

УДК 519.863

В.А. Антонов

ГЕОИНФОРМАЦИОННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ДОСТОВЕРНЫХ ПОЛИНОМНЫХ СТЕПЕННЫХ ТРЕНДОВ НОВОГО ТИПА СПС

Для геоинформационного обеспечения горных предприятий важно создание достоверных детерминированных моделей имеющих геологических и техногенных геосистем, способных дать образное интегрированное представление о размещении в пространстве и времени их характерных свойств и параметров. Основой для моделирования являются накопленные на предприятиях массивы геоданных, включающие в себя технико-экономические показатели, результаты маркшейдерских и геофизических измерений, геологического, технологического опробования горного массива, а также перерабатываемых рудных потоков. Используемая при моделировании закономерная связь между ними устанавливается экспериментально по известной методологии множественной регрессии и часто выражается трендами в виде степенных полиномов. Уравнения регрессии геоданных (случайной зависимой величины) сводятся к линейной стохастической зависимости следующего вида

$$Y_i = A_1 X_{1i}^{\mu_1} + A_2 X_{2i}^{\mu_2} + \dots + A_j X_{ji}^{\mu_j} + \dots + A_m X_{mi}^{\mu_m} + B + \varepsilon_i,$$

где Y_i – заданное случайное значение зависимой величины; $i = 1, 2, 3, \dots, n$; n – количество случайных значений зависимой величины ($n > m$); X_{ji} – заданное детерминированное i -

значение независимой j -величины (основного j -аргумента); μ_j – показатель степени (дополнительный аргумент); ε_i – случайное отклонение зависимой величины от линии регрессии, то есть от ее тренда; A_1, A_2, \dots, A_m, B – коэффициенты тренда.

Поскольку показатели степени задают априори выбранными целыми числами, то влияние каждого аргумента в полиноме отображается набором функций линейной, квадратной, кубической и т. д. Однако, природные закономерности редко совпадают с такими трендами. Их характерные особенности, связанные с распределением показателей степени, в большинстве случаев заранее неизвестны. Поэтому, применение указанных трендов для построения детерминированных моделей, несмотря на возможно высокий коэффициент их детерминации, становится затруднительным или невозможным из-за их низкой достоверности в широких интервалах интерполяции и, особенно, при прогнозировании в области экстраполяции.

Для решения этой проблемы, очевидно, необходимо исходить из того, что показатели степени должны не назначаться заранее, т. е. искусственно подбираться, а определяться в пространстве рациональных чисел объективно по результатам расчетов с учетом характерных признаков распределения геоданных, т. е. зависи-

мых величин. В данной статье предлагается соответствующая методология построения трендов нового типа - полиномиальных степенных с самоопределяющимися показателями степени (трендов ПС СПС), включающая руководящий принцип их математической формализации, систематизацию таких трендов, методику определения коэффициентов и показателей степени, входящих в их математические выражения. Основные положения методологии состоят в следующем.

1. Руководящий принцип математической формализации тренда состоит в том, что наличие каждого интервала, в пределах которого при частном изменении какого либо j -аргумента величина тренда Y_T изменяется непрерывно и монотонно, т. е. возрастает или убывает, обусловлено объективно существующим закономерным влиянием и отображается в математической формуле трендового полинома соответствующим степенным членом вида AX^a . Количество степенных членов, зависящих от выделенного j -аргумента, равно сумме, состоящей из количества экстремумов v_j в распределении зависимой величины вдоль данного аргумента и единицы ($v_j + 1$).

2. Математическая формула трендового полинома представляется суммой постоянной составляющей и степенных членов, образованных с учетом всех интервалов монотонности тренда вдоль имеющихся m аргументов. Количество n степенных членов определяется равенством $n = m + \sum_{j=1}^m v_j$. При этом формула тренда имеет вид

$$Y_T = B + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{v_i+1} A_{ij} X_i^{\mu_j}, \quad (1)$$

где i - порядковый номер основного аргумента; j - номер интервала монотонности тренда вдоль основного i -аргумента.

3. Коэффициенты и показатели степени, входящие в математическое выражение тренда, определяются по критерию максимума коэффициента его детерминации R^2 совместным применением метода наименьших квадратов (МНК) и специально разработанного в ИГД УрО РАН нового метода оптимизации - метода приближений параболической вершины (МППВ).

При заданных фиксированных значениях μ_j коэффициенты тренда оцениваются МНК. При этом сумма

$$Q = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

приводится к единственному минимуму [1]. Допуская задание разных значений дополнительных аргументов μ_j , приходим к тому, что в пространстве μ^m сумма квадратов $Q(\mu^m)$ обладает свойствами гладкости и непрерывности, имеет так же единственный минимум. Соответственно коэффициент детерминации тренда, который рассчитывается по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_r)^2},$$

зависит от набора дополнительных аргументов μ^m и в области их изменения имеет единственный максимум.

