

УДК 510.67

К.З. Хайрнасов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Приведена методология и алгоритмы процесса деформации кольцевой пластинки в коническую оболочку при действии импульсного давления. В качестве метода исследования применяется метод конечных элементов. Приведенная методология и алгоритмы позволяют исследовать большие перемещения пластинки при действии динамических нагрузок.

Ключевые слова: деформирование кольцевой пластинки, динамическое нагружение, импульсное давление, метод конечных элементов.

K.Z. Khairnassov

THE MODELLING OF THE COLLAR PLATE BEHAVIOR DURING THE IMPULSIVE LOADING

There are designed methodologies of calculation and algorithms of process deformation cycles plane in conic shell under impulse pressure. As a method of designing there were used finite-element methods. The worked out methodology and algorithms allows researcher to process large displacement under dynamic loads. Comparing of theoretical and experimental results is successful.

Key words: deformation of the collar plate, dynamic loading, impulsive pressure, finite element technique.

В статье рассматривается процесс деформирования кольцевой пластинки в коническую оболочку при действии динамического, нормального давления, в общем случае переменного по радиусу пластинки. Такие задачи возникают при формировании оболочечных конструкций из плоских заготовок. Формование оболочечных конструкций из плоских заготовок с использованием динамического нагружения выгодно отличается от статического тем, что в процессе динамического нагружения удается избежать появления потери устойчивости и соответствующего волнообразования материала заготовки вследствие повышения уровня критических нагрузок при динамических нагрузках, иными словами, некоторые детали можно получить, применяя только динамическое нагружение.

Также к преимуществам динамического нагружения относится и возможность управления процессом деформирования. Управляющими факторами являются: величина и форма импульса, место его приложения к заготовке и т.д.

Поскольку рассматриваются значительные деформации, то в теоретической формулировке необходимо учитывать как упругое, так и неупругое поведение материала. Точность численного решения оценивается путем сравнения с экспериментальными данными для кольцевых пластин при действии импульсно-магнитного поля [1, 2]

1 Теория

Придерживаясь единого методологического подхода, кольцевая пластинка моделируется совокупностью кольцевых конечных элементов, соединенных по узло-

вым окружностям с аппроксимацией перемещений в направлении нормали, кольцевом и радиальном направлениях в виде полиномов от радиального расстояния и рядов Фурье в кольцевом направлении. Уравнения движения, описывающие нелинейную динамическую реакцию, получаются из уравнений Лагранжа. При этом в выражении энергии деформации удерживаются нелинейные члены относительно перемещений и их производных, вплоть до четвертого порядка включительно, поскольку, как показали результаты исследования [3-6] их учет очень существенен для получения точных результатов. В выражении кинетической энергии учитывается влияние инерции вращения.

Есть несколько подходов к решению нелинейных задач [4]. В данной работе применяется метод суть которого заключается в том, что нелинейные члены помещаются в правую часть уравнений движения и рассматриваются как дополнительные обобщенные члены, вычисляемые по значениям обобщенных координат, полученным на предыдущем шаге нагружения или по экстраполированному значению обобщенного перемещения, вычисленному по результатам нескольких предыдущих шагов нагружения, по формулам:

Выражение для энергии деформации ортотропной оболочки можно выписать в виде

$$U = \frac{1}{2} \iint [C_1 \varepsilon_s^2 + C_2 \varepsilon_\theta^2 + 2\nu_{s\theta} C_1 \varepsilon_s \varepsilon_\theta + G_1 \varepsilon_{s\theta}^2 + D_1 \chi_s^2 + D_2 \chi_\theta^2 + 2\nu_{s\theta} D_1 \chi_s \chi_\theta + G_2 \chi_{s\theta}^2] r ds d\theta \quad (1)$$

После постановки выражений для деформаций срединной поверхности в уравнение (1) энергию деформации можно записать в виде

$$U = U_l + U_n \quad (2)$$

где U_l - линейная часть энергии деформации, она совпадает с выражением (6) и U_n - нелинейная часть энергии деформации, обусловленная нелинейностью в соотношениях «деформации-перемещения» [7].

