УДК 519.673

А.В. Юденков, А.Э. Адигамов, О.А. Изотова, А.М. Володченков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА НА КЛАССЕ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Предлагается класс случайных функций, для которого определяются основные операции математического анализа, а также операторы сдвига, сопряжения и сингулярного интегрирования. В этом классе случайных функций можно рассматривать основные задачи теории упругости в более общей постановке.
Ключевые слова: теория упругости, функция Гельдера, анизотропное тело.

Классические задачи плоской теории упругости постановка которых дается в работах Колосова и Н.И.Мусхелишвили традиционно рассматриваются в пространстве Гельдера [2]. Напомним, что функцией Гельдера с показателем μ называется функция, удовлетворяющая на контуре L условию:

$$\left|\Phi(t_2)-\Phi(t_1)\right| \le A\left|t_2-t_1\right|^{\mu},\ \ t_1,t_2\in L, \tag{1}$$

где А – определенная константа, $0<\mu\le 1$.

Класс функций Гельдера с показателем μ на контуре L обозначим через $H_{\mu}(L)$. Если показатель μ не играет роли, то его обычно не пишут.

Класс функций Гельдера оказывается достаточным, чтобы решать основные задачи теории упругости в классической постановке.

На практике область D, занимаемая телом, контур L, который его ограничивает, и нагрузки на тело в основном являются случайными функциями от координаты $z=x+iy$.

В работе предлагается класс случайных функций, аналогичный классу функций Гельдера в классической постановке, для которого определяются основные операции математического анализа, а также операторы сдвига, сопряжения и сингулярного интегрирования. В этом классе случайных функций можно рассматривать основные задачи теории упругости в более общей постановке.

Будем основываться на фундаментальном понятии теории случайных функций – сходимости в среднем квадратическом [3].

Напомним, что последовательность случайных величин X_r сходится в среднем квадратическом к случайной величине X, если существуют моменты $M\left\|X\right\|^2$, $M\left\|X_r\right\|^2<\infty$ и $M\left\|X_r-X\right\|^2\to 0$ при $r\to r_0$.

Введем в рассмотрение класс случайных функций, удовлетворяющий классу Гёльдера в среднем квадратическом.

Определение 1. Функция $\Phi(t)$ принадлежит классу Гёльдера в среднем квадратическом на контуре L с показателем $\mu\,(\Phi(t) \in H^{*}_{\mu}(L))$, если для любых t_1 и t_2, принадлежащих контуру L выполняется условие

$$M\left\|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right\|^2 \leq A\left|t_2 - t_1\right|^{2\mu} \qquad (2)$$

Справедливы следующие свойства функций, удовлетворяющих условию Гёльдера в среднем квадратическом.

Свойство 1. Если t_1 и t_2 достаточно близки друг к другу и условие Гёльдера в среднем квадратическом выполняется для показателя μ_1, то оно выполняется и для показателя $\mu_2 < \mu_1$.

Свойство 2. Если функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера в среднем квадратическом, то их сумма, произведение и частное при условии, что знаменатель не обращается в ноль, принадлежат классу Гёльдера в среднем квадратическом.

Свойство 3. Аналитическая функция от случайной функции Гёльдера в среднем квадратическом с показателем μ, принадлежит классу Гёльдера в среднем квадратическом с тем же показателем.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема. Если L — замкнутый контур и R(t) удовлетворяет на L условию Гёльдера в среднем квадратическом с показателем μ, то предельные значения интеграла типа Коши $\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$ удовлетворяют этому условию с тем же показателем, если $0 < \mu < 1$ и с показателем сколь угодно мало отличающимся от μ, если $\mu = 1$.

Доказательство:

Проведем следующие преобразования

$$\int_L \frac{R(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_L \frac{R(\tau) - R(t)}{\tau - t}d\tau + R(t)\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Так как полагается, что контур замкнутый, то

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\pi\,.$$

Получим

$$\int_L \frac{R(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_L \frac{R(\tau) - R(t)}{\tau - t}d\tau + i\pi R(t).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать ее справедливость для функции

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{R(\tau)-R(t)}{\tau-t}d\tau$$

Для этого оценим

$$M\left|\psi(t_2)-\psi(t_1)\right|^2=M\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left\{\frac{R(\tau)-R(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{R(\tau)-R(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau\right|^2$$

для двух произвольных достаточно близких точек t_1 и t_2. Из точки t_1 опишем окружность радиуса δ так, чтобы она пересекалась с L в двух точках a и b. Часть контура L, лежащего внутри окружности обозначим l. Пусть t_2 - фиксированная точка дуги l, отличная от a и b.

Положим $\delta=K\left|t_2-t_1\right|$ Очевидно, $K<1$.

Обозначим $s=s(t,\ \tau)$ длину меньшей из двух дуг контура L с концами t и τ (t - фиксированная точка, τ - текущая).

Воспользуемся свойством гладкости контура L: для гладкого контура отношение $\dfrac{ds}{dr}$, где s – длина дуги контура, r - длина стягивающей ее хорды, есть величина ограниченная [1], т.е. $\left|\dfrac{ds}{dr}\right|\le m$,

где m - некоторая положительная константа.

Значит

$$\left|d\tau\right|=\left|ds\right|\le mdr$$

Из приведенного неравенства следует, что

$s(t_1,\ t_2)\le m\left|t_2-t_1\right|$.

