УДК 51

А.Е. Адигамов, А.А. Скородулина

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СИСТЕМАМИ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕРМАНА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАПРЯЖЕНИЯХ

Рассмотрена система сингулярных интегральных уравнений, обобщающая первую основную задачу теории упругости для плоского изотропного тела.
Ключевые слова: теория упругости, сингулярный, интегральное уравнение, изотропное тел.

Сингулярные интегральные уравнения широко используются при решении задач теории упругости в самых разнообразных постановках. Так известно, что первая основная задача теории упругости для плоского изотропного тела математически эквивалентна следующей системе

$$\begin{gathered}
\omega_0(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t}+\overline{\omega_0(t)}-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_0(\tau)}\,\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}+\omega_1(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\tau)d\tau}{\tau-t}+\\
+\bar t\,\omega_1'(t)+\frac{\bar t}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1'(\tau)d\tau}{\tau-t}+\overline{\omega_1(t)}-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_1(\tau)}\,\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}+t\overline{\omega_1'(t)}-\\
-\frac{t}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_1'(\tau)}\,\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}=2g_1(t),\\
\omega_0(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-t}-\overline{\omega_0(t)}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_0(\tau)}\,\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}-\omega_1(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\tau)d\tau}{\tau-t}+\\
+\bar t\,\omega_1'(t)+\frac{\bar t}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1'(\tau)d\tau}{\tau-t}-\overline{\omega_1(t)}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_1(\tau)}\,\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}-t\overline{\omega_1'(t)}+\\
+\frac{t}{\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_1'(\tau)}\,\overline{\tau'^2(\sigma)}d\tau}{\bar\tau-\bar t}=2g_2(t).
\end{gathered}\tag{1}$$

Известно, что система (1) равносильна сингулярному интегральному уравнению:

$$\omega_0(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}\right]\omega_0(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar t-\bar\tau}{\tau-t}\right]\overline{\omega_0(\tau)}d\tau=f(t).\tag{2}$$

Данное уравнение было исследовано Д.И. Шерманом.

В работе будет рассмотрена система сингулярных интегральных уравнений, обобщающая систему (1). При этом предполагается, что граничные условия задаются на двух концентрических окружностях радиусами R_1 и R_2.

Приведем постановку задачи. Требуется определить вектор ω(z) $\left(\omega_1(z),\omega_2(z)\right)\in H^{(2)}\left(R_1,R_2\right)$ по краевым условиям

$$\begin{cases}
(N_1\omega_1\omega_2)(t_1)=a_1(t_1)[\omega_1(t_1)+\overline{t_1}\ \omega_2{}'(t_1)+\omega_2(t_1)]+b_1(t_1)\{\omega_1[\alpha(t_1)]+ \\
+\overline{\alpha(t_1)}\omega_2{}'[\alpha(t_1)]+\omega_2[\alpha(t_1)]\}+\dfrac{c(t_1)}{\pi i}\displaystyle\int_L\dfrac{\omega_1(\tau_1)+\overline{t_1}\omega_2{}'(\tau_1)+\omega_2(\tau_2)}{\tau_1-t_1}d\tau_1+ \\
+\dfrac{d_1(t_1)}{\pi i}\displaystyle\int_L\dfrac{\omega_1(\tau_1)+\overline{\alpha(t_1)}\omega_2{}'(\tau_1)+\omega_2(\tau_2)}{\tau_1-\alpha(t_1)}d\tau_1+ \\
+\displaystyle\int_L K_{11}(t_1,\tau_1)\omega_1(\tau_1)d\tau_1+\int_L K_{12}(t_1,\tau_1)\omega_2(\tau_1)d\tau=g_1(t_1) \\
(N_1\omega_1\omega_2)(t_2)=a_1(t_2)[\omega_1(t_2)+\overline{t_2}\ \omega_2{}'(t_2)+\omega_2(t_2)]+b_1(t_2)\{\omega_1[\alpha(t_2)]+ \\
+\overline{\alpha(t_2)}\omega_2{}'[\alpha(t_2)]+\omega_2[\alpha(t_2)]\}+\dfrac{c(t_2)}{\pi i}\displaystyle\int_L\dfrac{\omega_1(\tau_2)+\overline{t_2}\ \omega_2{}'(\tau_2)+\omega_2(\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2+ \\
+\dfrac{d_1(t_2)}{\pi i}\displaystyle\int_L\dfrac{\omega_1(\tau_2)+\overline{\alpha(t_2)}\omega_2{}'(\tau_2)+\omega_2(\tau_2)}{\tau_2-\alpha(t_2)}d\tau_2+ \\
+\displaystyle\int_L K_{11}(t_2,\tau_2)\omega_1(\tau_2)d\tau_2+\int_L K_{12}(t_2,\tau_2)\omega_2(\tau_2)d\tau_2=g_1(t_2)
\end{cases}, \qquad (3)$$