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= e_s + \frac{1}{2}(e_{13}^2 + e_{23}^2), & \varepsilon_\theta &= e_\theta + \frac{1}{2}(e_{13}^2 + e_{23}^2), & \varepsilon_{s\theta} &= e_{s\theta} + \frac{1}{2}e_{13}e_{23} \\ \chi_s &= -\varpi_{ss} - u_s \phi_s - \frac{R}{r^2} u \cos^2 \varphi, & \chi_\theta &= (-\varpi_{\theta\theta} + v_\theta \cos \varphi - r\varpi_s \sin \varphi - u\phi_s r \sin \varphi) / r^2 \\ \chi_{s\theta} &= (-r\varpi_{s\theta} + \varpi_\theta \sin \varphi - u_\theta \phi_s r + r v_s \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) / r^2 \\ e_s &= u_s - w\phi_s, & e_\theta &= (v_\theta + u \sin \varphi + w \cos \varphi) / r, & e_{s\theta} &= (u_\theta + r v_s + v \sin \varphi) / r \\ e_{13}^2 &= \frac{1}{2}(\varpi_s + u\phi_s)^2, & e_{23}^2 &= \frac{1}{2r^2}(\varpi_\theta - v \cos \varphi)^2, & e_{33}^2 &= \frac{1}{16r^2}(u_\theta - v \sin \varphi - r v_s)^2 \\ \phi_s &= -(\varpi_s + u\phi_s); & \phi_\theta &= -(\varpi_\theta - v \cos \varphi) / r \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (3) обозначено $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}$ деформации срединной поверхности по соответствующим координатам; $\chi_s, \chi_\theta, \chi_{s\theta}$ - деформации кривизны; e_{13}, e_{23} - углы поворота вокруг координатных линий; r - радиус оболочки; ϕ_s, ϕ_θ - углы наклона меридиана к оси оболочки, и угол в окружном направлении; e_{33} - «кручение» срединной поверхности.

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \iint [(e_s + e_{13}^2) A_{11} (e_s + e_{13}^2) + 2(e_s + e_{13}^2) A_{12} (e_\theta + e_{23}^2) + 2(e_s + e_{13}^2) A_{13} (e_{s\theta} + e_{13} e_{23}) \\
& + 2(e_s + e_{13}^2) B_{14} \kappa_s + 2(e_s + e_{13}^2) B_{15} \kappa_\theta + 2(e_s + e_{13}^2) B_{16} \kappa_{s\theta} + (e_\theta + e_{23}^2) A_{22} (e_\theta + e_{23}^2) + \\
& + 2(e_\theta + e_{23}^2) A_{23} (e_{s\theta} + e_{13} e_{23}) + 2(e_\theta + e_{23}^2) B_{24} \kappa_s + 2(e_\theta + e_{23}^2) B_{25} \kappa_\theta + 2(e_\theta + e_{23}^2) B_{26} \kappa_{s\theta} + \\
& + (e_{s\theta} + e_{13} e_{23}) A_{33} (e_{s\theta} + e_{13} e_{23}) + 2(e_{s\theta} + e_{13} e_{23}) B_{34} \kappa_s + 2(e_{s\theta} + e_{13} e_{23}) B_{35} \kappa_\theta + \\
& + (e_{s\theta} + e_{13} e_{23}) B_{36} \kappa_{s\theta} + \kappa_s D_{44} \kappa_s + 2\kappa_s D_{45} \kappa_\theta + 2\kappa_s D_{46} \kappa_{s\theta} + \kappa_\theta D_{55} \kappa_\theta + 2\kappa_\theta D_{56} \kappa_{s\theta} + \\
& + \kappa_{s\theta} D_{66} \kappa_{s\theta}] dS \tag{4}
\end{aligned}$$

Перепишем выражение (4) выделив линейные и нелинейные слагаемые

$$U = U_l^2 + U_H^3 + U_H^4 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
U_l^2 = & \frac{1}{2} \iint (e_s A_{11} e_s + 2e_s A_{12} e_\theta + 2e_s A_{13} e_{s\theta} + 2e_s B_{14} \kappa_s + 2e_s B_{15} \kappa_\theta + 2e_s B_{16} \kappa_{s\theta} + \\
& + e_\theta A_{22} e_\theta + 2e_\theta A_{23} e_{s\theta} + 2e_\theta B_{24} \kappa_s + 2e_\theta B_{25} \kappa_\theta + 2e_\theta B_{26} \kappa_{s\theta} + e_{s\theta} A_{33} e_{s\theta} + \\
& + 2e_{s\theta} B_{34} \kappa_s + 2e_{s\theta} B_{35} \kappa_\theta + e_{s\theta} B_{36} \kappa_{s\theta} + \kappa_s D_{44} \kappa_s + 2\kappa_s D_{45} \kappa_\theta + 2\kappa_s D_{46} \kappa_{s\theta} + \\
& + \kappa_\theta D_{55} \kappa_\theta + 2\kappa_\theta D_{56} \kappa_{s\theta} + \kappa_{s\theta} D_{66} \kappa_{s\theta}) dS \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_H^3 = & \frac{1}{2} \iint (2e_s A_{11} e_{13}^2 + 2e_s A_{12} e_{13}^2) + 2e_\theta A_{12} e_{13}^2 + 2e_s A_{13} e_{13} e_{23} + 2e_{s\theta} A_{13} e_{13}^2 + \\
& + 2e_{13}^2 B_{14} \kappa_s + 2e_{13}^2 B_{15} \kappa_\theta + 2e_{13}^2 B_{16} \kappa_{s\theta} + 2e_\theta A_{22} e_{23}^2 + 2e_\theta A_{23} e_{13} e_{23} + \\
& + 2e_{s\theta} A_{23} e_{23}^2 + 2e_{23}^2 B_{24} \kappa_s + 2e_{23}^2 B_{25} \kappa_\theta + 2e_{23}^2 B_{26} \kappa_{s\theta} + 2e_{s\theta} A_{33} e_{13} e_{23} + \\
& + 2e_{13} e_{23} B_{34} \kappa_s + 2e_{13} e_{23} B_{35} \kappa_\theta + e_{13} e_{23} B_{36} \kappa_{s\theta}) dS \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_H^4 = & \frac{1}{2} \iint (e_{13}^2 A_{11} e_{13}^2 + 2e_{13}^2 A_{12} e_{23}^2 + 2e_{13}^2 A_{13} e_{13} e_{23} + \\
& + e_{23}^2 A_{22} e_{23}^2 + 2e_{23}^2 A_{23} e_{13} e_{23} + e_{13} e_{23} A_{33} e_{13} e_{23}) dS \tag{8}
\end{aligned}$$

