

УДК 550.812:51:553.3.071

**А.В. Загибалов**

**ВЫЯВЛЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ  
РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО  
ПРИ РАЗВЕДКЕ И ОПРОБОВАНИИ РОССЫПНЫХ  
МЕСТОРОЖДЕНИЙ ЗОЛОТА**

*Выполнен анализ распределения содержаний золота в россыпи по линиям гармоническим анализом Фурье. При этом выбор длины волны периодических составляющих следует производить путем их последовательного поиска и дальнейшего исключения выявленных гармоник из ряда данных. Этот метод выявления периодических составляющих позволяет выявить все несущие гармоники при наличии даже достаточно большой случайной составляющей, что не позволяет сделать анализ Фурье с выбором длины волны через автокорреляционную функцию и классический анализ Фурье, длины волн которого полностью зависят от длины ряда исходных данных.*

*Ключевые слова: золото, россыпь, сглаживание, гармонический анализ.*

---

**В** выявление закономерной составляющей при оценке результатов разведки и опробования считается одной из весьма важных задач, т.к. это позволяет избавиться от «случайного шума», выявить те или иные тенденции в изменении исследуемого показателя. При оценке результатов разведки россыпных месторождений в качестве исходных данных выбирается наиболее варьируемый признак – содержание золота. Предварительные исследования показали, что изменчивость содержания золота обычно больше, чем изменчивость вертикального запаса или мощности. Кроме того, содержание золота в сплошном проколе можно считать также вертикальным запасом, если мощность пласта или горной массы принять за постоянную величину. В данной работе в качестве исходных данных для построения модели россыпного месторождения были выбраны результаты сплошного опробования россыпи «Верхний Аканак» (Бодайбинский район) при ее подземной

отработке. Граница россыпи определяется величиной бортового содержания золота для оконтуривания балансовых запасов (рис. 1). На рисунке также показаны места отбора отдельных данных для их дальнейшего анализа и выявления закономерных составляющих.

Сглаженное значение показателя можно определить методами скользящего и нескользящего окна, средневзвешенного на обратное расстояние до точки, полиномиальной кривой различного порядка, сплайн – кривыми, гармоническими рядами Фурье и др.

Полиномиальная интерполяция и аппроксимация определяется алгебраическим полиномом заданного порядка:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2 + b_3 X_i^3 + \dots + b_m X_i^m$$

Сглаживание полиномом не всегда обеспечивает непрерывность производных функции  $y(x)$  и может давать значительные погрешности в промежутках между узлами. Кроме того,

она плохо приспособлена для экстраполяции и, как правило, не обеспечивает правильное поведение  $y(x)$  за пределами интервала интерполяции.

От этих недостатков свободна интерполяция и аппроксимация с помощью сплайн-функций. Сплайном (или кусочно-сопряженной функцией) называют такую функцию, кривая которой состоит из отрезков полиномиальных кривых; эти отрезки состыкованы так, что производные полученной функции (до порядка на единицу меньшей степени используемых полиномов) непрерывны на всем рассматриваемом промежутке.

Подобные функции удобны для интерполяции. При многочленах относительно низкой степени часто можно избежать явно волнообразного поведения функции, которое характерно для случаев сглаживания большого числа эмпирических наблюдений единственным многочленом. С другой стороны, данная процедура обеспечивает наибольшую гладкость, чем традиционная кусочно-линейная интерполяция, при которой интерполяционная функция имеет разрывы даже в первой производной. Сплайн очевидным образом обеспечивает непрерывность производных интерполяционной функции до максимально высокого возможного порядка при выполнении условия, что степень многочленов, используемых для сглаживания исходных данных, ниже степени того единственного многочлена, кривая которого проходит через все заданные точки. Для каждого отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$  изменения  $x$  кубическая сплайн-функция записывается в виде:

$$f_i(x) = \frac{1}{6h_i} [m_i(x_{i+1} - x)^3 + m_{i+1}(x - x_i)^3] + \frac{1}{h_i} \left[ \left( y_i - \frac{m_i h_i^2}{6} \right) (x_{i+1} - x) + \left( y_{i+1} - \frac{m_{i+1} h_i^2}{6} \right) (x - x_i) \right]$$

8

где  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $f_i(x) = y(x)$ ,  $m_i = f''(x_i)$  и  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n$ -число узлов). При известных  $x_i$ ,  $y_i$  и  $m_i$  эта формула задает сплайн-функцию [ 1 ]. На рис. 2 показаны результаты сглаживания сплайн-функцией выборки результатов опробования вдоль россыпи.

