + [c_{44}\Delta - \Delta_{33}]u_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где $\theta^*, \varepsilon^*, \varepsilon_{zz}$ являются дифференциальными характеристиками движения:

проекцией ротора перемещений на ось Z, плоским относительным изменением объема и продольной деформацией соответственно, а для дифференциальных операторов введены обозначения

$$D_s u = \frac{\partial u}{\partial s},\ D_{sk}u = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial k}, \Delta_{44}u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta_{33}u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Цилиндрическим телом будем считать цилиндр, полый цилиндр, или внешность цилиндрической полости с осью, параллельной оси симметрии высшего порядка, со свободной или закрепленной границей. При этом описанные выше величины связаны с перемещением $\overline{u}(u_r, u_\varphi, u_z)$ уравнениями

$$\begin{cases} D_r[c_{11}\varepsilon^* + (c_{13}+c_{44})\varepsilon_{zz}] - \dfrac{D_\varphi[c_{66}\theta^*]}{r} = \Delta_{44}u_r \\ D_r[c_{66}\theta^*] \ + \dfrac{D_\varphi[c_{11}\varepsilon^* + (c_{13}+c_{44})\varepsilon_{zz}]}{r} = \Delta_{44}u_\varphi \\ (c_{13}+c_{44})D_z\varepsilon^* + c_{44}\Delta u_z = \Delta_{33}u_z. \end{cases} \tag{3}$$

Для распространяющихся вдоль оси Z гармонических волн (ω,γ - действительные), или гармонических колебаний ограниченных цилиндров (γ - комплексное) зададим перемещения в виде [5]

$$\bar{u} = \bar{v} \cdot \exp\, i(\gamma z - \omega t)\,, \tag{4}$$

где $\bar{v}$ не зависит от z и t , а параметр ω действительный и ,соответственно

$$\begin{cases} \varepsilon^* = \varepsilon(r,\varphi)\cdot \exp\, i(\gamma z - \omega t) \\ \theta^* = \theta(r,\varphi)\cdot \exp\, i(\gamma z - \omega t) \end{cases}, \tag{5}$$

что приводит (1), (2) к виду

$$c_{66}\Delta\theta + (\rho\omega^2 - c_{44}\gamma^2)\theta = 0 \tag{6}$$

$$\begin{cases} [c_{11}\Delta + (\rho\omega^2 - c_{44}\gamma^2)]\varepsilon + [i\gamma(c_{13}+c_{44})\Delta]v_z = 0 \\ [i\gamma(c_{13}+c_{44})]\varepsilon + [c_{44}\Delta + (\rho\omega^2 - c_{33}\gamma^2)]v_z = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Функции ε, v_z, удовлетворяющие системе (7), являются решениями операторных уравнений

$$\begin{cases} (\Delta + p_1^2)(\Delta + p_2^2)\varepsilon = 0 \\ (\Delta + p_1^2)(\Delta + p_2^2)v_z = 0 \end{cases},$$

где p_1^2, p_2^2 - корни квадратного уравнения

$$(c_{11}p^2 + c_{44}\gamma^2 - \rho\omega^2)(c_{44}p^2 + c_{33}\gamma^2 - \rho\omega^2) - \gamma^2(c_{13}+c_{44})^2 p^2 = 0$$

Собственные функции δ_n уравнения

$(\Delta + p_i^2)\delta_n = 0$ имеют вид [3]

$$\delta_n = [a_n^i Z_n^{(1)}(p_i r) + b_n^i Z_n^{(2)}(p_i r)]\exp(in\varphi)$$

если $p_i^2 \neq 0$, или $\delta_n = [a_n^i r^n + b_n^i r^{-n}]\exp(in\varphi)$, если $p_i^2 = 0$;

где a_n^i, b_n^i - постоянные, $Z_n^{(1)}(p_i r), Z_n^{(2)}(p_i r)$ - цилиндрические функции, составляющие пару линейно независимых решений уравнения Бесселя.

Если $p_1^2 \neq p_2^2$, то линейная комбинация функций $\delta_n(p_1 r)$ и $\delta_n(p_2 r)$ дает решение уравнений (7), а $\delta_n(p_3 r)$ дает решение уравнения (6), при

$p_3^2 = (\rho\omega^2 - c_{44}\gamma^2)/c_{66}$.

Подставив (4),(5) в (3), получим представление v_r, v_φ через δ_n

$$v_r = A_{11}D_r\delta_n(p_1 r) + A_{12}D_r\delta_n(p_2 r) - \left(\frac{in}{r}\right)A_{13}\delta_n(p_3 r)$$

$$v_\varphi = \left(\frac{in}{r}\right)[A_{11}\delta_n(p_1 r) + A_{12}\delta_n(p_2 r)] + A_{13}D_r\delta_n(p_3 r),$$

где A_{ik} зависят от параметров ω, γ, c_{ij} .

Для v_z такое представление уже получено

$$v_z = \delta_n(p_1 r) + \delta_n(p_2 r)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. - М: Издательство Московского университета, 1971.
2. *Шерстов С.В.* Представление решений одной системы дифференциальных уравнений через решения операторного уравнения 2-го порядка относительно плоского оператора Лапласа. В кн.: Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: Межвузовский сборник. Бийск: Изд-во Алт. гос. техн.ун-та, 2005, с. 46-48.
3. *Шерстов С.В.*Нормальные волны в цилиндрических пьезоэлектрических волноводах и связанные с ними граничные задачи. – МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва,1985 (Деп., ВИНИТИ 1985).
4. *Шерстов С.В.* Система дифференциальных уравнений динамики физических характеристик деформаций в кристаллических цилиндрах гексагональной симметрии(в печати).
5. *Гринченко А.Т.,Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наукова думка, 1981 г.

Коротко об авторе

Шерстов С.В. – доцент кафедры высшей математики, кандидат физико-математических наук.
Московский государственный горный университет,
Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru

Мне кажется, что ГИАБ издается слишком шикарно. Нельзя ли сделать его немного скромнее?

Экономия на материалах и качестве выпуска не принесет ощутимой выгоды, а в глазах подписчиков ГИАБ потеряет много. Части из них можно лишиться. Кроме того, заявленное в 2000 году качество ГИАБа стало для читателей стандартом, отличающим наш журнал от других. Возврат к старому качеству стал бы признанием нашего поражения и началом затухания.

ГИАБ удерживает традиции и взятые на себя обязательства, и в дальнейшем будет двигаться только вперед.