где $t_1\in R_1, t_2\in R_2$, $\alpha(t_k)$ – сдвиг Карлемана ($\alpha[\alpha(t)]\equiv t$). $a_1(t_k), b_1(t_k)$, $c(t_k), d_1(t_k)$ – известные функции.

Система (3) обобщает уравнения Шермана на случай кратного сдвига и наличия сопряженных функций. С другой стороны система (3) соответствует случаю, когда известна только одна компонента напряжения, действующая на упругое однородное тело.

Выделим в системе (3) характеристическую часть.

$$\begin{aligned}
&(N_1\omega_1\omega_2)(t_1)\equiv a(t_1)[\omega_1(t_1)+\overline{t_1}\omega_2{}'(t_1)+\omega_2(t_1)]+b(t_1)\{\omega_1[\alpha(t_1)]+ \\
&+\overline{\alpha(t_1)}\omega_2{}'[\alpha(t_1)]+\omega_2[\alpha(t_1)]\}+\frac{c(t_1)}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\tau_1)+\overline{\tau}_1\omega_2{}'(\tau_1)+\omega_2(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1+ \\
&+\frac{d(t_1)}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_1(\tau_1)+\overline{\tau}_1\omega_2{}'(\tau_1)+\omega_2(\tau_1)}{\tau_1-\alpha(t_1)}d\tau_1+\frac{c(t_1)}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\overline{t_1}-\overline{\tau}_1}{\tau_1-t_1}\right)\right]\omega_2(\tau_1)d\tau_1+ \\
&+\frac{d(t_1)}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\frac{\overline{\alpha(t_1)}-\overline{\tau}_1}{\tau_1-\alpha(t_1)}\right)\right]\omega_2(\tau_1)d\tau_1+\int_L K_{11}(t_1,\tau_1)\omega_1(\tau_1)d\tau_1+\int_L K_{12}(t_1,\tau_1)\omega_2(\tau_1)d\tau_1=g_1(t_1),
\end{aligned} \qquad (4)$$

$$(N_1\omega_1\omega_2)(t_2) \equiv a(t_2)[\omega_1(t_2) + \overline{t_2}\,\omega_2{}'(t_2) + \omega_2(t_2)] + b(t_2)\{\omega_1[\alpha(t_2)] +$$
$$+\overline{\alpha(t_2)}\omega_2{}'[\alpha(t_2)] + \omega_2[\alpha(t_2)]\} + \frac{c(t_2)}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\tau_2) + \overline{\tau}_2\omega_2{}'(\tau_2) + \omega_2(\tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 +$$
$$+\frac{d(t_2)}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(\tau_2) + \overline{\tau}_2\omega_2{}'(\tau_2) + \omega_2(\tau_2)}{\tau_2 - \alpha(t_2)} d\tau_2 + \frac{c(t_2)}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\overline{t_2} - \overline{\tau}_2}{\tau_2 - t_2}\right)\right]\omega_2(\tau_2)d\tau_2 +$$
$$+\frac{d(t_2)}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\partial}{\partial\tau_2}\left(\frac{\overline{\alpha(t_2)} - \overline{\tau}_2}{\tau - \alpha(t_2)}\right)\right]\omega_2(\tau_2)d\tau_2 + \int_L K_{11}(t_2,\tau_2)\omega_1(\tau_2)d\tau_2 +$$
$$+\int_L K_{12}(t_2,\tau_2)\omega_2(\tau_2)d\tau_2 = g_1(t_2)$$

Относительно уравнений (4) справедливо утверждение.

