

УДК 622.72:51:001.57

К.В. Федотов, А.К. Черкашин, Н.А. Черкашина

**МАКРОСОСТОЯНИЯ ПРОДУКТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ЦИКЛА ПЕРЕРАБОТКИ РУДЫ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОСТИ**

Семинар № 6

В процессе производства исходное сырье, пройдя через последовательность технологических операций, превращается в продукцию, товар, обладающий определенной полезностью для потребителя. Полезность обычно рассматривается как способность товара удовлетворять разные человеческие потребности, возникающие в личной жизни, так и в процессе производства новых товаров в виде сырья, комплектующих изделий, машин и механизмов. В том смысле полезность определяет свойство товаров и услуг выполнять за человека или для человека определенную работу, т.е. является эквивалентом полезной энергии в расширенном понимании этого термина.

В неоклассической экономической теории полезность и энергия часто отождествляются. При этом обращается внимание на их общие свойства, в частности ненаблюдаемость, т.е. на возможность их выявления и оценки только через связь с другими наблюдаемыми переменными [Дорошенко, 2000]. С этим связаны попытки оценить полезность и стоимость товаров в энергетических показателях, в физических терминах [Белоцерковский и др., 2006]. Однако такой подход неэффективен, поскольку полезность – другой уровень проявления общих закономерностей оценки состояния и работоспособности. Энергия и по-

лезность – частные выражения представления об организации, рассматриваемой в рамках обобщающей (сквозной) теории макросистем как систем потенциалов разного рода [Черкашин, 2005].

Такая теория позволяет исследовать разные уровни горного производства с единых позиций: от термодинамики горных пород через производство полезностей в технологических процессах к организации горного производства в микро- и макромасштабах. Во всех случаях речь идет о разнопорядковых организациях $W=W(x)$ как функциях набора i -х экстенсивных потенциалов $x=\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$. Организация состоит из частей (j -х компонентов, фаз) со своим набором парцеллярных потенциалов $x_j=\{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{jn}\}$. Экстенсивные потенциалы организации равны сумме соответствующих потенциалов частей:

$$x_i = \sum_j x_{ji} .$$

Аналогично для соотношения общей и частной организации:

$$W = \sum_j W_j .$$

Для автономных, невзаимодействующих частей их организации $W_j=W_j(x_j)$ определяются парцеллярными потенциалами. Общая организация существует и как функция набора основных потенциалов $x=\{x_j\}$, так и множества парцеллярных потенциалов $X=\{x_j\}$. Функции организации $W=W(x)=F(X)$ есть функции со-

стояния разноуровневых макросистем.

Для любой аналитической функции справедливо математическое преобразование Лежандра $W(x) \rightarrow L(a)$:

$$W(x) = \frac{\partial W}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_i} x_i + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_n} x_n + L(a) \quad (1)$$

где $a = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ – набор интенсивных потенциалов $a_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}$,

трактуемые как чувствительности, силы в обобщенном смысле. При $L(a)=0$ для автономных систем имеет место вырожденное преобразование $W(x) \rightarrow 0$, соответствующее билинейному уравнению $W = (a, x)$:

$$W(x) = \frac{\partial W}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_i} x_i + \dots + \frac{\partial W}{\partial x_n} x_n = \sum_i a_i x_i \quad (2)$$

Это дифференциальное уравнение Эйлера для однородных функций $W(x)$ первого порядка.

Потенциалы W и x обычно задаются не в абсолютных, а в относительных переменных (относительных координатах пространства потенциалов): $W(x) = Q(y) - Q_0(y_0)$, $x = y - y_0$. Отсюда

$$Q(y) - Q_0(y_0) = \frac{\partial W}{\partial y_1} (y_1 - y_{01}) + \dots + \frac{\partial W}{\partial y_i} (y_i - y_{0i}) + \dots + \frac{\partial W}{\partial y_n} (y_n - y_{0n}) \quad (3)$$

Так описывается движение объекта $Q(y)$ в пространстве потенциалов y относительно изменения его среды $Q_0(y_0)$, например, учитывается местная специфика условий рудного производства или особенность реализации товара с учетом субъективных предпочтений потребителя. Величина

$W(x) = Q(y) - Q_0(y_0)$ – это свободная организация, например, полезность или энергия, т.е. та часть, внутренней энергии $Q(y)$, которая способна совершать работу, удовлетворяя потребности. В том случае, когда полезность $Q(y)$ и потребность $Q_0(y_0)$ совпадают, товар теряет свою привлекательность $W(x) = 0$. Согласно (3) это, в частности, имеет место при совпадении внутренних и внешних потенциалов $y_i = y_{0i}$. Таким образом удается отобразить совместное влияние на итоговую организацию $W(x)$ свойств объекта и его среды.