Разложение в ряд Фурье тесно связано с аппроксимацией функции по методу наименьших квадратов. Действительно, коэффициенты Фурье дают наименьшее квадратическое приближение к исходным данным:

$$y(k) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

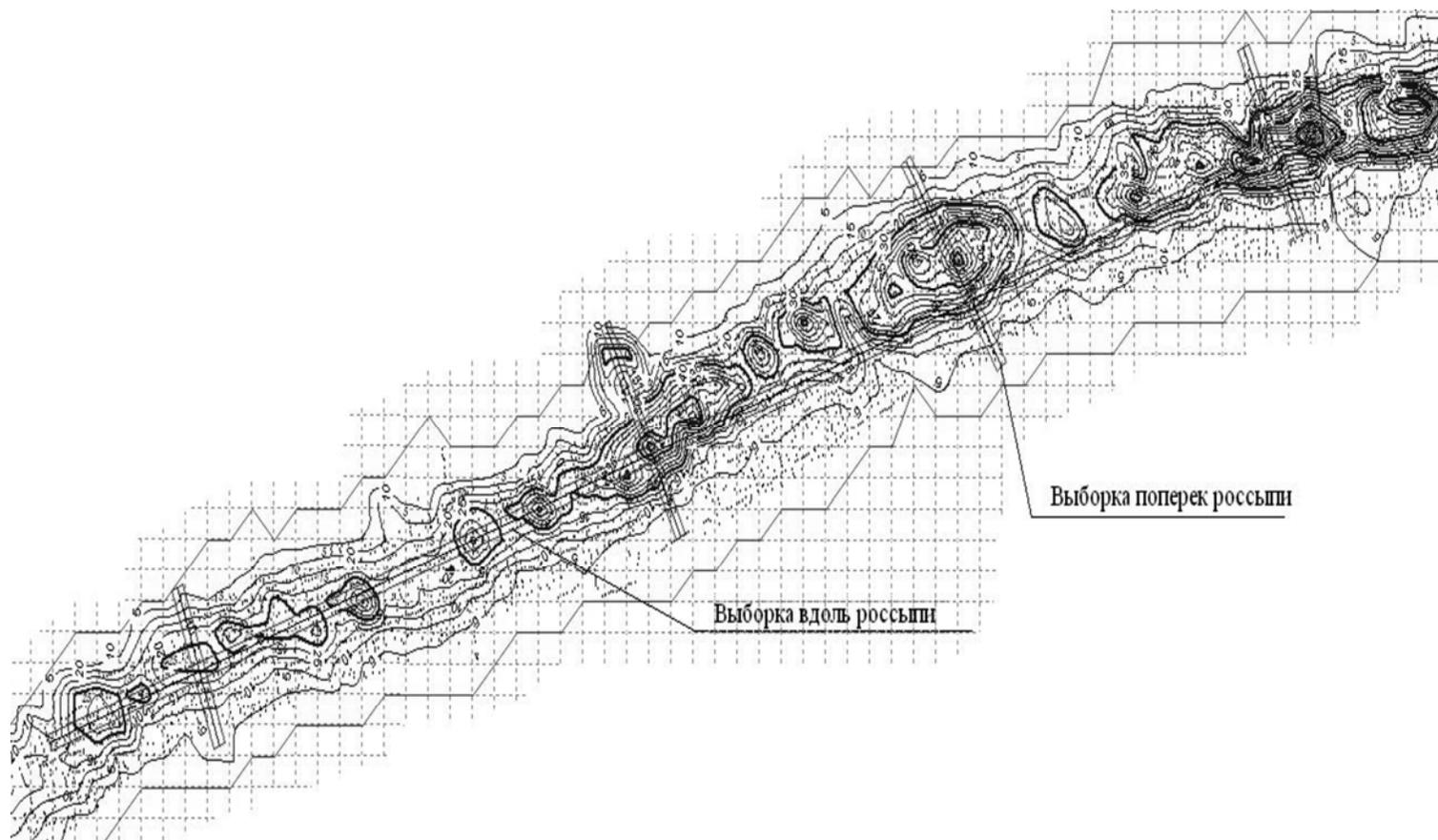
что доказывается в ряде работ, посвященных использованию различных фильтров при сглаживании результатов пространственных и временных рядов измерений [ 6 ]. Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются по формулам Эйлера-Фурье:

$$a_k = \frac{2}{k} \int_0^k y(t) \cos 2\pi qfk \delta k$$

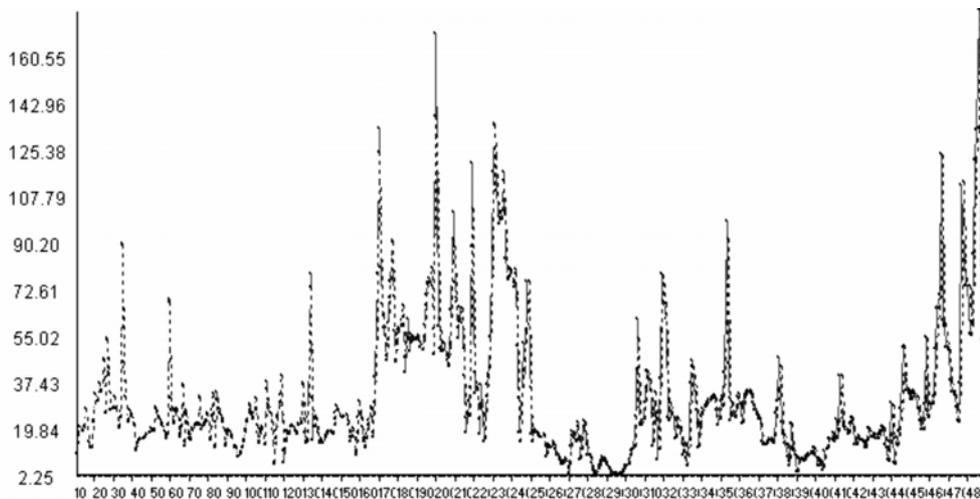
$$b_k = \frac{2}{k} \int_0^k y(t) \sin 2\pi qfk \delta k$$

Количество гармоник, участвующих в представлении временного ряда может быть любым, но не более чем половина всех исходных данных. При выполнении гармонического анализа основную роль играет выбор длины волны основной (или фундаментальной гармоникой). В большинстве алгоритмов гармонического анализа в качестве длины волны основной гармоникой выбирается длина временного ряда  $n$  из предположения, что данные ряда имеют циклический характер. Количество гармоник вычисляется для значений вплоть до  $n/2$ .

Значение  $n/2$  называется частотой Найквиста.



**Рис. 1. Фрагмент плана сплошного опробования и изолиний содержания золота по россыпи**



**Рис. 2. Сглаживание сплайн - функцией выборки вдоль россыпи**

----- модель                      ————— сглаженный ряд

Известно, что синусоидальную волну невозможно определить по числу точек, меньшему трех, и  $n/2$  - максимальная частота, которую можно определить таким образом. Однако такой способ выбора начальной длины волны обладает существенным недостатком, а именно, длина волны всегда зависит от длины ряда. Действительно, природное изменение содержания в пространстве ни коим образом не должно зависеть от количества исходных наблюдаемых значений. Количество таких наблюдений (как и место их отбора) может быть любым и во многом зависит от человека, который делает эту выборку. Поэтому, тот математический аппарат гармонического анализа Фурье, который получил широкое распространение, не может быть применен для исследования результатов опробования [3]. На рис. 3 показан результат сглаживания Фурье по выборке данных вдоль россыпи. Параметры гармоник приведены в табл. 3.