В формулах (5-8) верхний индекс U обозначает квадратичную составляющую обобщенных перемещений в выражении энергии деформации, при подстановке в уравнение равновесия (6) эта составляющая энергии деформации образует линейную часть уравнения.

Энергия деформации представленная в уравнениях (7) и (8) образуют нелинейные слагаемые, соответственно, кубическое и четвертой степени в выражении энергии деформации. При подстановке у уравнение равновесия (9) определяют квадратичное и кубическое нелинейные члены относительно обобщенных перемещений. Как показали предварительные исследования, учет кубических нелинейных составляющих в выражении энергии деформации является необходимым при решении задач динамического нагружения, для получения достоверного решения.

Уравнения равновесия, описывающие нелинейную динамическую реакцию, получаются из уравнений Лагранжа (9) и эти уравнения применимы как к линейным, так и нелинейным системам. При условии, что члены, характеризующие энергию деформации и работу, выражены через обобщенные координаты, и их производные во времени и вариации.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q \quad (9)$$

Подставляя (5) в (9) и перенося в правую сторону величины соответствующие нелинейным слагаемым, получаем уравнения равновесия в виде

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} &= \{Q\} - \{Q^{nl}\} - [K_G] \{q\} - \{Q^p\} \\ [M] &= \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \iint \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\beta}_s I_s + \dot{\beta}_\theta I_\theta \right) dA \right\} - \text{матрица масс} \\ [K] &= \frac{\partial U_n^2}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \iint \varepsilon^n \sigma^n dA \right\} - \text{матрица жесткости} \\ \{Q\} &= \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \iint (P_u u + P_v v + P_w w) dA \right\} - \text{вектор внешних сил} \\ \{Q\} &= \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \iint (P_u u + P_v v + P_w w) dA \right\} - \text{вектор внешних сил} \\ \{Q^{nl}\} &= \frac{\partial U_n^3}{\partial q} + \frac{\partial U_n^4}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \iint (\varepsilon^n D \varepsilon^n + \varepsilon^n D \varepsilon^n + \varepsilon^n D \varepsilon^n) dA \right\} - \text{геометрически} \end{aligned} \quad (10)$$

нелинейный член

$$[K_G] = \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \iint (\sigma_{нач}^n + \sigma_{нач}^n) \varepsilon^n dA \right\} - \text{матрица начальных напряжений}$$

$$[Q^p] = \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \iint (\sigma_1^n + \sigma_1^n) \varepsilon^n dA \right\}$$

"л" – линейная компонента; "н" – нелинейная компонента,

"нач." – начальное напряжение (преднапряжение).

Рассмотрим решение динамических уравнений (10) для осесимметричных конечных элементов. Перемещения для решения задачи осесимметричных конечных элементов представляются в виде (11) ряда Фурье:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0} \left[\left(1 - \frac{s}{l} \right) q_1 + \frac{s}{l} q_5 \right] \cos i\theta, \quad v = \sum_{i=0} \left[\left(1 - \frac{s}{l} \right) q_4 + \frac{s}{l} q_8 \right] \sin i\theta \\ w &= \sum_{i=0} \left[\left(1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3} \right) q_2 + \left(s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \right) q_3 + \left(\frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3} \right) q_6 + \left(-\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \right) q_7 \right] \cos i\theta \end{aligned} \quad (11)$$

При нахождении U_n^3 и U_n^4 перемещение w принимаем в виде

$$w = \sum_{i=0} \left[\left(1 - \frac{s}{l} \right) q_2 + \frac{s}{l} q_6 \right] \cos i\theta \quad (12)$$

При таком представлении перемещений уравнение движения справедливо для любой гармоники, при наличии связи между гармониками, фигурирующими в последнем члене.

