УДК 504.55.054:662 (470.6)

В.И. Голик, Т.Т. Исмаилов, М.Ф. Мицик

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ МЕТАЛЛОВ ИЗ НЕКОНДИЦИОННОГО СЫРЬЯ С МЕХАНОХИМИЧЕСКОЙ АКТИВАЦИЕЙ ПРОЦЕССОВ ИЗВЛЕЧЕНИЯ

Даны результаты экспериментального извлечения свинца и цинка из хвостов обогащения с использованием дезинтегратора, на основе которых построены регрессионные уравнения вариантов выщелачивания. Установлено, что активация минерального сырья в дезинтеграторе одновременно с выщелачиванием существенно увеличивает извлечение металлов. Приведена методика разработки универсальной модели извлечения металла из руд, учитывающая особенности этапов переработки. Универсальная модель и составленная на ее основе программа моделирования позволяет механизировать расчет параметров технологий, использующих методы механо-активации.

Ключевые слова: извлечение металлов, полиметаллы, хвосты обогащения, дезинтегратор, регрессионные уравнения, выщелачивание, моделирование, механо-активация.

Необходимость обеспечения промышленности металлами при уменьшении запасов удобных для разработки месторождений, усугубляемая кризисными явлениями в экономике стран, заставляют искать альтернативные источники получения металлов. Одним из направлений решения этих глобальных проблем является вовлечение в производство отходов добычи и переработки извлеченных на земную поверхность руд [1].

Традиционные обогатительные процессы не обеспечивают полного раскрытия минералов, поэтому для решения этих проблем не могут быть востребованы. Комбинирование методов магнитного, гравитационного и электрохимического разделения и обогащения в ряде случаев позволяет выделять из хвостов товарные продукты, однако по экономическим соображениям редко бывает приемлемым.

Перспективным направлением считают извлечение металлов из хвостов добычи и переработки выщелачиванием в кучах и перколяторах, однако, эти процессы требуют много времени и недостаточно контролируются.

Получают развитие методы переработки некондиционного сырья комбинированными технологиями, сочетающими методы химического обогащения и активации в дезинтеграторе [2].

Экспериментальное извлечение свинца и цинка из хвостов обогащения Садонских месторождений осуществлено с использованием дезинтегратора, изготовленного с учетом осуществления операций химического выщелачивания в процессе механической активации. В ходе экспериментов получены регрессионные уравнения вариантов выщелачивания (табл. 1-10), которые позволили сформулировать универсальную математическую модель всех вариантов комбинирования.

Таблица 1

Регрессионный анализ экспериментальных данных агитационного выщелачивания руды

Уравнение регрессии	Показатели значимости
$\varepsilon_{Zn}=39{,}02 +5{,}51X_1-11{,}09X_2 +5{,}6X_3+1{,}43X_4 +3{,}58X_1^2 + +6{,}48X_2^2 - 9{,}39X_3^2 - 9{,}38X_4^2- 2{,}61X_1X_2 -0{,}62X_1X_3 -1{,}86X_1X_4 - -3{,}0X_2X_3-1{,}48X_2X_4 +1{,}41X_3X_4$	$R^2=0{,}8873$; $S_{ad}=62{,}01$; $F=31{,}96$
$\varepsilon_{Pb}=15{,}73 +0{,}58X_1+6{,}3X_2+1{,}42X_3 - 2{,}17X_1^2 -2{,}79X_2^2-2{,}73X_3^2- -1{,}51X_4^2 ++0{,}75X_1X_2 -0{,}89X_1X_3 +0{,}45X_2X_3-0{,}23X_3X_4$	$R^2=0{,}9023$; $S_{ad}=9{,}37$; $F=25{,}89$

Таблица 2

Регрессионный анализ экспериментальных данных агитационного выщелачивания хвостов

Уравнение регрессии	Показатели значимости
$\varepsilon_{Zn}=39{,}35 +6{,}76X_1-18{,}88X_2 -0{,}62X_4 - 11{,}6X_1^2+ 7{,}19X_2^2+ +2{,}03X_4^2 -2{,}84X_1X_2 -1{,}39X_1X_3 -0{,}89X_1X_4 -2{,}04X_2X_3 + +1{,}00X_2X_4 - 2{,}45X_3X_4$	$R^2=0{,}9393$; $S_{ad}=46{,}93$; $F=68{,}59$
$\varepsilon_{Pb}=42{,}43 +16{,}8X_2+2{,}68X_3 +0{,}93X_4 - 3{,}89X_1^2 -19{,}31X_2^2 + +2{,}36X_4^2 +2{,}12X_1X_2 -0{,}9X_1X_4 +1{,}73X_2X_3+1.04X_3X_4$	$R^2=0{,}8888$; $S_{ad}=71{,}17$; $F=30{,}19$