Уравнение (2) в относительных переменных $W(x)$ при зависимости $W(x_i)$ только от одного потенциала x_i редуцируется к выражению $W(x_i) = \frac{dW}{dx_i} x_i$,

имеющее решение $W = Kx_i$, где K – константа. В этом случае организация и полезность пропорциональны одному (ведущему) потенциалу. Так, например, сопоставляется полезность и стоимость (экономический потенциал) или полезность и масса полезного вещества в руде. Коэффициент K в разных ситуациях разный.

В общем случае, когда полезность зависит от множества потенциалов, решение (3) находят в виде функции $\Phi(C)=0$, где $C=\{C_j\}$ – набор индексных переменных вида $C_j = x_j/W$ или $C_j = x_j/x_j$. Выраженное в явном виде $W=W(x)$ это уравнение соответствует метрике пространства потенциалов, например, евклидовой метрике

$$W = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2} \quad (4)$$

– однородной функции первого порядка. К этому классу функций относятся также линейная однородная комбинация

$$W = W_0 x_1^{\beta_1} \cdots x_i^{\beta_i} \cdots x_n^{\beta_n}, \sum_i \beta_i = 1. \quad (5)$$

Подобные соотношения широко используются при расчете производственных функций, при оценке ресурсов, в квалиметрии продукции. В них часто сравниваются разные потенциалы, например, x_1 и x_2 , а функция организации W неявным образом входит в зависимость $x_1 = f(x_2, W)$. Возможность существования такой зависимости следует из (4)-(5) и объясняется симметричностью замены переменных из множества (W, x) в уравнении (2), т.е. любая переменная в (2) может рассматриваться в качестве независимой величины.

При распространении макросистемных закономерностей на широкий круг явлений увеличивается класс базисных потенциалов. В физико-химической термодинамике используются потенциалы: энтропия (S), объем (V) и масса (m).

Им соответствуют интенсивные потенциалы – температура ($T = \frac{\partial W}{\partial S}$),

давление ($p = -\frac{\partial W}{\partial V}$), химический потенциал ($\mu = \frac{\partial W}{\partial m}$).

Биологические потенциалы дают число частиц (N), рост биомассы ($v_m = \frac{dm}{dt}$) и числа частиц

($v_N = \frac{dN}{dt}$). Введение скорости позво-

ляет учитывать временные изменения в макросистемах. Социально-экономические явления дополняют список потенциалов характеристиками трудовой стоимости G и общественной ценности R объектов. Полезность совпадает со стоимостью или ценностью, как отмечалось выше, только в исключительных случаях; в обобщенном варианте полез-

ность есть функция множества потенциалов, включая, например, запасы полезных ископаемых месторождения.

Помимо появления качественно новых потенциалов в социально-экономических системах иной расширительный смысл приобретают прежние потенциалы, например, V можно трактовать как размер рынка, а p считать уровнем конкуренции. Обобщенная температура соответствует величине инвестиций. Энтропию S удобно рассматривать как противоположность информации $I - I_0 = -S$. Все потенциалы считаются относительными переменными.

В экономике интенсивный потенциал $a_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}$ называют «предельной

полезностью» и трактуют как цену ресурса, а $E_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{x_i}{W}$ – эластично-

стью. Согласно (2) в норме сумма эластичностей по всем потенциалам должна быть равна единице, т.е. все они должны быть взаимозаменяемы, поэтому внедрение нового фактора или компонента изменяет эластичность по другим потенциалам.

В технологическом процессе на разных этапах передела продукции накапливается стоимость G в результате воздействия живого труда и механизмов. Предельная полезность по стоимости $a_G = \frac{\partial W}{\partial G}$ равна увеличе-

нию полезности при росте добавленной стоимости на единицу. Эта величина характеризует эффективность производства, производительность труда. Для функции полезности вторая производная $b_G = \frac{\partial a_G}{\partial G} = \frac{\partial^2 W}{\partial G^2} \leq 0$

обычно по всем факторам, что соответствует постепенному насыщению

полезности с ростом величины влияющего потенциала.