При решении нелинейных уравнений нет необходимости в разделении на задачу определения исходного состояния, характеризуемого членами ... и задачу устойчивости, как это делается при использовании статического критерия устойчивости. Критические нагрузки определяются по предельным точкам или по точкам разветвления нелинейного решения (точкам бифуркации решения).

Такое различие перемещений допустимо использовать, так как они удовлетворяют условию непрерывности n - I производной на границе между элементами, при условии, что внутренняя энергия является функцией i -й производной перемещений [5].

Нелинейные члены для элемента определяются путем взятия частных производных от выражения (7), (8) энергии деформации, соответствующего нелинейностям по обобщенным координатам.

Это дает для $U_n^3 + U_n^4$.

$$\frac{\partial U_n^3}{\partial \{q\}} = \frac{1}{2} \iint \left\{ \begin{aligned} & \left(C_1 e_{13}^2 + \nu_{s\theta} C_2 e_{23}^2 \right) \frac{\partial e_s}{\partial q_m^n} + \left(C_2 e_{23}^2 + \nu_{s\theta} C_1 e_{13}^2 \right) \frac{\partial e_\theta}{\partial q_m^n} \\ & + 2 \left(G_1 e_{13} e_{23} \right) \frac{\partial e_{s\theta}}{\partial q_m^n} + \left(2 C_1 e_s e_{13} + 2 \nu_{s\theta} C_1 e_s e_{13} + \right) \frac{\partial e_{13}}{\partial q_m^n} \\ & + \left(2 C_2 e_\theta e_{23} + 2 \nu_{s\theta} C_1 e_s e_{23} + 2 G_1 e_{s\theta} e_{13} \right) \frac{\partial e_{23}}{\partial q_m^n} \end{aligned} \right\} r ds d\theta \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \iint \left\{ \begin{aligned} & \left[C_1 e_{13}^3 + (\nu_{s\theta} C_1 + 2 G_1) e_{13} e_{23}^2 \right] \frac{\partial e_{13}}{\partial q_m^n} \\ & + \left[C_2 e_{23}^3 + (\nu_{s\theta} C_1 + 2 G_1) e_{13} e_{23}^2 \right] \frac{\partial e_{23}}{\partial q_m^n} \end{aligned} \right\} r ds d\theta$$

где n – номер гармоники, а $m=1, 2, \dots, 8$.

Принятые функции перемещений позволяют разделить переменные в уравнениях (11) и удовлетворить требованию периодичности по кольцевой координате θ .

В результате подстановки уравнений (11) в уравнения (3) получаем

$$e_s = \sum_{i=0}^n e_s^i \cos i\theta; \quad e_\theta = \sum_{i=0}^n e_\theta^i \cos i\theta; \quad e_{s\theta} = \sum_{i=0}^n e_{s\theta}^i \sin i\theta; \quad (14)$$

$$e_{13} = \sum_{i=0}^n e_{13}^i \cos i\theta; \quad e_{23} = \sum_{i=0}^n e_{23}^i \cos i\theta;$$

Здесь e_s , e_θ , $e_{s\theta}$, e_{13} , e_{23} – линейные деформации и повороты для гармоник i являются функциями только от меридионального расстояния s .

Например,

$$e_{23} = \left(-\frac{i}{r} \right) (\alpha_1^i + \alpha_2^i s + \alpha_3^i s^2 + \alpha_4^i s^3) - \left(\cos \frac{\varphi}{r} \right) (\alpha_7^i + \alpha_8^i s) \quad (15)$$

После постановки (...) в (...) при вычислении частных производных интегрирования по длине производиться независимо.

Поскольку произведения тригонометрических функций с волновыми числами i , j , k могут быть представлены суммой (разностью) тригонометрических функций с волновыми числами

$$k-j-i, k-j+i, k+j+i \quad (16)$$

$$\cos k\theta \cos j\theta \cos i\theta = \frac{1}{4} [\cos(k-j-i)\theta + \cos(k-j+i)\theta + \cos(k+j-i)\theta + \cos(k+j+i)\theta]$$

$$\sin k\theta \sin j\theta \sin i\theta = \frac{1}{4} [\cos(k-j-i)\theta + \cos(k-j+i)\theta - \cos(k+j-i)\theta + \cos(k+j+i)\theta] \quad (17)$$

$$\cos k\theta \sin j\theta \sin i\theta = \frac{1}{4} [-\cos(k-j-i)\theta + \cos(k-j+i)\theta + \cos(k+j-i)\theta - \cos(k+j+i)\theta]$$

$$\sin k\theta \cos j\theta \sin i\theta = \frac{1}{4} [\cos(k-j-i)\theta - \cos(k-j+i)\theta + \cos(k+j-i)\theta - \cos(k+j+i)\theta]$$

приведенные соотношения отличны от нуля при равенстве нулю соотношений (16). В противном случае они тождественно равны нулю.