Таблица 3

Регрессионный анализ данных выщелачивания активированной руды

Уравнение регрессии	Показатели значимости
$\varepsilon_{Zn}=26{,}82+2{,}8X_1-7{,}21X_2+4{,}81X_3+2{,}34X_4-6{,}99X_1^2+3{,}29X_2^2- -1{,}74X_4^2 -0{,}45X_1X_2 +2{,}93X_1X_4 -2{,}98X_2X_3 -1{,}41X_2X_4 -1{,}12X_3X_4$	$R^2=0{,}8582$; $S_{ad}=31{,}92$; $F=35{,}03$
$\varepsilon_{Pb}=11{,}16 +1{,}51X_1+4{,}68X_2+ 0{,}53X_3 -0{,}81X_4+0{,}50X_1^2-4{,}50X_2^2- -0{,}72X_3^2 -0{,}94X_1X_3+0{,}60X_2X_3+0{,}24X_2X_4 +0{,}81X_3X_4$	$R^2=0{,}8754$; $S_{ad}=6{,}87$; $F=23{,}92$

Таблица 4

Регрессионный анализ экспериментальных данных выщелачивания активированных хвостов

Уравнение регрессии	Показатели значимости
$\varepsilon_{Zn}=36{,}37+9{,}96X_1-11{,}56X_2+1{,}07X_3-6{,}53X_1^2+5{,}63X_2^2-1{,}00X_3^2 - - 3{,}95X_4^2- -1{,}21X_1X_2 -5{,}79X_1X_3 -4{,}16X_2X_3 -0{,}74X_2X_4 -1{,}15X_3X_4$	$R^2=0{,}9688$; $S_{ad}=24{,}88$; $F=102{,}17$
$\varepsilon_{Pb}=29{,}91 +1{,}1X_1+10{,}63X_2+ 6{,}15X_3 +2{,}09X_4-2{,}41X_1^2- -26{,}29X_2^2+3{,}84X_3^2+ +9{,}25X_4^2 +1{,}21X_1X_2 -0{,}72X_1X_3+ +3{,}21X_1X_4+4{,}81X_2X_3+1{,}08X_2X_4 -1{,}00X_3X_4$	$R^2=0{,}8789$; $S_{ad}=86{,}00$; $F=10{,}52$

Таблица 5

Регрессионный анализ экспериментальных данных выщелачивания руды в дезинтеграторе

Уравнение регрессии	Показатели значимости
$\varepsilon_{Zn}=20{,}40 +4{,}92X_1-8{,}82X_2 +2{,}55X_3+1{,}71X_4 +1{,}03X_1^2 +6{,}57X_2^2- 3{,}84X_4^2+2{,}02X_2^4-2{,}19 X_1X_2-2{,}77X_1X_3-2{,}53X_2X_3-1{,}02X_2X_4-0{,}61X_3X_4$	$R^2=0{,}9348$; $S_{ad}=17{,}71$; $F=69{,}49$
$\varepsilon_{Pb}=11{,}10+0{,}35X_1+3{,}46 X_2+1{,}35X_4 - 0{,}79X_1^2 -5{,}061X_2^2-0{,}82X_3^2+ +0{,}64X_1X_2-0{,}55X_1X_3+0{,}16X_1X_4 -1{,}06X_2X_3+ 1{,}45X_2X_4+ +1{,}24X_3X_4$	$R^2=0{,}9254$; $S_{ad}=3{,}69$; $F=29{,}06$

Таблица 6

Регрессионный анализ экспериментальных данных выщелачивания хвостов в дезинтеграторе

Уравнение регрессии	Показатели значимости
$\varepsilon_{Zn}=32{,}15 +11{,}4X_1-14{,}04X_2 +0{,}68X_3+1{,}85X_4 -2{,}90X_1^2+9{,}25X_2^2-2{,}53X_4^2 -0{,}39X_1X_2-1{,}95X_1X_3+1{,}32X_1X_4 +1{,}47X_2X_3+4{,}84X_2X_4+ 3{,}61X_3X_4$	$R^2=0{,}8277$; $S_{ad}=143{,}62$; $F=18{,}06$
$\varepsilon_{Pb}=39{,}44 -1{,}17X_1+16{,}76 X_2+1{,}28X_3 -0{,}55X_4 - 5{,}64X_1^2 -14{,}81X_2^2- 0{,}86X_3^2-4{,}09X_1X_3-1{,}42X_1X_4 -0{,}42X_2X_3-1{,}00X_2X_4-0{,}82X_3X_4$	$R^2=0{,}9483$; $S_{ad}=35{,}09$; $F=44{,}58$