Суть МППВ состоит в многократно повторяющейся и уточняющейся в приближениях аппроксимации экстремальной области m -мерной функции $R^2(\mu^m)$ также m -мерной параболической функцией, которая имеет единственный максимум, условно названный вершиной. В каждом k -приближении параболическая функция $P_k(\mu^m)$ представляется в виде

$$P_k = C_k + \sum_{j=1}^m C_{j1k} \mu_j + C_{j2k} \mu_j^2,$$

где C_k , C_{j1k} , C_{j2k} - коэффициенты. В наиболее простых случаях эта функ-

ция отображается геометрически. Например, в случае $m=1$ это обычная парабола, а в случае $m=2$ – эллиптический параболоид. Аппроксимацию проводят по таким опорным точкам, принадлежащим функции $R^2(\mu^m)$ и взятым в количестве $t=2m+1$, для которых выполняются неравенства коэффициентов $C_{j2k} < 0$. Далее рассчитывают совокупность аргументов $\mu_{1ek}, \mu_{2ek}, \dots, \mu_{mek}$, соответствующих вершине параболы функции. Затем, принимая найденную совокупность вершинных аргументов и рассчитанное с их учетом значение функции $R^2(\mu_{ek}^m)$, получают вновь образованную опорную точку. В следующем $(k+1)$ -приближении заменяют одну из опорных точек с наименьшим значением R^2 на вновь образованную опорную точку. После замены опорной точки проверяют выполнение отмеченных неравенств коэффициентов параболы функции. В случае невыполнения $C_{j2k} < 0$ опорные точки с наименьшим значением функции R^2 перемещают в направлении ее увеличения до восстановления требуемых неравенств. В процессе k или $(k+1)$ -приближения опорные точки, наиболее удаленные от экстремума функции $R^2(\mu^m)$, заменяются опорными точками, менее от него удаленными. Поэтому, с ростом номера приближения опорные точки располагаются все ближе к экстремуму функции $R^2(\mu^m)$, и качество аппроксимации этой области параболы функцией улучшается. На стадии приближений $k > t$ все опорные точки становятся расчетными. При дальнейшем росте номера приближения область опорных точек уменьшается, и они концентрируются все в большей мере вокруг точки экстремума функции $R^2(\mu^m)$. При этом совокупность дополнительных аргументов, рассчитанных по вершине параболы функции, все меньше

отличается от искомой их совокупности – показателей степени, соответствующих максимуму функции $R^2(\mu^m)$.

Достаточность приближений оценивается сравнением заданной, сколь угодно малой, простой средней относительной погрешности δ определения показателей степени точки максимума функции $R^2(X^m)$ с ее частным значением δ_{jk} , рассчитанным в текущем приближении для каждого показателя степени по формуле

$$\delta_{jk} = \frac{\sum_{f=1}^t |\mu_{j(k+1)} - \mu_{jkf}|}{t \mu_{j(k+1)}}$$

где μ_{jkf} – значение j -показателя степени опорной f -точки в k -приближении; $\mu_{j(k+1)}$ – значение j -показателя степени новой опорной точки, рассчитанной для $(k+1)$ -приближения. Здесь принимаем, что совокупность показателей степени, рассчитанных для $(k+1)$ -приближения, наиболее вероятная. Приближения с номером k считаются достаточными, если для каждого показателя степени выполняется неравенство

$$\delta_{jk} \leq \delta$$

Таким образом, рассчитывается с заданной, сколь угодно малой, погрешностью совокупность показателей степени тренда $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_m$, при которой коэффициент его детерминации R^2 наибольший из всех возможных, оцениваемых МНК.

В соответствии с принятой концепцией формирования трендов ПС СПС предлагается классифицировать их, разделяя на типы по признакам количества аргументов и экстремумов в распределении зависимой величины. Тип тренда представляется перечнем его аргументов с указанием в скобках после каждого из них v_i+1 обозначений показателей степени, соответствующих

личеству интервалов монотонности тренда вдоль данного аргумента. Например: если аргумент один и экстремумов нет, то тип тренда $X(\mu)$; если аргумент один, а экстремумов два, то тип тренда $X(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$; если аргументов два и вдоль одного из них нет экстремума, а вдоль второго аргумента имеется один экстремум, то тип тренда $X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$.

Отметим условие единственности максимума функции $R^2(\mu^m)$, которое состоит в том, что $v_j=0$, т. е. тренд (1) не должен содержать экстремумов. При $v_j > 0$ в тренде есть экстремумы, и его полином содержит два или больше членов с одним и тем же основным j -аргументом. В этом случае функция $R^2(\mu^m)$, из-за перестановок значений показателей степени в отмеченных членах полинома, содержит $(v_{jm} + 1)!$ одинаковых по значениям максимумов, где v_{jm} – максимальное количество экстремумов тренда, выбранное из числа имеющихся экстремумов вдоль каждого основного аргумента. Если в повторяющихся с j -аргументом членах полинома придать показателям степени фиксированные значения, то из функции $R^2(\mu^m)$ получается ее ортогональное сечение, в котором функция R^2 содержит единственный максимум.