При вычислении членов четвертого порядка малости выражения (8) образуют структуры.

$$\cos k\theta \cos j\theta \cos i\theta \cos n\theta = \frac{1}{8} [H1 + H2 + H3 + H4 + H5 + H6 + H7 + H8]$$

$$\sin k\theta \sin j\theta \sin i\theta \sin n\theta = \frac{1}{8} [-H1 - H2 + H3 + H4 + H5 + H6 - H7 - H8] \quad (18)$$

$$\cos k\theta \sin j\theta \sin i\theta \cos n\theta = \frac{1}{8} [-H1 + H2 + H3 - H4 + H5 - H6 - H7 + H8]$$

$$\cos k\theta \cos j\theta \sin i\theta \sin n\theta = \frac{1}{8} [-H1 + H2 + H3 - H4 - H5 + H6 + H7 - H8]$$

$$\begin{aligned} H1 &= \cos(k-j-i-n)\theta, & H2 &= \cos(k-j-i+n)\theta, & H3 &= \cos(k-j+i-n)\theta, \\ H4 &= \cos(k-j+i+n)\theta, & H5 &= \cos(k+j-i+n)\theta, & H6 &= \cos(k+j-i-n)\theta, \\ H7 &= \cos(k+j+i-n)\theta, & H8 &= \cos(k+j+i+n)\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения (19) отличны от нуля при выполнении тех же условий, что и для выражения (17). То есть если $k \pm j \pm i \pm n = 0$, и равны нулю в противном случае.

Таким образом, интегралы по углу θ можно вычислить точно, тогда как интегрирование по длине элемента включает множество операций и требует большого объема памяти на компьютере. Поэтому в вычислительной программе было сделано допущение о том, что интегралы по длине меридиана элемента вычисляются путем разбиения этого меридиана на отдельные участки.

Подставляя (11) в (14) и подсчитывая значения деформации в центре элемента, получаем линейные деформации $e_s^i, e_\theta^i, e_{s\theta}^i, e_{13}^i, e_{23}^i$ в виде

$$\begin{aligned} e_s^i &= \frac{q_5^i - q_1^i}{l} - \frac{q_6^i + q_2^i}{2} \phi_m^i; \\ e_\theta^i &= \frac{1}{r_m} \left(i \frac{q_4^i + q_8^i}{2} - \frac{q_1^i + q_5^i}{2} \sin \varphi_m + \frac{q_2^i + q_6^i}{2} \cos \varphi_m \right); \\ e_{s\theta}^i &= -i \frac{q_5^i + q_1^i}{2r_m} - \frac{q_4^i + q_8^i}{2r_m} \sin \varphi_m + \frac{q_8^i - q_4^i}{l}; \\ e_{13}^i &= \frac{q_6^i - q_2^i}{l} - \frac{q_1^i + q_5^i}{2} \phi_m^i; \\ e_{23}^i &= \frac{1}{r_m} \left(-i \frac{q_6^i + q_2^i}{2} + \frac{q_2^i + q_6^i}{2} \cos \varphi_m \right); \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (15) в (13), и используя прием интегрирования участка по координате, изменяющейся в меридиональном направлении, получаем,

$$\frac{\partial U_n^3}{\partial q_m^i} + \frac{\partial U_n^4}{\partial q_m^i} = \frac{r_m l}{2} \sum_{i=0} \sum_{j=0} \left\{ \begin{aligned} & \left(C_1^{ijk} e_{13}^i e_{13}^j + v_{s\theta} C_1^{ijn} e_{23}^i e_{23}^j \right) \frac{\partial e_s^i}{\partial q_m^n} + \\ & \left(C_1^{ijk} e_{23}^i e_{23}^j + v_{s\theta} C_1^{ijn} e_{13}^i e_{13}^j \right) \frac{\partial e_\theta^i}{\partial q_m^n} + 2G_1^{ijn} e_{13}^i e_{23}^j \frac{\partial e_{s\theta}^n}{\partial q_m^n} \end{aligned} \right\} + \quad (21)$$

$$\frac{r_m l}{2} \sum_{i=0} \sum_{j=0} \sum_{k=0} \left\{ \begin{aligned} & \left[C_2^{ijkn} e_{13}^i e_{13}^j e_{13}^k + \left(v_{s\theta} C_1^{ijkn} + 2G_1^{ijkn} \right) e_{23}^i e_{23}^j e_{23}^k \right] \frac{\partial e_{13}^n}{\partial q_m^n} + \\ & \left[C_2^{ijkn} e_{13}^i e_{13}^j e_{13}^k + \left(v_{s\theta} C_1^{ijkn} + 2G_1^{ijkn} \right) e_{23}^i e_{23}^j e_{23}^k \right] \frac{\partial e_{23}^n}{\partial q_m^n} \end{aligned} \right\}$$