Таблица 7

Регрессионный анализ экспериментальных данных выщелачивания руды после дезинтеграции

Уравнение регрессии	Показатели значимости
ε_{Zn}=29,66+6,94X_1-8,41X_2 +3,6X_3+1,65X_4-11,17X_1^2-3,29X_2^2+ +1,78X_3^2 --3,43X_1X_2-1,65X_1X_3- 1,58X_1X_4 -0,75X_2X_3 -1,08X_3X_4	R^2=0,8254; S_{ad}=65,40; F=28,84
ε_{Pb}=15,40 +1,64X_1+7,47 X_2+2,28X_3+1,78X_4 – 1,66X_1^2 -6,80X_2^2+ +1,50X_3^2+1,63X_1X_2-1,60X_1X_3+0,23X_1X_4 1,08X_2X_3+1,9X_2X_4+0,66X_3X_4	R^2=0,9321; S_{ad}=11,62; F=25,08

Таблица 8

Регрессионный анализ экспериментальных данных выщелачивания хвостов после дезинтеграции

Уравнение регрессии	Показатели значимости
ε_{Zn}=37,54 +8,39X_1-20,02X_2 +3,33X_3 -6,72X_1^2-6,54X_2^2–1,93X_4^2–0,95X_1X_3-1,34X_1X_4-4,79X_2X_3+1,66X_2X_4+1,05X_3X_4	R^2=0,9484; S_{ad}=56,50; F=47,63
ε_{Pb}=32,93 +3,63X_1+17,87 X_2+3,58X_3 – 4,81X_1^2 -7,32X_2^2-1,49X_3^2+ +4,77X_1X_2 -1,45X_1X_3-1,3X_1X_4 +1,33X_2X_3-0,73X_3X_4	R^2=0,9535; S_{ad}=29,69; F=55,26

Таблица 9

Регрессионный анализ экспериментальных данных многоцикловой активации руды

Уравнение регрессии	Показатели значимости
ε_{Zn}=33,52 +5,04X_1-3,42X_2 +3,15X_3-10,55X_1^2+15,37X_2^2–4,08X_3^2–2,39X_4^2-2,01X_1X_2-2,67X_1X_3+3,63X_2X_3+ 6,90X_2X_4+ 3,05X_3X_4	R^2=0,8000; S_{ad}=65,74; F=32,66
ε_{Pb}=15,28+0,47X_1 +3,75X_2+3,91X_3+1,43X_4 – 3,14X_1^2 -3,46X_2^2+ +1,03X_3^2-1,41X_4^2+0,54X_1X_2-0,52X_1X_3-0,29X_1X_4-1,73X_2X_4+3,46X_3X_4	R^2=0,9795; S_{ad}=2,08; F=117,40

Таблица 10

Регрессионный анализ экспериментальных данных многоцикловой активации хвостов

Уравнение регрессии	Показатели значимости
-ε_{Zn}=38,15 +10,66X_1-15,17X_2 +2,42X_3-1,37X_4-6,10X_1^2-+3,92X_2^2– -2,99X_3^2–1,68X_4-4,85X_1X_2-4,62X_1X_3+2,1X_1X_4-3,56X_2X_3+ 1,95X_2X_4 + + 1,6X_3X_4	R^2=0,9206; S_{ad}=73,40; F=30,72
ε_{Pb}=40,94 +16,12X_2+4,13X_3+0,66X_4 – 6,36X_1^2 -17,44X_2^2+ 3,58X_3^2– -1,36X_4^2+4,04X_1X_2 -1,32X_1X_3+2,47X_2X_3-2,00X_2X_4-0,72X_3X_4	R^2=0,9535; S_{ad}=29,69; F=55,26

Активация в дезинтеграторе с последующим выщелачиванием вне его по сравнению с агитационным выщелачиванием увеличивает извлечение:

- из хвостов обогащения – по свинцу – в 1,36 раза, по цинку – в 1,13 раза;
- из забалансовой руды – по свинцу – в 1,63 раза, по цинку – в 2,09 раза.

Активация сырья в дезинтеграторе одновременно с выщелачиванием по сравнению с вариантом раздельной активации и выщелачивания увеличивает извлечение на величину в первые проценты. При этом время переработки составляет первые секунды, в то время как продолжительность агитационного выщелачивания на 2 порядка выше.

Известные к настоящему времени варианты выщелачивания металлов из руд включают в себя:

– выщелачивание в перколяторе;

– выщелачивание в перколяторе после обработке в активаторе в сухом состоянии;

– выщелачивание реагентами в рабочей камере активатора.