При большом количестве  $n$  при сглаживании следует внести ограни-

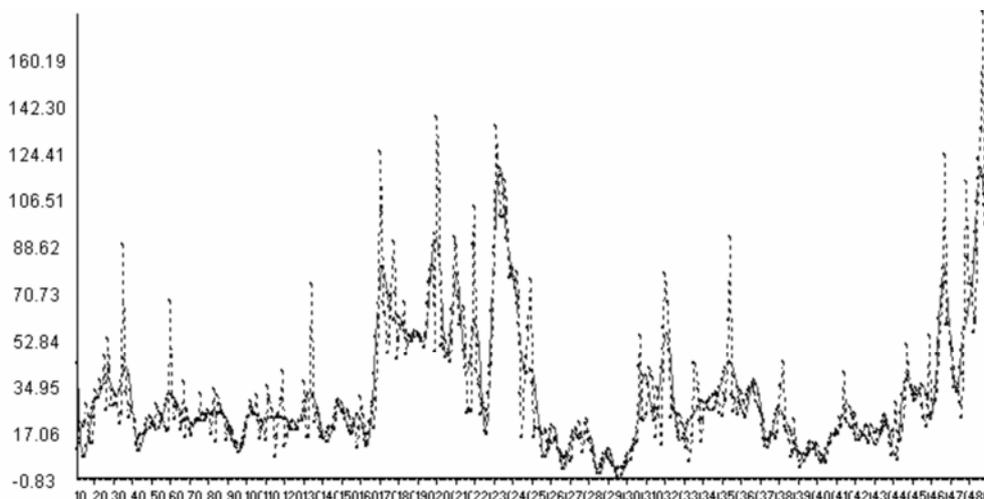
чение на число сглаживающих гармоник. В некоторых случаях можно ограничение ввести по дисперсиям каждой из гармоник. Как представляется этот способ не совсем удобным, и мы предлагаем способ ограничения количества гармоник по дисперсиям остатков временного ряда.

Покажем это на модельном примере [4]. В качестве модели выберем функцию суммы двух синусоидальных кривых с известными параметрами:

$$x_i = A_1 * \sin\left(2 * \pi * \frac{\varphi_1 + i}{L_1}\right) + A_2 * \sin\left(2 * \pi * \frac{\varphi_2 + i}{L_2}\right) + 20 - 0.1 * i$$

В формулу модели к сумме двух гармоник добавлен линейный тренд для того, чтобы в данных не было отрицательных значений. По указанной формуле был получен ряд в 50 значений. Гармоники модели имеют следующие параметры (табл. 1).

По модельным данным был проведен гармонический анализ при 50, 40 и 30 значениях.



**Рис. 3. Сглаживание Фурье**

Таблица 1

**Параметры гармоник модели**

Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазовый сдвиг $\varphi$
5	50	20
10	4	1

График исходных данных и результатов анализа Фурье при 50 значениях показан на рис. 4 (обозначения аналогичны рис. 1).

Параметры гармоник, полученных в результате сглаживания рядами Фурье, приведены в табл. 2. При сравнении начальных параметров гармоник модели с результатами гармонического анализа мы видим, что параметры гармоник не совпадают между собой. Кроме того, при изменении количества исходных данных амплитуды и длины волн синусоидальных

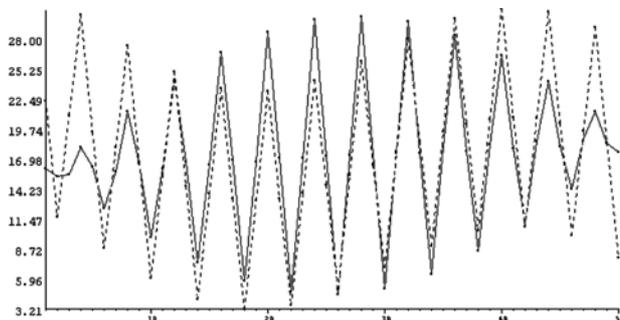
кривых также изменяются. Особенно сильно это отражается на длинах волн. Хотя начальные параметры гармоник при этом не изменяются.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что классический метод анализа Фурье, связанный с выбором начальной длины волны через количество исходных данных не может быть применен при анализе природных временных рядов. Поэтому была проведена работа по преобразованию классического алгоритма гармонического анализа в алгоритм, который бы позволял вскрывать параметры гармоник независимо от количества значений временного ряда и, который бы удовлетворительно вскрывал параметры модельных гармоник.