Показатели степени, соответствующие максимуму функции $R^2(\mu^m)$, определяются МНК и МППВ непосредственно в случае $v_j=0$ или путем последовательных s -приближений в случае $v_j > 0$. Каждое s -приближение содержит цикл последовательно проводимых кратных приближений, осуществляемых МНК и МППВ в ортогональных сечениях. Для выделения очередного сечения показателям степени, не задействованным в нем, придают фиксированные значения, ранее полученные для них в преды-

дущих сечениях. При чередовании сечений в выделенном s -приближении и увеличении номера s показатели степени, определяемые в текущем сечении, сходятся к искомым значениям. Коэффициент R^2_{max} , увеличиваясь через дискретные интервалы, постепенно приближается к какой либо одной (из числа существующих) точке максимума функции $R^2(\mu^m)$. Приближение, после которого знак разности $R^2_{max(s+1)} - R^2_{max(s)}$ изменяется с плюса на минус, принимается достаточным. Чем меньше погрешность δ , заданная в сечениях, тем точнее s -приближениями определяются искомые показатели степени.

В общем случае выбор и последовательность чередования ортогональных сечений могут быть разными, и методика определения показателей степени в отдельных трендах становится многовариантной. С учетом соображений минимизации и компактности вычислительных операций, предлагается преимущественно выбирать методики, содержащие в выделенных сечениях параболическую аппроксимацию с наибольшим числом аргументов, следовательно, и с наибольшим количеством опорных точек. Для сокращенного обозначения методики, применяемой в сечении и s -приближении, вводится соответствующая аббревиатура $MtT-(v_j+1)$, где M – методика сечения; t – число опорных точек; T – точки; (v_j+1) – кратность применения данной методики (по числу ортогональных сечений) в одном s -приближении. Например, для тренда типа $X(\mu_1, \mu_2)$ применяется методика МЗТ-2, содержащая в каждом s -приближении двукратно применяемую (в отдельных сечениях) методику с параболической аппроксимацией по трем опорным точкам, а для тренда $X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$ применяется методика М5Т-1, МЗТ-1, со-

Типы и соответствующие формулы трендов СПС

m	v_i	Тип полиноми- степенного тренда СПС	Формула тренда	Методика определения показателей степени
1	0	$X(\mu)$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + B$	МЗТ-1
1	1	$X(\mu_1, \mu_2)$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{12}x_1^{\mu}12 + B$	МЗТ-2
1	2	$X(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{12}x_1^{\mu}12 +$ $+A_{13}x_1^{\mu}13 + B$	МЗТ-3
2	0; 0	$X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21})$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{21}x_2^{\mu}21 + B$	М5Т-1
2	0; 1	$X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{21}x_2^{\mu}21 +$ $+A_{22}x_2^{\mu}22 + B$	М5Т-1, МЗТ-1
2	1; 1	$X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{12}x_1^{\mu}12 +$ $+ A_{21}x_2^{\mu}21 + A_{22}x_2^{\mu}22 + B$	М5Т-2
3	0; 0; 0	$X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}) X_3(\mu_{31})$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{21}x_2^{\mu}21 +$ $+A_{31}x_3^{\mu}31 + B$	М7Т-1
3	0; 0; 1	$X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}) X_3(\mu_{31}, \mu_{32})$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{21}x_2^{\mu}21 +$ $+A_{31}x_3^{\mu}31 + A_{32}x_3^{\mu}32 + B$	М7Т-1, МЗТ-1
3	0; 1; 1	$X_1(\mu_{11})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})X_3(\mu_{31}, \mu_{32})$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{21}x_2^{\mu}21 +$ $+A_{22}x_2^{\mu}22 + A_{31}x_3^{\mu}31 +$ $+ A_{32}x_3^{\mu}32 + B$	М7Т-1, М5Т-1
3	1; 1; 1	$X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21}, \mu_{22})X_3(\mu_{31}, \mu_{32})$	$A_{11}x_1^{\mu}11 + A_{12}x_1^{\mu}12 +$ $+A_{21}x_2^{\mu}21 + A_{22}x_2^{\mu}22 +$ $+A_{31}x_3^{\mu}31 + A_{32}x_3^{\mu}32 + B$	М7Т-2

стоящая в s-приближении из двух методик сечения, среди которых последовательно в одном сечении однократно применяется параболическая аппроксимация по пяти опорным точкам, а в другом сечении так же однократно применяется аппроксимация по трем опорным точкам. Наиболее простые и часто используемые типы трендов, их математические формулы и обозначения методик расчетов приведены в таблице.

Отметим некоторые методические аспекты. В МЗТ для построения параболы задают три опорные точки. В нулевом приближении показатель степени первой точки μ_1 задают малым отрицательным числом. Показатель степени второй точки μ_2 задают также малым, но положительным числом. Показатель степени третьей точки μ_3 задают в случае $R_2^2 > R_1^2$ на интервале уменьшения R^2 , а в случае $R_2^2 < R_1^2$ на интервале увеличения R^2