Последний вариант включает в себя:

– выщелачивание реагентами в рабочей камере активатора в одну стадию;

– выщелачивание реагентами в рабочей камере активатора в несколько стадий.

На основании полученных регрессионных уравнений разработана универсальная модель извлечения металла из руд, учитывающая особенности выщелачивания металлов из минерального сырья на различных этапах.

Учет этапов выщелачивания металлов выполняется с помощью переменной «n»:

– значению $n=1$ соответствует этап агитационного выщелачивания в перколяторе;

– значению $n=2$ соответствует агитационное выщелачивание в перколяторе предварительно активированных в сухом состоянии в дезинтеграторе минералов;

– значению $n=3$ соответствует выщелачивание минералов реагентами в рабочей камере дезинтегратора;

– $n=4$ соответствует агитационное выщелачивание активированных в рабочей камере дезинтегратора минералов реагентами в одну стадию;

– $n=5$ соответствует выщелачивание активированных в рабочей камере дезинтегратора минералов реагентами в несколько стадий.

Учет разных случаев извлечения металлов из руды описывается с помощью переменной «m»:

– значению $m=1$ соответствует модель выщелачивания цинка из руды;

– значению $m=2$ соответствует модель выщелачивания свинца из руды;

– значению $m=3$ соответствует модель выщелачивания цинка из хвостов;

– значению $m=4$ соответствует модель выщелачивания свинца из хвостов.

Расчеты регрессионных моделей проведены в среде Maple 9.5, причем уравнения регрессий, рассчитанные на основе экспериментальных данных, получаются из общей модели при соответствующих значениях «m» и «n».

I. Используя регрессионные модели выщелачивания из руды цинка $(m=1)$, объединим все пять этапов выщелачивания в единую модель. При этом в одну модель объединяются уравнения регрессий по цинку, рассчитанные на основе экспериментальных данных $(n=1)$.....$(n=5)$.

На каждом из этапов регрессионные модели имеют вид:

$$\varepsilon_{Zn}=\varepsilon(n;1)=a_0+a_1\cdot X_1+a_2\cdot X_2+a_3\cdot X_3+a_4\cdot X_4+a_5\cdot X_1^2+a_6\cdot X_2^2+a_7\cdot X_3^2+ \\ +a_8\cdot X_4^2+a_9\cdot X_1X_2+a_{10}\cdot X_1X_3+a_{11}\cdot X_1X_4+a_{12}\cdot X_2X_3+a_{13}\cdot X_2X_4+a_{14}\cdot X_3X_4, \quad (1)$$

где $a_k=a_k(n;1); k=0,1,...14; n=1,2,...,5.$ конкретные числа из таблиц при заданных значениях k и n. Например, для первой модели выщелачивания из руды цинка $(m=1)$ при k=0 и n=1 коэффициент $a_0=a_0(1;1)=39,02$ (этот коэффициент равен свободному члену из табл. 1), аналогично $a_1=a_1(1;1)=5,51-$это коэффициент при X_1, и т.д. Значение a_k- это k-й коэффициент в уравнении регрессии, k=1,2,…,14.

Значение n указывает на номер этапа исследований, например, при n=1 рассматривается этап агитационного выщелачивания в перколяторе, и т.д.

Значение m означает номер модели выщелачивания цинка или свинца, из руды, или хвостов. При $m=1$ рассматривается модель выщелачивания цинка из руды и т. д. Рассуждения в последующих моделях (m=2, 3, 4) повторяются по той же схеме.

Значения $a_k = a_k(n;m);\ k = 0,1,...14;\ n = 1,2,...,5; m = 1,2,...,4$ описывают все коэффициенты регрессий рассматриваемой общей модели.

Так как модель (1) является линейной относительно параметров a_k, то для нахождения единой модели достаточно найти значения коэффициентов a_k. Формулы для коэффициентов a_k строятся с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$a_k(n;1) = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}a_k(1;1) - \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}a_k(2;1) +$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{2!\cdot 2!}a_k(3;1) - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{3!}a_k(4;1) + \quad (2)$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}a_k(5;1).$$

где $4!$ - четыре факториал- сокращенная запись произведения чисел од единицы до четырех.

Коэффициенты $a_k(1;1),....,a_k(5;1)$, $k = 0,1,...,14$ определяются из уравнений регрессии, рассчитанных для полученных экспериментально данных.