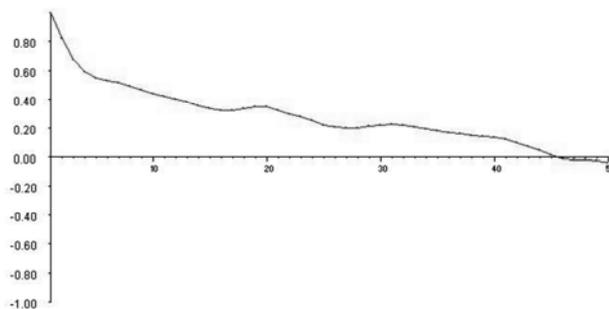
Таблица 2

**Результаты гармонического анализа по модельным данным**

N=50			n=40			n=30		
Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазо- вый сдвиг $\varphi$	Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазо- вый сдвиг $\varphi$	Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазо- вый сдвиг $\varphi$
6,53	3,85	-0,06	9,91	4,00	3,97	6,38	4,29	-0,02
6,21	4,17	0,07	3,86	40,00	1,83	6,36	3,75	0,02



**Рис. 4. Результаты анализа Фурье по модели**



**Рис. 5. График автокорреляционной функции по выборке вдоль россыпи**

Решение поставленной задачи можно выполнить двумя способами. Первый способ основан на определении длины волны сглаживающей гармоники через автокорреляционную функцию, выделение остатков от предыдущего сглаживания гармониками и повторный анализ остатков.

Автокорреляционная функция временного ряда конечной длины  $n$  с лагом  $\tau$  может быть вычислена по формуле:

$$r_{\tau} = \frac{\left[ (n - \tau) \cdot \left( \sum_{i=1}^{n-\tau} Y_i Y_{i+\tau} \right) - \sum_{i=1}^{n-\tau} Y_i \sum_{i+\tau=1}^{n-\tau} Y_{i+\tau} \right]}{(n - \tau)(n - \tau - 1)} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right)^2}{n(n-1)} \right]}$$

Воспользовавшись свойством радиуса автокорреляции, который равен одной четвертой длины волны, можно

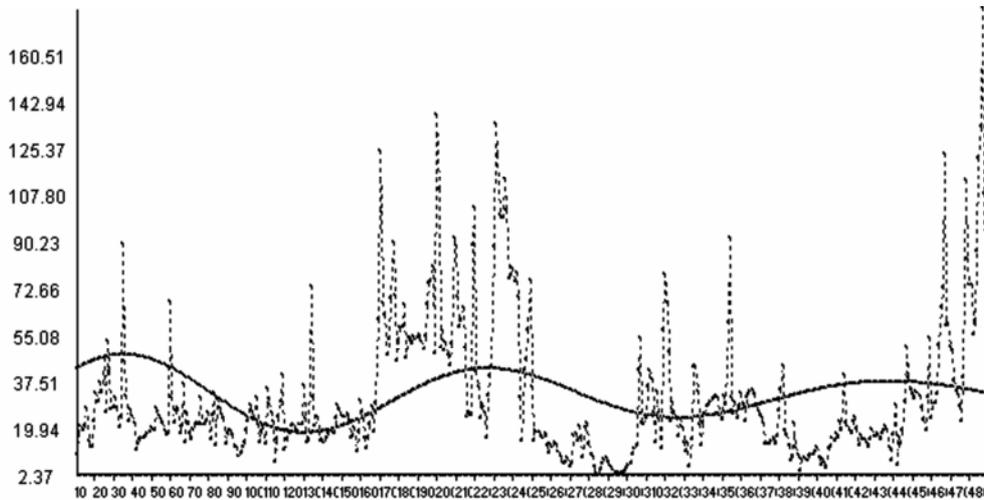
далее определить параметры основной гармоники и, после выделения остатков, параметры остальных гармоник. На рис. 5 показан график автокорреляционной функции по выборке данных опробования вдоль россыпи. Исходя из графика, можно сделать вывод, что длина основной волны равна 180 значениям ( $4 \cdot 45 = 180$ ).