Проведем следующие преобразования

$$\psi(t_2)-\psi(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{R(\tau)-R(t_2)}{\tau-t_2}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{R(\tau)-R(t_1)}{\tau-t_1}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\left\{\frac{R(\tau)-R(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{R(\tau)-R(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{R(\tau)-R(t_2)}{\tau-t_2}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{R(\tau)-R(t_1)}{\tau-t_1}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{R(t_1)-R(t_2)}{\tau-t_1}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{\left[R(\tau)-R(t_2)\right](t_2-t_1)}{(\tau-t_2)(\tau-t_1)}d\tau=$$

$$=J_1+J_2+J_3+J_4$$

Для доказательства теоремы нужно доказать, что для каждого из интегралов выполняется соотношение

$M\left|J_k\right|^2 \le A_k\left|t_2 - t_1\right|^{2\mu}$ при $0 < \mu < 1$ и

$M\left|J_k\right|^2 \le A_k\left|t_2 - t_1\right|^{2(1-\varepsilon)}$ при $\mu = 1$.

Проведем оценку интеграла J_1

$$M\left|J_1\right|^2 = M\left|\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{R(\tau)-R(t_2)}{\tau - t_2}d\tau\right|^2 \le M\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_l\left|\frac{R(\tau)-R(t_2)}{\tau - t_2}\right|\left|d\tau\right|\right)^2.$$ Поскольку $R(t) \in H_\mu^*(L)$ и $\left|d\tau\right| \le mdr$, то

$$M\left|J_1\right|^2 \le \frac{A}{4\pi^2}\left(\int_0^\delta mr^{\mu-1}dr\right)^2 = \frac{Am^2}{\pi}\left|t_2 - t_1\right|^{2\mu},$$

то есть J_1 - принадлежит классу функций, удовлетворяющих условию Гельдера в среднем квадратическом с коэффициентом μ. Аналогично оцениваем интеграл J_2.

Оценим интеграл J_3

$$M\left|J_3\right|^2 = M\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{R(t_1)-R(t_2)}{\tau - t_1}d\tau\right|^2 = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau - t_1}\right|M\left|R(t_1)-R(t_2)\right|^2 =$$

$$= A\left|t_1 - t_2\right|^{2\mu}\left|\ln\frac{a-t_1}{b-t_1}\right|^2.$$

Значит, $J_3 \in H_\mu^*(L)$.

Оценим интеграл J_4

$$M\left|J_4\right|^2 = M\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\left[R(\tau)-R(t_2)\right](t_2-t_1)}{(\tau-t_2)(\tau-t_1)}d\tau\right|^2 =$$

$$= \frac{\left|t_1-t_2\right|^2}{4\pi^2}M\left|\int_{L-l}\frac{R(\tau)-R(t_2)}{(\tau-t_2)(\tau-t_1)}d\tau\right|^2 \le A'\left|t_1-t_2\right|^2\left(\int_{L-l}\left|\tau-t_1\right|^{\mu-2}\left|\frac{\tau-t_1}{\tau-t_2}\right|^{1-\mu}\left|d\tau\right|\right)^2$$ Учитывая, что

$\left|\tau - t_1\right| \ge \delta = K\left|t_1 - t_2\right| \ge K\left\{\left|\tau - t_1\right| - \left|t_1 - t_2\right|\right\} \ge (K-1)\left|\tau - t_1\right|$, получим

$$M\left|J_4\right|^2 \le A''\left|t_1 - t_2\right|^2\left(\int_R^\delta r^{\mu-2}dr\right)^2,$$

где $R = \max\limits_{\tau \in L-l} \left| \tau - t_1 \right|$.

В классе функций Гельдера в среднем квадратическом решены следующие задачи:

Задача 1. Пусть тело, обладающее анизотропией общего вида, занимает область D, ограниченную гладким контуром L. Определить упругое равновесие тела, если действующие на тело нагрузки представимы функциями класса Гельдера в среднем квадратическом.

Задача 2. Пусть тело, обладающее анизотропией общего вида, занимает область D, ограниченную гладким контуром L. Область D взаимнооднозначно отображается на внутренность единичной окружности аналитическими функциями, удовлетворяющими условию Гельдера в среднем квадратическом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука. 1966. - 707 с.
3. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2004. – 1000 с.
4. *Редкозубов С.А.. Юденков А.В.* Системы краевых задач и сингулярных интегральных уравнений для полианалитических функций в статической теории упругости // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И.Шемякина / Под. ред. Д.Д.Ивлева и Н.Ф.Морозова. - Москва: Физматлит, 2006. С. 627-634. ГИАБ

Коротко об авторах

Юденков А.В. – заведующий кафедрой информационных технологий и высшей математики Смоленской государственной сельскохозяйственной академии, профессор, доктор физико-математических наук (sshi@sci.smolensk.ru);

Адигамов А.Э. – доцент кафедры высшей математики Московского государственного горного университета, кандидат технических наук, Moscow State Mining University, Russia, (adigamov@msmu.ru);

Изотова О.А.- старший преподаватель кафедры информационных технологий и высшей математики Смоленской государственной сельскохозяйственной академии (sshi@sci.smolensk.ru).

Володченков А.М. - доцент кафедры информационных технологий и высшей математики Смоленской государственной сельскохозяйственной академии, кандидат физико-математических наук (sshi@sci.smolensk.ru).