Рассчитанное в Maple регрессионное уравнение, определяющее процент выщелачивания из руды цинка $(m=1)$ имеет вид (1), где коэффициенты $a_k = a_k(n;1);\ k = 0,1,...14$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
&1)\ \ a_0(n;1) = 14,37 + 65,24\cdot n - 54,34\cdot n^2 + 15,087\cdot n^3 - 1,335\cdot n^4;\\
&2)\ \ a_1(n;1) = 19,09 - 21,31\cdot n + 8,964\cdot n^2 - 1,284\cdot n^3 + 0,046\cdot n^4;\\
&3)\ \ a_2(n;1) = -32,42 + 35,221\cdot n - 16,861\cdot n^2 + 3,164\cdot n^3 - 0,194\cdot n^4;\\
&4)\ \ a_3(n;1) = -9,45 + 30,158\cdot n - 19,5\cdot n^2 + 4,793\cdot n^3 - 0,4\cdot n^4;\\
&5)\ \ a_4(n;1) = -7,4 + 15,984\cdot n - 9,107\cdot n^2 + 2,131\cdot n^3 - 0,178\cdot n^4; \qquad (3)\\
&6)\ \ a_5(n;1) = 145,1 - 262,609\cdot n + 154,969\cdot n^2 - 36,916\cdot n^3 + 3,036\cdot n^4;\\
&7)\ \ a_6(n;1) = 93,72 - 170,058\cdot n + 108,155\cdot n^2 - 27,808\cdot n^3 + 2,47\cdot n^4;\\
&8)\ \ a_7(n;1) = -96,63 + 158,414\cdot n - 90,85\cdot n^2 + 21,451\cdot n^3 - 1,775\cdot n^4;\\
&9)\ \ a_8(n;1) = -9,99 - 8,568\cdot n + 12,703\cdot n^2 - 3,873\cdot n^3 + 0,347\cdot n^4;\\
&10)\ \ a_9(n;1) = -15,31 + 20,743\cdot n - 9,617\cdot n^2 + 1,667\cdot n^3 - 0,093\cdot n^4;\\
&11)\ \ a_{10}(n;1) = -25,22 + 46,781\cdot n - 28,385\cdot n^2 + 6,759\cdot n^3 - 0,555\cdot n^4;\\
&12)\ \ a_{11}(n;1) = -30 + 46,758\cdot n - 22,66\cdot n^2 + 4,327\cdot n^3 - 0,285\cdot n^4;\\
&13)\ \ a_{12}(n;1) = -3,12 + 0,254\cdot n - 0,145\cdot n^2 - 0,004\cdot n^3 + 0,015\cdot n^4;\\
&14)\ \ a_{13}(n;1) = 3,4 - 10,133\cdot n + 7,054\cdot n^2 - 2,007\cdot n^3 + 0,206\cdot n^4;\\
&15)\ \ a_{14}(n;1) = 20,6 - 34,46\cdot n + 19,54\cdot n^2 - 4,67\cdot n^3 + 0,4\cdot n^4.
\end{aligned}$$

II. Аналогично, используя регрессионные модели выщелачивания свинца из руды ($m = 2$), объединим все пять этапов выщелачивания в единую модель. При этом в одну модель объединяются уравнения регрессий по свинцу, рассчитанные на основе данных эксперимента $(n=1),(n=2),(n=3),(n=4),(n=5)$.

На каждом из этапов регрессионные модели имеют вид:

$$\varepsilon_{Pb} = \varepsilon(n;2) = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + a_3 \cdot X_3 + a_4 \cdot X_4 + a_5 \cdot X_1^2 + a_6 \cdot X_2^2 + a_7 \cdot X_3^2 + \\ + a_8 \cdot X_4^2 + a_9 \cdot X_1 X_2 + a_{10} \cdot X_1 X_3 + a_{11} \cdot X_1 X_4 + a_{12} \cdot X_2 X_3 + a_{13} \cdot X_2 X_4 + a_{14} \cdot X_3 X_4, \quad (4)$$

где $a_k = a_k(n;2)$; $k = 0,1,...14$; $n = 1,2,...,5$.

Так как модель (4) является линейной относительно параметров a_k, то для нахождения единой модели достаточно найти значения коэффициентов a_k. Формулы для коэффициентов a_k строятся с помощью интерполяционного полинома Лагранжа [1]:

$$a_k(n;2) = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!} a_k(1;2) - \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!} a_k(2;2) + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{2! \cdot 2!} a_k(3;2) - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{3!} a_k(4;2) + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!} a_k(5;2). \quad (5)$$

Коэффициенты $a_k(1;2),....,a_k(5;2)$, $k = 0,1,...,14$ определяются из уравнений регрессии, рассчитанных для экспериментальных данных.