таким, соответственно, положительным или отрицательным числом, при котором положение вершины параболы находится в промежутке между наименьшим и наибольшим заданным показателем степени. В М5Т для построения эллиптического параболоида задают пять опорных точек. По наибольшему значению R^2 из трех точек, заданных около нуля в разных квадрантах системы координат (μ_{11}, μ_{21}) , выбирают квадрант, содержащий точку максимума R^2 . Оставшиеся две опорные точки располагают в выбранном квадранте по тем же соображениям в отношении каждого показателя степени, которые приведены в МЗТ. Образование и перемещение опорных точек на начальных стадиях МЗТ в случае $R_2^2 > R_1^2$, а также М5Т в случае расположения максимума R^2 в первом квадранте показано, соответственно, на рис. 1 и рис. 2. Опорные точки, по которым строится парабола в МЗТ и параболоид в М5Т,

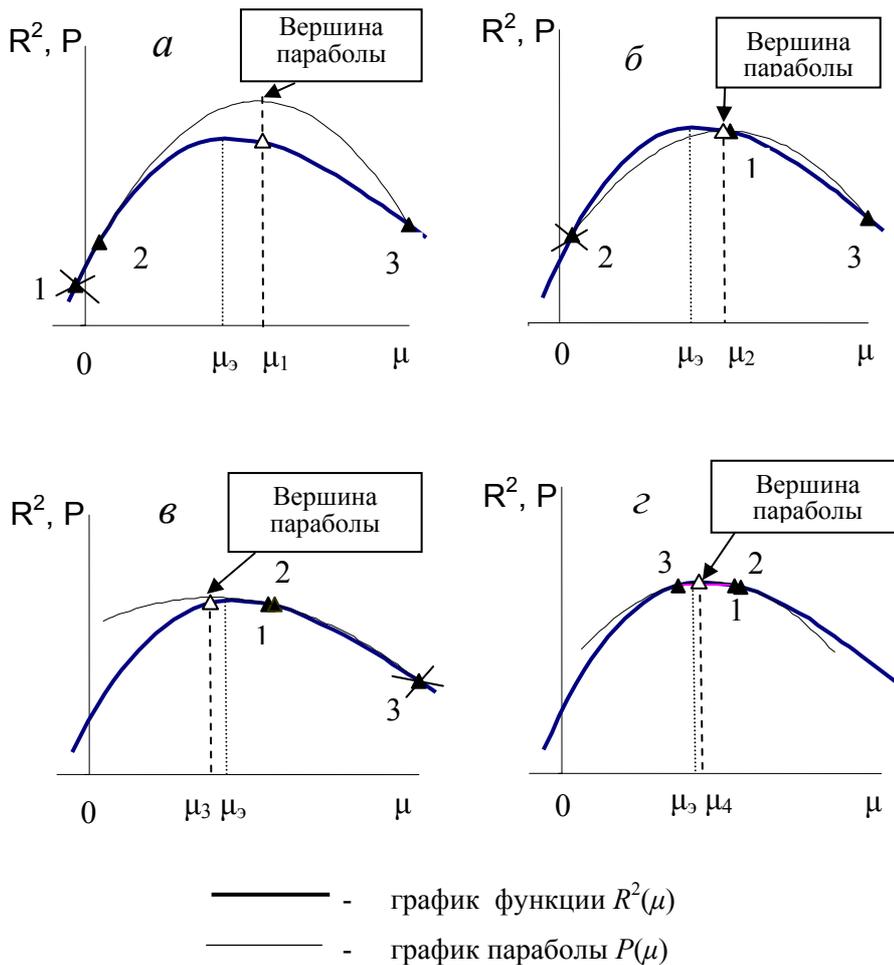


Рис. 1. Перемещение опорных точек в начальной стадии методики сечения МЗТ

обозначены темными треугольниками. Вновь образованные опорные точки, рассчитанные по вершине параболы или параболоида, обозначены треугольником с белым полем внутри. Выбывающая точка предыдущего приближения с наименьшим коэффициентом детерминации перечеркнута крестиком. На фрагментах *а, б, в* МЗТ показано образование расчетной опорной точки по итогам соответственно нулевого, первого и второго приближений. На фрагменте *г*

показано образование следующей опорной точки в условиях локализации параболической вершины. С ростом номера приближения вновь образованная опорная точка располагается все ближе к точке максимума графика R^2 , имеющей искомый показатель степени μ_3 . На фрагментах *а, б, в, г, д* МЗТ, начиная с нулевого по четвертое приближение, показан процесс концентрации опорных точек и последовательное перемещение их к точке R^2_{max} .