Используя вышеописанный алгоритм, выполнено сглаживание выборки данных методом Фурье с определением гармоник через автокорреляционную функцию. На рис. 6. показан результат сглаживания.

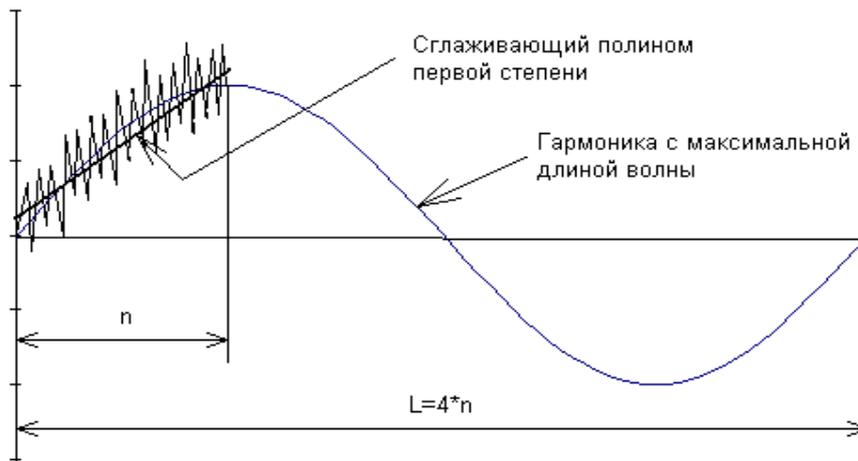
Как отмечалось выше, при сглаживании классическими рядами Фурье длины волн основных гармоник зависят от исходной длины ряда  $n$ , однако в случае природного распределения полезного компонента (например, содержание золота по линии) длина волны не должна зависеть от длины ряда. Поэтому нами предложен модифицированный алгоритм поиска несущих гармоник.

Представим, что временной ряд значений является частью волны, длина которой в несколько раз превышает длину ряда. В общем случае длина такой волны не может превышать четырехкратную величину длины ряда данных. На рис. 7. показано, что четверть длины волны, равная количеству значений ряда, будет достаточно хорошо сглаживаться полиномом первой степени.

Так, как при выявлении сглаживающих гармоник предварительно



**Рис. 6. Сглаживание Фурье с выбором длин волн гармоник через автокорреляционную функцию**



**Рис. 7. Выбор гармоники с максимальной длиной волны**

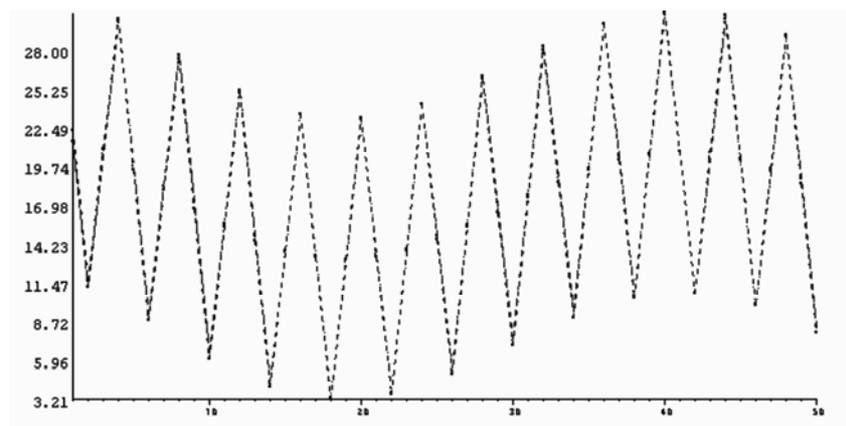
следует выделить полином первого порядка, то можно с достаточной степенью надежности утверждать, что максимальная длина волны не может превышать величину  $4*n$ . Хотя при этом максимальная длина волны может быть выбрана любая, в том числе и отличная от величины равной  $4*n$ .