Рассчитанное в Maple регрессионное уравнение, определяющее процент выщелачивания из руды свинца ($m = 2$) имеет вид (4), где коэффициенты $a_k = a_k(n;2)$; $k = 0,1,...14$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
&1)\ a_0(n;2) = 16,23 + 6,573 \cdot n - 10,317 \cdot n^2 + 3,608 \cdot n^3 - 0,363 \cdot n^4;\\
&2)\ a_1(n;2) = -16,43 + 32,076 \cdot n - 19,366 \cdot n^2 + 4,694 \cdot n^3 - 0,394 \cdot n^4;\\
&3)\ a_2(n;2) = -14,3 + 43,698 \cdot n - 30,574 \cdot n^2 + 8,218 \cdot n^3 - 0,741 \cdot n^4;\\
&4)\ a_3(n;2) = -5,69 + 15,374 \cdot n - 10,889 \cdot n^2 + 2,871 \cdot n^3 - 0,246 \cdot n^4;\\
&5)\ a_4(n;2) = 14,13 - 25,653 \cdot n + 14,425 \cdot n^2 - 3,138 \cdot n^3 + 0,235 \cdot n^4; \qquad (6)\\
&6)\ a_5(n;2) = -18,74 + 28,216 \cdot n - 14,454 \cdot n^2 + 3,039 \cdot n^3 - 0,23 \cdot n^4;\\
&7)\ a_6(n;2) = 10,88 - 25,38 \cdot n + 15,283 \cdot n^2 - 3,928 \cdot n^3 + 0,354 \cdot n^4;\\
&8)\ a_7(n;2) = -21,22 + 33,975 \cdot n - 19,926 \cdot n^2 + 4,85 \cdot n^3 - 0,409 \cdot n^4;\\
&9)\ a_8(n;2) = -8,46 + 11,61 \cdot n - 5,84 \cdot n^2 + 1,285 \cdot n^3 - 0,105 \cdot n^4;\\
&10)\ a_9(n;2) = 2,54 - 1,846 \cdot n - 0,292 \cdot n^2 + 0,406 \cdot n^3 - 0,058 \cdot n^4;\\
&11)\ a_{10}(n;2) = 6,93 - 15,511 \cdot n + 10,048 \cdot n^2 - 2,584 \cdot n^3 + 0,227 \cdot n^4;\\
&12)\ a_{11}(n;2) = 0,16 - 0,178 \cdot n - 0,035 \cdot n^2 + 0,063 \cdot n^3 - 0,01 \cdot n^4;\\
&13)\ a_{12}(n;2) = -19,75 + 39,463 \cdot n - 24,934 \cdot n^2 + 6,198 \cdot n^3 - 0,526 \cdot n^4;
\end{aligned}$$

14) $a_{13}(n;2)=0,87-1,074\cdot n-0,104\cdot n^2+0,374\cdot n^3-0,066\cdot n^4;$

15) $a_{14}(n;2)=3,31-8,758\cdot n+7,08\cdot n^2-2,063\cdot n^3+0,2\cdot n^4.$

III. Рассмотрим теперь модель извлечения цинка из хвостов ($m=3$), объединив все пять этапов выщелачивания в единую модель. При этом в одну модель объединяются уравнения регрессий по цинку, рассчитанные на основе экспериментальных данных ($n=1$), ($n=2$),($n=3$), ($n=4$), ($n=5$).

На каждом из этапов регрессионные модели имеют вид:

$$\varepsilon_{Zn}=\varepsilon(n;3)=a_0+a_1\cdot X_1+a_2\cdot X_2+a_3\cdot X_3+a_4\cdot X_4+a_5\cdot X_1^2+a_6\cdot X_2^2+a_7\cdot X_3^2+$$
$$+a_8\cdot X_4^2+a_9\cdot X_1X_2+a_{10}\cdot X_1X_3+a_{11}\cdot X_1X_4+a_{12}\cdot X_2X_3+a_{13}\cdot X_2X_4+a_{14}\cdot X_3X_4, \qquad (7)$$

где $a_k=a_k(n;3);\, k=0,1,...14;\, n=1,2,...,5.$

Формулы для коэффициентов a_k из (7) строятся с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$a_k(n;3)=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}a_k(1;3)-\frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}a_k(2;3)+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{2!\cdot 2!}a_k(3;3)-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{3!}a_k(4;3)+ \qquad (8)$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}a_k(5;3).$$

Коэффициенты $a_k(1;3),....,a_k(5;3),\quad k=0,1,...,14$ определяются из уравнений регрессии, рассчитанных по данным эксперимента.