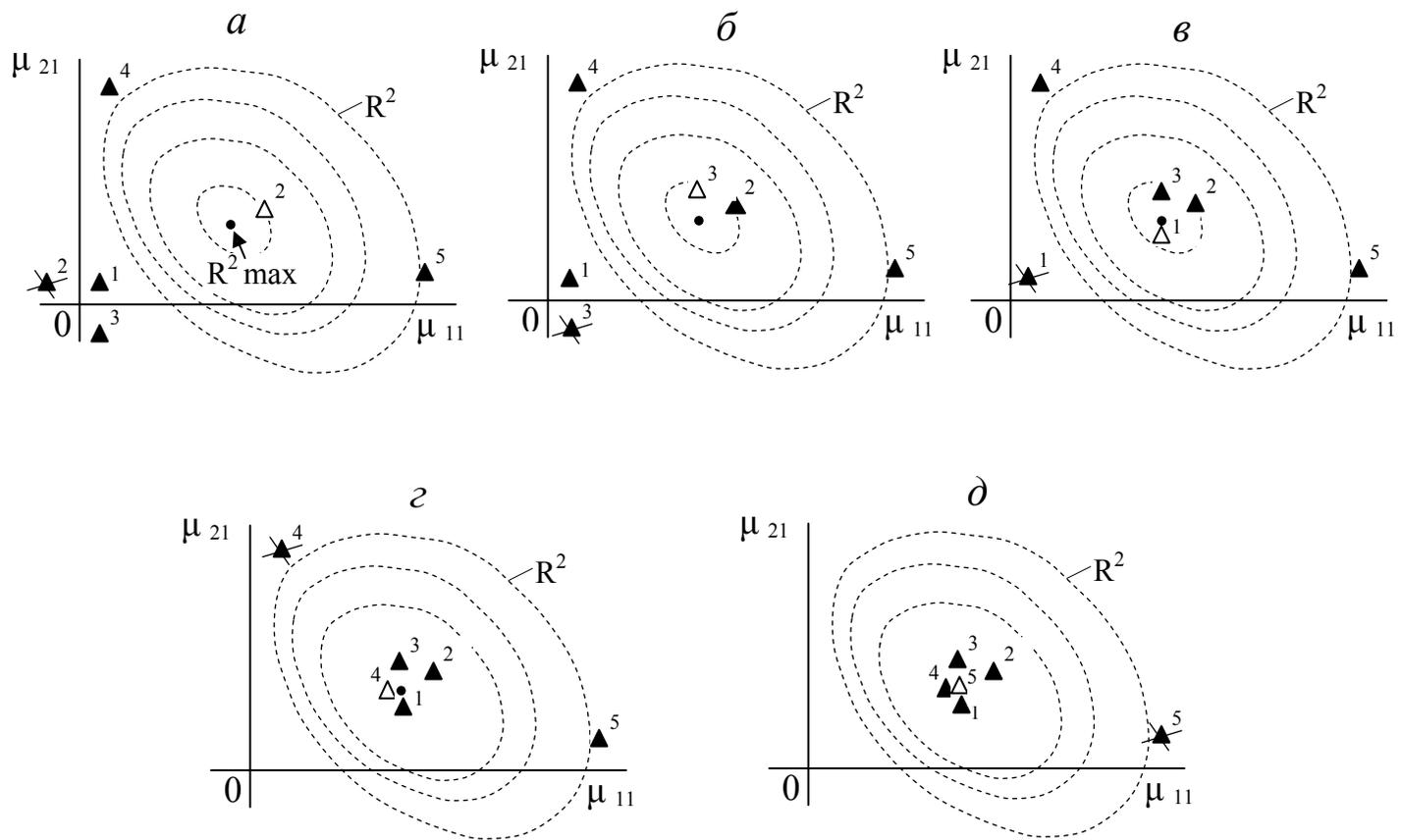


Рис. 2. Перемещение опорных точек в начальной стадии методики сечения М5Т

Достоверность интерполяции зависимой величины в широких интервалах и экстраполяции полиномными степенными трендами СПС значительно выше по сравнению с трендами, где показатели степени представлены целыми числами. Тем не менее, выбрать однозначно тип тренда можно, когда известны особенности и свойства искомой трендовой зависимости. Однако, часто таких сведений нет, но требуется определить тренд, выражающий закономерность изменения зависимой величины с максимальной возможной достоверностью. Если есть уверенность, что искомый тренд представлен степенным полиномом, то задача решается в случае, когда значения зависимой величины заданы в известных доверительных интервалах. Эти интервалы могут выражаться, например, относительной погрешностью тех средств или методов, с применением которых получены (косвенно рассчитаны или непосредственно измерены) заданные значения зависимой величины. Очевидно, что выбор искомого тренда должен быть ориентирован на соответствие его коэффициента детерминации R^2 фактически имеющимся доверительным интервалам в заданных значениях зависимой величины. С учетом таких интервалов рассчитывается коэффициент заданной детерминации R_s^2 . Наиболее достоверным, т. е. ориентированным на погрешность трендом СПС из числа имеющихся типов, можно считать такой, в котором абсолютная разность между коэффициентами R_s^2 и R^2 минимальная.

Учитывая сложность обработки входящих геоданных и промежуточных численных расчетов, определение полиномных степенных трендов СПС практически реализуется по соответствующим алгоритмам компьютерными технологиями. В институте

горного дела УрО РАН разработан пакет программы, производящий построение серии одномерных трендов ПС СПС. Предусмотрены функции автоматического и ручного ввода геоданных, выбора типа тренда, расчета коэффициентов и показателей степени, а также отображения математических формул трендов, построение их графиков, сопряжения с внешними электронными носителями и программными пакетам, например, Microsoft Office Excel, по автоматическому вводу данных и выходу формул и графиков тренда.

Возможности и эффективность практического использования трендов ПС СПС показаны на следующих примерах и иллюстрированы рисунками.