Полезность продукции горнорудного производства возрастает также с увеличением ее ценности R , например, в результате глубокой переработки минерального сырья. Чувствительность по этому потенциалу

$a_R = \frac{\partial W}{\partial R}$ имеет особое значение для

драгоценных и редких металлов. Как следует из (2), при положительных величинах a_G и a_R с ростом G и R увеличивается полезность W . По этой причине из множества решений уравнения (2) выбираются такие, которые удовлетворяют перечисленным требованиям и являются однородными функциями первого порядка.

Как известно, оценить полезность в явном виде не представляется возможным, поэтому для расчетов используется связь между известными потенциалами $x_k = f_k(x, W)$, которая удовлетворяет уравнению (2) в силу симметричности переменных. В данном случае (2) переписывается в виде

$$x_k = \sum_i a_{ki} x_i + \frac{\partial x_k}{\partial W} W, \quad i \neq k, \quad a_{ki} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Коэффициенты a_{ki} называются предельными нормами замещения ресурсов; их обратные величины $1/a_{ki}$ имеют смысл количества ресурсов i -го типа, необходимых для компенсации изменения на единицу количества k -го ресурса при сохранении неизменной

полезности $\frac{\partial x_k}{\partial W} = 0$. При эконометрическом изучении производственной функции $x_k = f_k(x, W)$ полезность на некотором этапе технологической цепи считается постоянной. Зависимость аппроксимируется адекватной математической функцией, удовлетворяющей (6), т.е. вытекающей из

$\Phi(C)=0$, где $C=\{C_i\}$ – набор переменных вида $C_k=x_k/W$ или $C_{ik}=x_i/x_k$. Например,

$$\frac{x_k}{W} = h \ln^{-1} \left(\frac{x_k}{x_1} \right), \quad (7)$$

откуда а) $x_k = hW \ln^{-1} \left(\frac{x_k}{x_1} \right)$ и

$$б) W = h_0 x_k \ln \left(\frac{x_k}{x_1} \right), \quad h_0 = 1/h. \quad (8)$$

На основе статистических данных подбирается вид функции (8а), а затем проводится анализ полезности с использованием соотношения (8б). При подборе уравнений привлекаются свойства предельной полезности

$$a_k = \frac{\partial W}{\partial x_k} \geq 0, \quad b_k = \frac{\partial^2 W}{\partial x_k^2} \leq 0. \quad \text{При этом}$$

учитывается, что согласно (2), функция a_k является однородной функцией нулевого порядка, а b_k порядка -1. Вспомогательное значение могут иметь графики зависимости $x_k = f_{ki}(x_i, W)$ только от одной переменной при постоянных значениях других переменных.

Для функции (8б) требуемые условия выполняются при $x_k \geq 0, h_0 \leq 0, .$

$$x_k \leq x_1 / e.$$

Это означает, что при нарушении требования $x_k \leq x_1 / e$ полезность будет убывать с ростом x_k , т.е. существуют некоторые оптимальные соотношения потенциальных свойств продукции, при которых полезность достигает максимальной величины. В целом в структуре продукта организующая роль отдельных потенциалов и компонентов должна удовлетворять пропорции, задаваемой значениями переменных $C_{ik}=x_i/x_k$, наподобие соотношения равновесных цен, устанавливающихся на рынке как организационной структуры. Поиск подоб-

ных пропорций и определяет задачи оптимизации технологических процессов горного производства.

Исследовались материалы технологического регламента проектирования обогатительной фабрики по переработке лежалых хвостов Джидинского вольфрам-молибденового комбината в Забайкалье. Средняя планируемая производительность фабрики 7,6 тыс. т /сут в течение 210 дней в году. Среднее содержание вольфрама в сырье - 0,17%, золота 0,17 г/т. Общая потребляемая мощность составит 4631,7 МВт/год, удельное энергопотребление - 2,9 кВт/т, удельное водопотребление - 2,0 м³/т. Предлагаемая технологическая схема основана на гравитационном обогащении лежалых хвостов с последующей доводкой черного концентрата с помощью флотационных, гравитационных и электромагнитных методов. Продуктами технологии являются вольфрамсодержащий концентрат, золотосодержащий концентрат, хвосты гравитационного предобогащения и сульфидный продукт. Итоговая полезность продуктов производства определяется качеством этих четырех компонентов, причем парциальная полезность концентратов вольфрама и золота должна возрасти в технологическом процессе, а отходов не уменьшаться.