Если провести классический анализ Фурье по данным ряда, используя длины волн начиная от величины  $4*n$  до 8, мы получим спектральный ряд гармоник. Наибольший вклад из этого ряда гармоник будет приносить гармоника с максимальным энергетическим спектром. Выделив из ря-

Таблица 3

**Параметры модифицированного анализа Фурье**

n=50			n=40			n=30		
Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазовый сдвиг $\varphi$	Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазовый сдвиг $\varphi$	Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазовый сдвиг $\varphi$
9,90	4,00	-0,0	9,90	4,00	0,0	9,72	4,00	-0,01
3,91	43,0	5,1	4,00	36,0	6,1	3,89	37,0	6,2

**Рис. 8. Сглаживание модели модифицированными рядами Фурье**

да данных гармонику, связанную с этим энергетическим спектром, мы получим остаток данных. Этот остаток можно снова подвергнуть анализу Фурье, используя тот же набор длин волн, что и в первом случае. Максимальный спектр в этом случае будет соответствовать уже другой гармонике.

Проведя, таким образом, несколько раз анализ Фурье, мы получим набор гармоник, который в максимальной степени будет соответствовать гармоникам исходного ряда. Количество гармоник, как и в предыдущих случаях, следует ограничивать равенством дисперсии отклонений и дисперсии случайной изменчивости исходного ряда [5]. Такой гармонический анализ нами назван модифицированным анализом Фурье. Достоинством модифицированного гармонического анализа Фурье является то, что выявленные с его помощью параметры гармоник (амплитуда и длина

волны) не зависят от количества исходных данных.

Для проверки качества сглаживания модифицированными рядами Фурье был проведен такой анализ по модельным данным, приведенными выше. При этом анализ проводился при длине исходного ряда в 50, 40 и 30 значений. Результаты сглаживания приведены на рис. 8, а в табл. 3 показаны параметры гармоник, выявленных модифицированным анализом Фурье по модельным данным.

При сравнении результатов сглаживания классическими рядами Фурье (табл. 2) и модифицированным способом (табл. 3) с параметрами исходной модели, видно, что модифицированный способ наиболее качественно выявляет все несущие гармоники модельного ряда при любом количестве значений. При этом модифицированный анализ Фурье может выявлять несущие гармоники даже в том

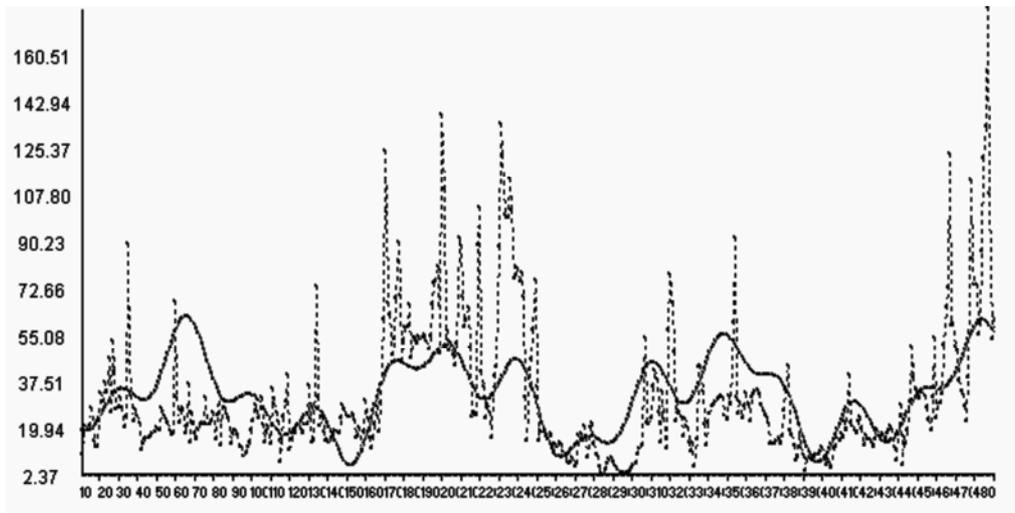


Рис. 9. Сглаживание модифицированными рядами Фурье

Таблица 4.