где r_m – значение радиуса в середине элемента, $e_s^i, e_\theta^i, e_{s\theta}^i, e_{13}^i, e_{23}^i$ значения линейных деформаций вычисленные в средней точке элемента (см. (20))

Индексы констант C_1, C_2, G_1 указывают на то, что эта константа умножена на интеграл от некоторой тригонометрической функции. Так, например

$$C_1^{ijkn} = C_1 \int_0^{2\pi} \cos i\theta \cos j\theta \cos k\theta \cos n\theta d\theta \quad (22)$$

$$C_1^{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{n}} = C_1 \int_0^{2\pi} \cos i\theta \sin j\theta \sin k\theta \sin n\theta d\theta \quad (23)$$

черта над i, j, k или n означает, что функция косинуса должна быть заменена на функцию синуса, т.е.

$$U = \frac{1}{2} \iint \{ \sigma_3 \} \{ \varepsilon_3 \} r dr d\theta \quad (24)$$

$$\{ \sigma_3 \} = (\tau_{13}, \tau_{23}), \quad \{ \varepsilon_3 \} = (\chi_{13}, \chi_{23})$$

1.1 Матрица геометрической жесткости

Для решения задач устойчивости и динамики преднапряженных конструкций в линеаризованной постановке требуется определять матрицу геометрической жесткости.

Матрица геометрической жесткости представляет собой линеаризованную часть нелинейной компоненты U_3 энергии деформации, полученную путем введения допущения о том, что известна зависимость внутренних силовых факторов от действия внешних нагрузок. Линеаризованную часть энергии деформации можно записать в виде

$$U_g = N_s^0 \iint e_1^{(2)} r ds d\theta + N_{\theta\theta}^0 \iint e_2^{(2)} r ds d\theta + \quad (25)$$

$$+ 12 \frac{(M_{ss}^0 + v_{s\theta} M_{\theta s}^0)}{1 - v_{s\theta} v_{\theta s}} \iint \left\{ (e_1 + v e_2) \beta_s + e_{12} (1 - v_{s\theta}) \beta_\theta \right\} \frac{r ds d\theta}{t^2 \cos \phi}$$

Через N_{ss} , $N_{\theta\theta}$, M_{ss} , $M_{\theta\theta}$ - обозначены начальные усилия и моменты, ϕ - угол в меридиональном направлении.

Дифференцируя это выражение по обобщенным перемещениям, получим матрицу геометрической жесткости $[K_G]$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 2 [K_G] \{q\} \quad (26)$$

1.2 Вектор внешних сил

Вектор внешних сил характеризует работу внешних поверхностных нагрузок на возможных перемещениях и находится на основе вариационного принципа из выражения

$$W = \int \{P\} \{u\} dA \quad (27)$$

где $\{P\}$, $\{u\}$ - вектор внешних сил и вектор перемещений.

Вектор внешних сил определяется путем дифференцирования выражения (27) по обобщенным перемещениям.

$$T_i = - \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (28)$$

1.3 Матрица масс

При решении динамических задач необходимо учитывать силу инерции конструкции. Эту функцию в методе конечных элементов выполняет матрица масс. Если

материал имеет плотность ρ и поле скоростей задается вектором \dot{u} , \dot{v} , \dot{w} . Тогда кинетическая энергия конструкции представляется в виде

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + I_s \dot{\beta}_s^2 + I_\theta \dot{\beta}_\theta^2 \right) dV \quad (29)$$

где I_s , I_θ - моменты инерции сечения; β_s , β_θ - углы поворота нормали.

Подставляя перемещения u , v , w из уравнения (11) в соотношение (29), получаем

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left(\left(\dot{u} + z \dot{\varphi}_\theta \right)^2 + \left(\dot{v} + z \dot{\varphi}_\theta \right)^2 + \dot{w}^2 + I_s \dot{\beta}_s^2 + I_\theta \dot{\beta}_\theta^2 \right) R ds d\theta \quad (30)$$

Кинетическая энергия многослойной оболочечной конструкции состоящей из слоев с различными физико-механическими характеристиками получается путем дифференцирования кинетической энергии слоев.

Матрица масс определяется дифференцированием кинетической энергии по обобщенным скоростям

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = [M] \left\{ \dot{q} \right\} \quad (31)$$

точка над буквой здесь и далее означает дифференцирование по времени.

$$\text{где } [M] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left\{ \iiint \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \dot{\beta}_s^2 I_s + \dot{\beta}_\theta^2 I_\theta \right) dA \right\} - \text{ матрица масс}$$

Рассмотрим геометрические и физические зависимости для многослойных оболочек в методе приведенных жесткостей.