Пример 1. По горизонтальному направлению X вблизи боковой стенки подземной горной выработки в некоторых точках горного массива измерено вертикальное механическое напряжение σ горных пород. Известно, что по мере горизонтального удаления от стенки горной выработки вглубь массива горных пород механическое напряжение уменьшается и на некотором расстоянии становится стабильным. Требуется определить по данным измерения механического напряжения длину зоны влияния горной выработки и оценить значение стабильного напряжения за ее пределами. Результаты измерений и графики трендов представлены на рисунке 3 (фрагмент *a*). В данном примере имеется лишь один аргумент, и заданные случайные значения зависимой величины монотонно уменьшаются. Решить задачу с применением известного степенного тренда невозможно из-за его асимптотического приближения к нулю по мере увеличения X . С учетом ориентации на погрешность измерений механического напряжения заданным условиям соответствует тренд

СПС типа $X(\mu)$. Этот тренд содержит степенной член с рассчитанным показателем степени $\mu_{11} = -0,8099$, а также постоянную составляющую, значение которой указывает на положение асимптоты, т.е. по мере увеличения X механическое напряжение стремится к некоторому стабильному напряжению 26,3277 МПа. Дополнительно по тренду определено, что с точностью 10 % в точке $X=6$ заканчивается зона влияния горной выработки.

Пример 2. По данным геологического опробования керна в отдельных точках вдоль оси скважины, пересекающей пласт горной породы до глубины 115 м, получен ряд случайных значений содержания в горной породе железа, обладающий явными признаками экстремального распределения в виде максимума. С целью прогноза требуется по данным опробования установить тренд содержания железа в горной породе в направлении оси скважины на глубину до 200 м. Результаты геологического опробования и графики проведенных трендов представлены на рис. 3 (фрагмент б). Полиномные степенные квадратичный и кубический тренды, проведенные опцией «Диаграммы-линии тренда» Microsoft Excel, хорошо аппроксимируют содержание железа в диапазоне измеренных значений. Однако, в области экстраполяции эти тренды расходятся по противоположным направлениям так, что квадратичный тренд существенно занижает, а кубический наоборот резко завышает прогнозируемое содержание железа. С учетом погрешности геологического опробования рассчитали коэффициент заданной детерминации $R_3^2 = 0,9527$. Наиболее приближен к такому условию тренд СПС типа $X(\mu_1, \mu_2)$. Этот тренд содержит, кроме постоянной составляющей, два степенных члена с рассчитанными показателями степени $\mu_{11} = 0,2576$ и $\mu_{12} = 0,2582$.

Его достоверность в области опорных точек $R^2 = 0,9898$ больше, чем у квадратичного тренда. В области экстраполяции этот тренд находится между квадратичным и кубическим трендами и показывает более устойчивый и достоверный прогноз содержания железа в горной породе без резких отклонений в сторону существенного занижения или завышения.

Пример 3. В шести геологических скважинах, расположенных вдоль профиля с координатой X , установлены пересечения с пластом горной породы, продуктивным по размещению минеральных ресурсов. По данным геологического опробования в каждой скважине определены вертикальные координаты (глубины) кровли H_1 и подошвы H_2 продуктивного пласта. Известно, что морфоструктура горных пород в данном геологическом районе не содержит разломом и вертикальных сдвигов, характеризуется наличием явно выраженных непрерывных границ литологических разностей. Пользуясь средствами регрессионного анализа, требуется на основе данных геологического опробования построить в вертикальном разрезе аналитическую модель контура продуктивного пласта. Для решения данной задачи, учитывая высокий коэффициент заданной детерминации и сложность распределения геоданных, применены тренды СПС типа $X(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Построение модели контура пласта проведено по совокупности двух таких трендов. Исходными данными для построения первого тренда являлись вертикальные отметки кровли пласта, зафиксированные в геологических скважинах. Второй тренд построен аналогично с той лишь разницей, что в исходных данных по скважинам учтены отметки подошвы пласта. Результаты моделирования показаны на рис. 4.