Рассчитанное в Maple регрессионное уравнение, определяющее процент выщелачивания из хвостов цинка ($m=3$) имеет вид (7), где коэффициенты $a_k=a_k(n;3);\, k=0,1,...14$ определяются по формулам:

1) $a_0(n;3)=5+71,355\cdot n-48,278\cdot n^2+12,325\cdot n^3-1,052\cdot n^4;$

2) $a_1(n;3)=16,91-24,967\cdot n+19,923\cdot n^2-5,623\cdot n^3+0,518\cdot n^4;$

3) $a_2(n;3)=-34,27+16,841\cdot n+0,51\cdot n^2-2,296\cdot n^3+0,335\cdot n^4;$

4) $a_3(n;3)=-18,13+34,635\cdot n-21,418\cdot n^2+5,375\cdot n^3-0,463\cdot n^4;$

5) $a_4(n;3)=14,03-29,243\cdot n+18,83\cdot n^2-4,618\cdot n^3+0,38\cdot n^4;$ (9)

6) $a_5(n;3)=5,8-41,08\cdot n+31,394\cdot n^2-8,46\cdot n^3+0,746\cdot n^4;$

7) $a_6(n;3)=108,77-200,766\cdot n+129,628\cdot n^2-33,369\cdot n^3+2,927\cdot n^4;$

8) $a_7(n;3)=7,01-11,604\cdot n+5,473\cdot n^2-0,921\cdot n^3+0,042\cdot n^4;$

9) $a_8(n;3)=32,32-50,254\cdot n+24,593\cdot n^2-4,991\cdot n^3+0,362\cdot n^4;$

10) $a_9(n;3)=-10,85+14,354\cdot n-8,354\cdot n^2+2,226\cdot n^3-0,216\cdot n^4;$

11) $a_{10}(n;3)=31,58-56,344\cdot n+28,69\cdot n^2-5,701\cdot n^3+0,385\cdot n^4;$

12) $a_{11}(n;3)=17,55-38,028\cdot n+25,756\cdot n^2-6,773\cdot n^3+0,604\cdot n^4;$

13) $a_{12}(n;3)=66,49-131,043\cdot n+80,419\cdot n^2-19,532\cdot n^3+1,626\cdot n^4;$

14) $a_{13}(n;3)=54,45-101,179\cdot n+61,025\cdot n^2-14,476\cdot n^3+1,18\cdot n^4;$

15) $a_{14}(n;3)=31,7-67,841\cdot n+43,441\cdot n^2-10,634\cdot n^3+0,884\cdot n^4.$

IV. Рассмотрим модель извлечения свинца из хвостов ($m=4$), объединив все пять этапов выщелачивания в единую модель. При этом в одну модель объединяются уравнения регрессий по свинцу, рассчитанные на основе экспериментально полученных данных ($n=1$), ($n=2$), ($n=3$), ($n=4$), ($n=5$).

На каждом из этапов регрессионные модели имеют вид:

$$\varepsilon_{Pb}=\varepsilon(n;4)=a_0+a_1\cdot X_1+a_2\cdot X_2+a_3\cdot X_3+a_4\cdot X_4+a_5\cdot X_1^2+a_6\cdot X_2^2+a_7\cdot X_3^2+$$
$$+a_8\cdot X_4^2+a_9\cdot X_1X_2+a_{10}\cdot X_1X_3+a_{11}\cdot X_1X_4+a_{12}\cdot X_2X_3+a_{13}\cdot X_2X_4+a_{14}\cdot X_3X_4, \qquad (10)$$

где $a_k=a_k(n;4);\, k=0,1,...14;\, n=1,2,...,5.$

Формулы для коэффициентов a_k из (10) строятся с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$a_k(n;4)=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}a_k(1;4)-\frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!}a_k(2;4)+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{2!\cdot 2!}a_k(3;4)-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{3!}a_k(4;4)+ \qquad (11)$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}a_k(5;4).$$

Коэффициенты $a_k(1;4),....,a_k(5;4),\quad k=0,1,...,14$ определяются из уравнений регрессии, рассчитанных для экспериментальных данных.

Рассчитанное в Maple регрессионное уравнение, определяющее процент выщелачивания из хвостов цинка ($m=4$) имеет вид (10), где коэффициенты $a_k=a_k(n;4);\, k=0,1,...14$ определяются по формулам:

1) $a_0(n;4)=183,74-258,448\cdot n+149,23\cdot n^2-34,953\cdot n^3+2,86\cdot n^4;$

2) $a_1(n;4)=-40,85+79,337\cdot n-49,954\cdot n^2+12,548\cdot n^3-1,081\cdot n^4;$

3) $a_2(n;4)=72,07-96,957\cdot n+51,878\cdot n^2-11,003\cdot n^3+0,812\cdot n^4;$

4) $a_3(n;4)=-49,07+95,311\cdot n-55,307\cdot n^2+12,764\cdot n^3-1,018\cdot n^4;$