Теорема 1. Индекс уравнений (4) вычисляется по формулам:

а) если $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию, то

$$Jnd\ N = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{\Delta(t_k)}{\Delta(t_k)}\right\} \quad (k = 1,\ 2),$$

где

$\Delta(t_k)$ = $[c(t_k) - a(t_k)]\ (c[\alpha(t_k)] + a[\alpha(t_k)]) - (d(t_k) - b(t_k))\ (d[\alpha(t_k)] - b[\alpha(t_k)])$,

б) если $\alpha(t)$ изменяет ориентацию, то

$$Jnd\ N = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\left\{\ \arg\Delta(t_k)\right\},$$

где $\Delta_1(t_k)$ = $[c_1(t_k) - a(t_k)]\ (c[\alpha(t_k)] + a[\alpha(t_k)])$ - $(d(t_k) - b(t))\ (d[\alpha(t_k)$- $b[\alpha(t_k)])$,

$\Delta_2(t_k)$ = $[c_2(t_k) + a(t_k)]\ (c[\alpha(t_k)] + a[\alpha(t_k)]) - (d(t_k) + b(t_k))\ (d[\alpha(t_k)] + b[\alpha(t_k)])$.

Искомые функции определим, используя условие:

$$\overline{t_1} = \frac{R_1^2}{t}; \qquad \overline{t_2} = \frac{R_2^2}{t}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи – М: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 548 с.
3. *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости. ГТТИ. Л – М., 1939. – 224 с.
4. *Лехницкий Г.С.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 446 с.
5. *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом. – М: Наука. 1977. – 448 с.
6. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения. М. – Л., 1949. – 378 с.

7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

8. *Шерман Д.И.* Об одном методе решения статической задачи о напряжениях для плоских многосвязных областей. Докл. АН СССР, новая серия, т. 1, № 7, 1934, С. 376–378.

9. *Редкозубов С.А. Юденков А.В.* Задача Карлемана для полианалитических функций в теории упругости для областей сложной формы // Сборник трудов ин-та Теор. механики РАН и МГТУ, посвященной 70-летию Л.В.Ершова, Москва. 2001. С. 263–270.

10. *Володченков А.М., Скородулина Е.Ю., Юденков А.В.* Системы сингулярных интегральных уравнений в плоской теории упругости в пространстве Lp. // «Обозрение прикладной и промышленной математики», М. – 2006, вып.3. – С.546–547.

11. *Скородулина Е.Ю., Юденков А.В, Адигамов А.Э., Юденкова М.А.* Теорема единственности для бианалитических функций и ее приложение к основным задачам упругости для бианалитических функций. //Горный. Информационно-аналитический бюллетень. Изд-во Московского государственного горного университета. – 2007. – № 12 – С. 55–57. ГИАБ

Коротко об авторах

Адигамов А.Э. – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Московский государственный горный университет, adigamov@msmu.ru
Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru
Скородулина А.А. – студентка IV курса,
филиал ГОУ ВПО «Московский Энергетический Институт (Технический университет)», г. Смоленск, sshi@sci.smolensk.ru

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	Название работы	Специальность	Ученая степень
ДОНБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ			
ОКАЛЕЛОВ Василий Николаевич	Научные основы функционально-структурной оптимизации моделей сетей горных выработок угольных шахт	05.15.02	к.т.н.