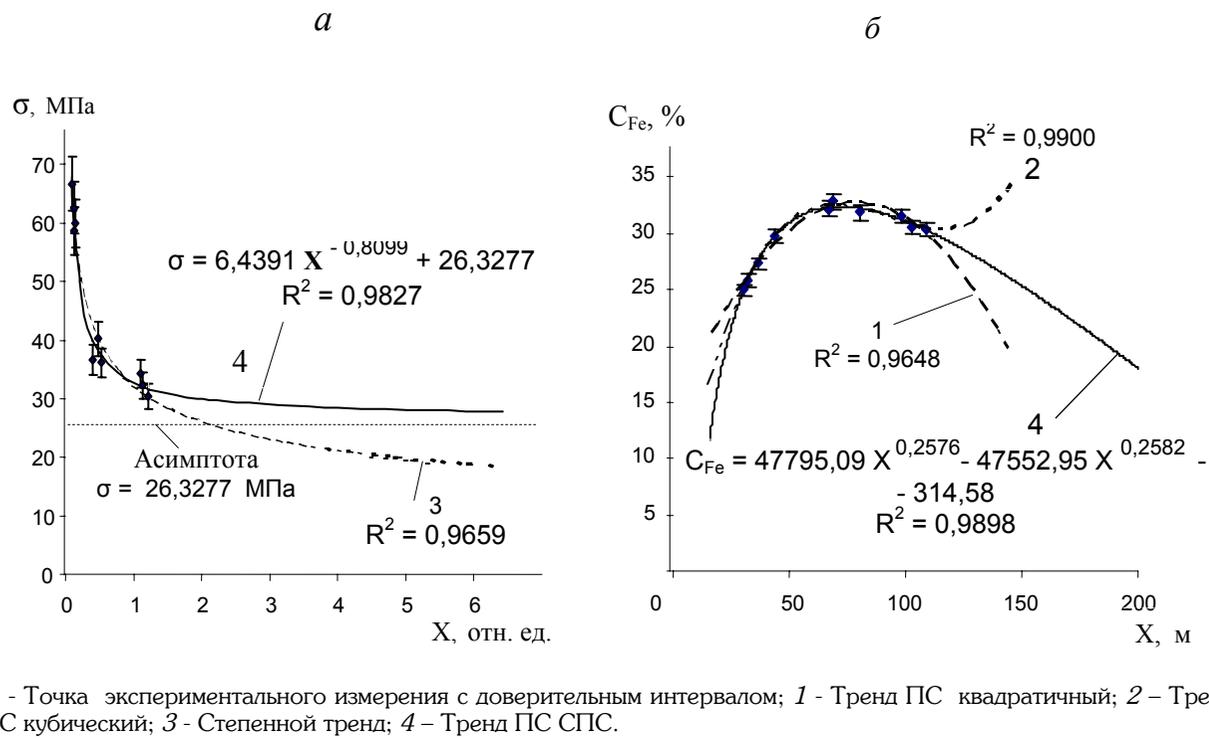
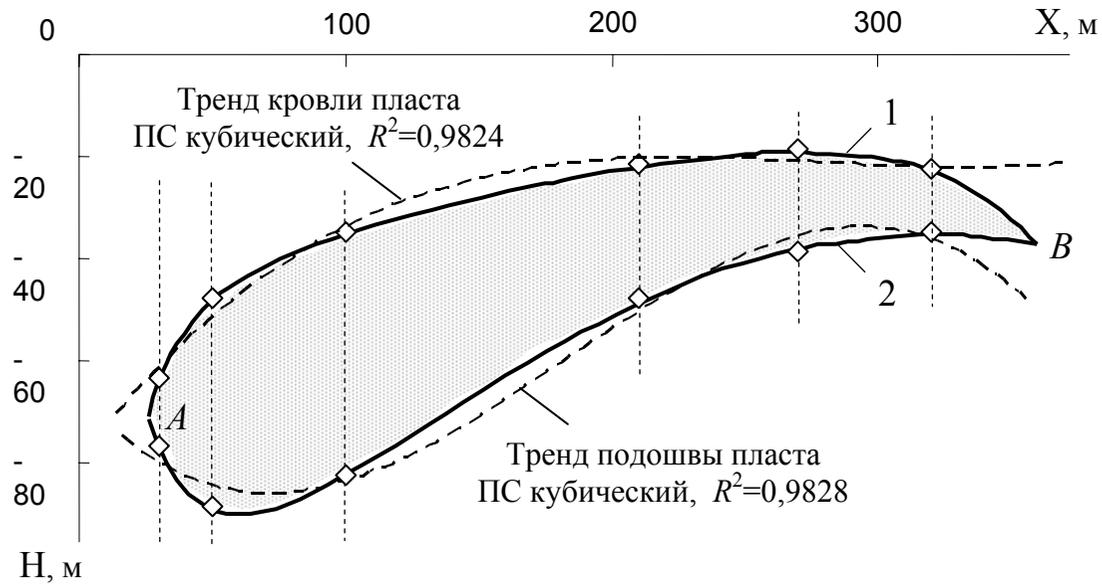
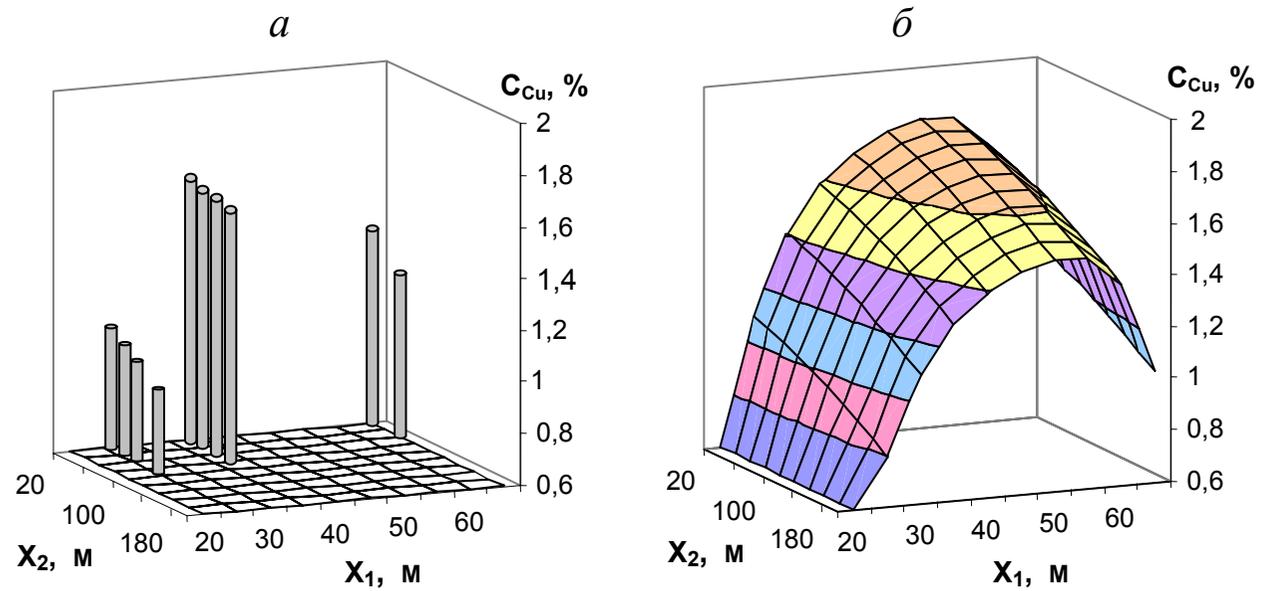