5) $a_4(n;4)=-21,09+40,654\cdot n-23,575\cdot n^2+5,361\cdot n^3-0,42\cdot n^4;$ (12)

6) $a_5(n;4)=-34,06+56,311\cdot n-33,306\cdot n^2+7,799\cdot n^3-0,634\cdot n^4;$

7) $a_6(n;4)=37,41-94,224\cdot n+44,557\cdot n^2-7,421\cdot n^3+0,368\cdot n^4;$

8) $a_7(n;4)=-35,97+62,643\cdot n-32,893\cdot n^2+6,677\cdot n^3-0,458\cdot n^4;$

9) $a_8(n;4)=-82,06+152,648\cdot n-85,96\cdot n^2+19,232\cdot n^3-1,5\cdot n^4;$

10) $a_9(n;4)=-21,31+48,053\cdot n-32,33\cdot n^2+8,447\cdot n^3-0,74\cdot n^4;$

11) $a_{10}(n;4)=-27,77+54,923\cdot n-35,039\cdot n^2+8,602\cdot n^3-0,716\cdot n^4;$

12) $a_{11}(n;4)=-44,3+77,493\cdot n-42,739\cdot n^2+9,357\cdot n^3-0,711\cdot n^4;$

13) $a_{12}(n;4)=-47,83+91,243\cdot n-52,812\cdot n^2+12,082\cdot n^3-0,953\cdot n^4;$

14) $a_{13}(n;4) = -22,8 + 42,927 \cdot n - 25,787 \cdot n^2 + 6,173 \cdot n^3 - 0,513 \cdot n^4$;

15) $a_{14}(n;4) = 9,93 - 14,438 \cdot n + 6,803 \cdot n^2 - 1,352 \cdot n^3 + 0,097 \cdot n^4$.

На основе выполненных расчетов строится универсальная математическая модель извлечения металла из руды. Так как для каждого значения переменной «m» регрессионная модель имеет одну и ту же линейную структуру, то и универсальная модель имеет тот же вид:

$$\varepsilon = \varepsilon(n;m) = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + a_3 \cdot X_3 + a_4 \cdot X_4 + a_5 \cdot X_1^2 + a_6 \cdot X_2^2 + a_7 \cdot X_3^2 + \\ + a_8 \cdot X_4^2 + a_9 \cdot X_1 X_2 + a_{10} \cdot X_1 X_3 + a_{11} \cdot X_1 X_4 + a_{12} \cdot X_2 X_3 + a_{13} \cdot X_2 X_4 + a_{14} \cdot X_3 X_4, \quad (13)$$

здесь $a_k = a_k(n;m)$; $k = 0,1,...,14$; $n = 1,2,...,5$; $m = 1,2,3,4$.

Коэффициенты $a_k = a_k(n;m)$ определяются через $a_k(n;1), a_k(n;2)$, $a_k(n;3), a_k(n;4)$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$a_k(n;m) = -\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{3!} a_k(n;1) + \frac{(m-1)(m-3)(m-4)}{2!} a_k(n;2) - \\ - \frac{(m-1)(m-2)(m-4)}{2!} a_k(n;3) + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!} a_k(n;4), \quad (14)$$

где коэффициенты $a_k(n;1)$, $a_k(n;2)$, $a_k(n;3)$, $a_k(n;4)$ определяются по формулам (3), (6), (9), (12).

Из формул (3), (6), (9), (12) при подходящих значениях «n» может быть получено каждое из уравнений регрессии (относящееся к своему классу), описанное в таблицах.

Из формул (13, 14) при соответствующих значениях «n» и «m» может быть получено любое уравнение регрессии, описанное в таблицах. Таким образом, уравнение (13) с коэффициентами (14) описывает общую модель извлечения металла из руды.

Из моделей (13, 14) можно получать различные осредненные по некоторым параметрам зависимости, характеризующие остальные (не осредненные) параметры извлечения металлов.

Универсальная модель и составленная на ее основе программа моделирования позволяет механизировать расчет параметров технологий, использующих методы механо-активации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голик В.И.* Упрочнение сырьевой базы цветной металлургии извлечением металлов из хвостов обогащения. Цветная металлургия. Москва.2010.№12.

2. *Голик В.И.* Научные основы инновационных технологий извлечения металлов из хвостов обогащения//Цветная металлургия.2010.№5. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Голик Владимир Иванович — доктор технических наук, профессор, ЦГИ ВНЦ РАН, г. Владикавказ,

Исмаилов Тахир Турсунович – доктор технических наук, профессор, Московский государственный горный университет, Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru,

Мицик М.Ф. – кандидат технических наук, доцент, ЮРГУЭС, г. Шахты.