Параметры сглаживающих гармоник

Гармоники	Классическое Фурье			Фурье через АКФ			Модифицированное Фурье		
	Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазовый сдвиг $\varphi$	Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазовый сдвиг $\varphi$	Амплитуда $A$	Длина волны $L$	Фазовый сдвиг $\varphi$
1	14,63	240	129,08	7,97	176	3,13	15,92	140	30,68
2	12,71	160	-73,02	13,63	196	-86,83	7,77	35	-6,59
3	11,25	120	108,60				7,09	59	5,14
4	7,7	60	40,10						
5	7,6	480	312,72						

случае, если исходный ряд данных будет нести в себе случайный «шум».

Используя описанный выше алгоритм, был проведен анализ модифицированными рядами Фурье выборки данных опробования вдоль россыпи (рис. 9).

В табл. 4 приведены параметры гармоник, полученных по результатам сглаживания классическими рядами Фурье, рядами с поисками длин волн через АКФ и модифицированными рядами Фурье. При сглаживании классическими рядами Фурье количество сглаживающих гармоник было принудительно ограничено 50 значе-

ниями, и при этом не достигнут желаемый результат сглаживания (стандарт отклонений оказался больше стандарта случайной изменчивости). При сглаживании с поиском длин волн через АКФ были выявлены всего две несущие гармоники с длинами волн 176 и 196 значений (при числе исходных данных 480). При сглаживании модифицированными рядами Фурье мы имеем три несущие гармоники с длинами волн 140, 35 и 59 значений.

Таким образом, на основании проведенных выше исследований можно сказать, что при геометризации распределения содержания золотa в

россыпи по линиям можно применять гармонический анализ Фурье. При этом выбор длины волны периодических составляющих следует производить путем их последовательного поиска и дальнейшего исключения выявленных гармоник из ряда данных. Этот метод выявления периодических составляющих по-

зволяет выявить все несущие гармоники при наличии даже достаточно большой случайной составляющей, что не позволяет сделать анализ Фурье с выбором длины волны через автокорреляционную функцию и классический анализ Фурье, длины волн которого полностью зависят от длины ряда исходных данных.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бэйсик для персональных ЭВМ. - М.: Наука, 1987.
2. Дэвис Дж. Статистика и анализ геологических данных: Пер. с англ. В.А.Голубевой; Под ред. Д.А.Родионова. - М.: Мир, 1977.
3. Вагер Б.Г., Серков Н.К. Сплаины при решении прикладных задач метеорологии и гидрологии. - Л.: Гидрометеоиздат, 1987.
4. Загibalов А.В., Охотин А.Л. Применение методов гармонического анализа Фурье при решении некоторых задач геометризации месторождений. //Известия ИРГТУ. - Иркутск, 1998, № 5.
5. Загibalов А.В., Охотин А.Л. Выявление периодических составляющих в распределении содержания железа на Коршунском железорудном месторождении //Известия ВУЗов Сибири: - Иркутск 1999, № 6.
6. Снетков В.И., Охотин А.Л. Критерий сглаживания показателей месторождения рядами Фурье при геометризации по заданному направлению //Геология, поиски и разведка месторождений рудных полезных ископаемых Иркутск, 1986.
7. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры : Пер. с англ. Ред. пер. О.А.Потатова. - М.: Недра, 1987. **ГЛАВ**

#### Коротко об авторе

Загibalов А.В. – профессор кафедры маркшейдерского дела Иркутского государственного технического университета, кандидат геолого-минералогических наук. Иркутский государственный технический университет, г. Иркутск,  
E-mail: [azaqibalov@yandex.ru](mailto:azaqibalov@yandex.ru)