Рис. 3. Тренды ПС СПС вертикального давления *a* и содержания железа *б* вдоль профилей в массиве горной породы



..... - Направление геологической скважины; \diamond - Глубина отсечки
 по скважине кровли и подошвы продуктивного пласта горной породы по данным геологического опробования;
 1 – Тренд ПС СПС кровли продуктивного пласта горной породы; $H_1 = -2,8245 \cdot 10^{-20} X^{8,21085} -$
 $- 14177,91 X^{-1,9558} + 3,3078 X^{0,4697} - 62,0368, R^2 = 0,9999$; 2 – Тренд ПС СПС подошвы продуктивного
 пласта горной породы; $H_2 = 12,23 X^{0,66476} - 0,00326 X^{1,8512} - 8262,86 X^{0,01288} + 8440,42, R^2 = 0,9942$.

Рис. 4. Моделирование вертикального контура продуктивного пласта горной породы трендами ПС СПС



а – исходные данные геологического опробования; б – поверхность тренда

$$C_{Cu} = -1393,846 X_1^{-2,28} - 9,005 \cdot 10^{-25} X_1^{13,1268} - 0,00021 X_2^{1,38} + 2,02, \delta = 10^{-4}, R^2 = 0,9897.$$

Рис. 5. Моделирование распределения содержания меди по плоскому сечению горного массива двумерным трендом ПС СПС

В первом тренде рассчитаны показатели степени $\mu_{11} = 8,21$, $\mu_{12} = -1,956$ и $\mu_{13} = 0,469$. Во втором тренде также рассчитаны показатели $\mu_{11} = 0,6648$, $\mu_{12} = 1,8512$ и $\mu_{13} = 0,01288$. Коэффициент детерминации в обоих трендах приближен к единице, что указывает на отображение трендами зависимостей вертикального положения кровли и подошвы пласта от координаты профиля с высокой достоверностью. В областях экстраполяции трендовые значения вертикальной отметки кровли H_1 и подошвы H_2 пласта изменяются плавно и монотонно. Это обстоятельство позволило замкнуть контур пласта в точках A и B пересечения первого и второго трендов.

Пример 4. На площади плоского сечения, проходящего через горный массив, имеются точки с данными геологического опробования на содержание в горной породе меди. Требуется, используя эти данные, установить аналитическую закономерность площадного распределения меди и провести изолинии ее содержания в горной породе. На рис. 5 представлены заданные значения содержания меди по данным геологического опробования (фрагмент *a*) и поверхность тренда ПС СПС соответ-

ствующего типа $X_1(\mu_{11}, \mu_{12})X_2(\mu_{21})$ (фрагмент *b*), отображающего закономерность и изолинии площадного распределения содержания меди. В данном тренде рассчитаны показатели степени $\mu_{11} = -2,28$, $\mu_{12} = 13,1268$, $\mu_{21} = 1,38$. Его поверхность экстраполирована на внешнюю область по площади в 4 раза больше той, которую занимали исходные данные. В области экстраполяции поверхность тренда изменяется плавно и монотонно, в соответствии с закономерностью, заданной исходными данными.

В заключение следует отметить, что для применения трендов ПС СПС исходные данные необходимо приводить к условиям $X_j > 0$. Результаты итераций в МППВ быстро сходятся. Например, в большинстве практических случаев определения показателей степени по методике сечения МЗТ или МБТ для достижения заданной погрешности расчетов требуется, соответственно, не больше 10 или 13 итераций. В расчетах по сложным методикам с многократным применением сечений количество итераций существенно увеличивается. Однако, современные компьютерные технологии позволяют проводить подобные численные расчеты достаточно быстро и точно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. – М.: Финансы и статистика, 1981. **ГИАБ**

Коротко об авторе

Антонов В.А. – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт горного дела УрО РАН.