Матрицы упругих коэффициентов для ортотропного материала, оси ортотропии которого совпадают с осями координат, при плосконапряженном состоянии имеют вид

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (32)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix},$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}\}; \quad \{\sigma\}^T = \{\sigma_s, \sigma_\theta, \sigma_{s\theta}\},$$

где $Q_{11} = \frac{E_s}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}; \quad Q_{12} = \frac{E_s\nu_{\theta s}}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}} = \frac{E_s\nu_{s\theta}}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}; \quad Q_{22} = \frac{E_\theta}{1-\nu_{s\theta}\nu_{\theta s}}; \quad Q_{66} = G_{12}$

Уравнение (32) после подстановки соотношений

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (33)$$

представляется в виде

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} - \\ Q \end{bmatrix} \{\varepsilon^0\} + z \begin{bmatrix} - \\ Q \end{bmatrix} \{k\} \quad (34)$$

где $\{\varepsilon^0\}$ - деформации срединной поверхности, $\{k^0\}$ - изменения кривизны.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \{N\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} dz, \quad \{N\}^T = (N_x, N_y, N_{xy}) \\ \{M\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} z dz, \quad \{M\}^T = (M_x, M_y, M_{xy}) \end{aligned} \quad (35)$$

Проинтегрируем выражение (35) по толщине оболочки, тогда усилия и моменты представляются как

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\left\{ A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (37)$$

Если коэффициенты матрицы (32) постоянны в каждом из слоев пакета, то, проинтегрировав выражение (37), получим

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (h_k - h_{k-1}) \quad i, j = 1, 2, 6 \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad i, j = 1, 2, 6 \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 6 \end{aligned} \quad (38)$$

A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} - выражают соответственно мембранные, изгибно-мембранные и изгибные жесткости

Матрица упругопластических деформаций находится из соотношения

$$\{\sigma\} = E_{ym} \{\varepsilon\}, \text{ где}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\} - \text{вектор столбец напряжений}$$

$$\{\tau\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}\} - \text{вектор столбец деформаций}$$

$$[E_{ym}] = \left[[E] - \frac{[E]\{A\}[A][E]^T}{H + [A]^T [E]\{A\}} \right] - \text{упругопластичный модуль}$$

$$\{A\} = 6 \times \{\sigma_x - \sigma_o, \sigma_y - \sigma_o, \sigma_z - \sigma_o, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{xz}\}$$

$$\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$H = \frac{E \times E_T}{E - E_T},$$

где E , E_T модули упругости и пластичности, соответственно.

Система дифференциальных уравнений решается методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага нагружения по заданной точности. За начальный прогиб принимается вектор перемещений, полученный из решения задачи собственных частот колебаний пластинки идентичной исследуемой и уменьшенной стреле прогиба в 10^8 раз. И так как начальный прогиб не влияет на конечный результат [8] в качестве начального прогиба принимается первая форма колебаний плоской кольцевой пластинки. Решение задачи больших перемещений и деформаций распадается на несколько этапов. При достижении прогибов порядка толщины пластинки от исходного состояния, матрицы масс, жесткости и вектор обобщенных внешних сил пересчитываются с учетом достигнутого уровня напряженно-деформированного состояния и изменившейся геометрии пластины.

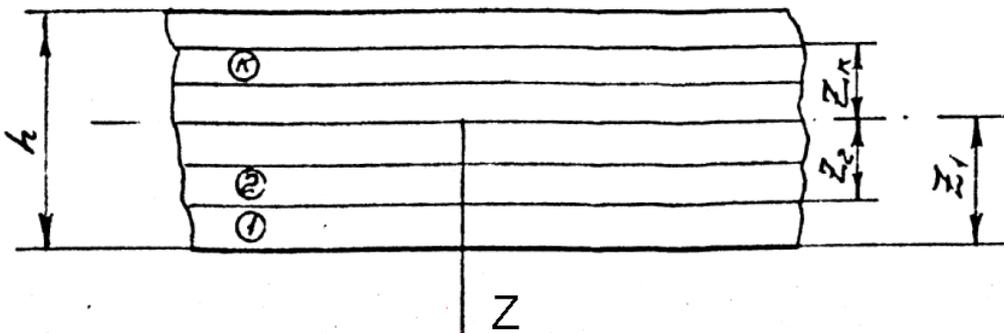


Рис. 1. Структура многослойного пакета

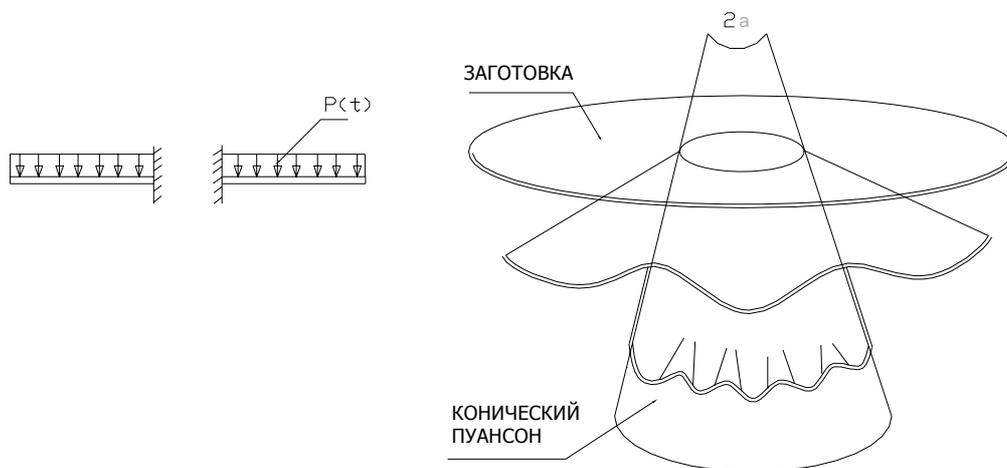


Рис. 2. Деформация кольцевой пластинки под действием импульсной нагрузки

Процесс вычисления продолжается до потери устойчивости пластины. За критерий потери устойчивости принимается нагрузка, при которой происходит резкое возбуждение гармоники отличной от нулевой. Полученные решения были использованы при расчете динамических процессов отбортовки, вытяжки без прижима и вытяжке в матрице с коническим заходом. Наблюдалось согласование теоретических и экспериментальных [1, 2] результатов. Степень деформации до потери устойчивости в операциях глубокой вытяжки, по сравнению со статической, увеличилась на 15-20%, а в операциях отбортовки до 50%. В экспериментах, для исследования механизма динамического деформирования применялась высокоскоростная съемка со скоростью 120000 кадров в секунду. Основным результатом исследования явилась возможность управления процессом потери устойчивости тонкостенных пластинок и оболочек при больших пластических деформациях в условиях динамического нагружения.

Сравнительные эксперименты по статическому деформированию заготовок давлением резины показали, что импульсное нагружение позволяет увеличить предельную степень деформации до разрушения на (50-90)%.

Расхождение всех экспериментальных данных с данными численного решения задач, как правило, не превышало (10-20)%.

Выводы

1. Исследование механизма динамического деформирования пластин и оболочек позволяет управлять им с целью увеличения предельной степени деформации до разрушения или потери устойчивости.

2. Аналитический механизм деформирования целесообразно исследовать численными методами, например, методом конечных элементов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Хайрнасов К.З., Юдаев В.Б., Фаворин В.Н.* Динамика и устойчивость пластин при больших деформациях. Труды II Всесоюзного симпозиума «Устойчивость в механике деформируемого твердого тела». – Калинин, 1986. – 10 с.
- 2 *Хайрнасов К.З., Юдаев В.Б., Фаворин В.Н.* Поведение импульсно нагруженных пластин при больших деформациях. Труды Международной конференции по механике разрушения Китая, Пекин, 1987, 9 с.
- 3 *Стриклин Д., Наваратна Д., Пиан Т.* Усовершенствование расчета оболочек матричным методом перемещений. – Ракетная техника и космонавтика, 1986, т. 4, №6, с. 253 – 254.
- 4 *Стриклин Д., Хейслер В., Риземанн В.* Оценка методов решения задач строительной механики, нелинейность которых связана со свойствами материала и или геометрией. – Ракетная техника и космонавтика. 1978, т. 11, №3, с. 45 - 56
- 5 *Стриклин Д.И др.* Нелинейное динамическое исследование оболочек вращения матричным методом перемещений. /Д. Стриклин, Д. Мартинес, Д.Теллерсон, Д.Хонг, В.Хейслер. – Ракетная техника и космонавтика, 1971, №4, с. 108 - 118
- 6 *Стриклин Д.И др.* Расчет оболочек вращения матричным методом перемещений в нелинейной постановке. /Д. Стриклин, Д. Хейслер, Н. Макдуголл, Ф.Стеббинс. – Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, №12, с.108 – 117
- 7 *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Татаркнигоиздат, 1957. – 431с.
- 8 *Образцов И.Ф., Вольмир А.С., Хайрнасов К.З.* Тороидальные оболочки: запаздывающие катастрофы при динамическом нагружении. //Докл. АН СССР. 1982. т.266. №6. - С. 1343-1346. **ГИАБ**

Коротко об авторе

Хайрнасов К.З. – кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Московский государственный горный университет. ud@msmu.ru



ДИССЕРТАЦИИ**ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ
ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ**

Автор	Название работы	Специальность	Ученая степень
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ			
ЖДАНКИН Сергей Сергеевич	Обоснование метода квалиметрической оценки потерь нефти при недропользовании на основе многоуровневой системы их формирования	25.00.16	к.т.н.