С микро- и макроэкономической точки зрения начало переработки лежалых хвостов связано с ростом их свободной полезности как техногенного месторождения в силу изменения социально-экономических условий ($W(x) = Q(y) - Q_0(y_0)$), а именно за счет снижения связанной полезности $Q_0(y_0)$ при совершенствовании технологий и в целом изменения отношений к доступным минеральным ресурсам. В итоге лежалые хвосты обладают в современных экономико-

географических условиях ненулевой полезностью, которую необходимо оценить и увеличить в технологическом процессе.

Технологический регламент составлен по результатам исследований проб лежалых хвостов в лабораториях ЦНИГРИ в 1995-2001 гг. и ООО «НТЛ ТОМС» в 2000-2005 гг.

Джидинское месторождение техногенных песков («лежалых хвостов») сформировано в 1936-1996 гг. в результате переработки молибденовых и вольфрамовых месторождений в долине р. Модонкуль в виде техногенной залежи шириной 200-400 м и длиной до 2,2 км. Хвостохранилище сложено несцементированным плохо сортированным песком из обломков кварца, полевого шпата и других более редких минералов. Под влиянием природных и техногенных факторов сформировалась неоднородная структура залежи с чередованием участков линзовидной формы с разной степенью сортированности материала с признаками грубо ритмичной слоистости. Поверхностный слой обогащен крупнозернистой и щебнистой фракцией песков за счет вымывания и выдувания более мелких фракций.

Данные по вещественному составу залежи (по результатам ситового анализа ООО ТОМС) представлены в табл. 1.

Данные этой таблицы позволяют оценить некоторые потенциалы, влияющие на полезность, и их взаимосвязи. Пусть M - масса единичного объема залежи, L_j - минимальный размер частиц j -го класса крупности ($j=1,2,\dots,s$), P_j - выход классов, p_j - содержание и $m_j = Mp_j$ - масса полезного вещества в единице объема в j -м классе крупности обломков. Величина $N_j = v_0/L_j^3$ соответствует числу частиц j -го размера в единичном объеме. Зависимость массы полезного вещества m_j от степени дробления породы для

Таблица 1

Гранулометрический состав хвостов Джидинского ВМК и распределение полезных компонентов по классам крупности материала

Класс крупности, мм	Выход классов, %	Содержание		Распределение	
		WO ₃ , %	Au, г/т	WO ₃ , %	Au, %
-5+2	4,7	-	-	-	-
-2+1	11,3	0,05	0,05	3,56	3,21
-1+0,5	32,2	0,12	0,05	22,29	9,16
-0,5+0,2	30,9	0,09	0,05	15,56	8,79
-0,2+0,1	10,7	0,10	0,34	6,06	21,30
-1,1+0,071	3,7	0,91	0,44	19,80	9,47
-0,071+0	6,5	0,86	1,26	32,73	48,07
Итого	100	0,17	0,17	100	100

золота линейна $m_j = \alpha N_j$ с коэффициентом корреляции $r=0,99$. Для WO₃ она имеет более сложную структуру, которая может быть аппроксимирована формулой

$$m_j = \alpha N_j + \beta / N_j, \alpha, \beta > 0. \quad (9)$$

Предельная норма замещения ресурсов

$$a_{mN} = \frac{\partial m_j}{\partial N_j} = \alpha - \beta / N_j^2, \quad (10)$$

$$b_{mN} = \frac{\partial^2 m_j}{\partial N_j^2} = 2\beta / N_j^3$$

Соотношения (9)-(10) не являются однородными функциями, и сделать их однородными можно при введении меры полезности W . Из (10) хорошо видно, что для этого необходимо принять $\beta = \beta_0 W^2$. Отсюда

$$m_j = \alpha N_j + \beta_0 W^2 / N_j, \quad (11)$$

$$W = \sqrt{\frac{m_j N_j - \alpha N_j^2}{\beta_0}} = N_j \sqrt{\frac{m_{0j} - \alpha}{\beta_0}},$$

$$m_{0j} = m_j / N_j$$

- полезность нелинейно возрастает при увеличении массы полезного вещества m_j и степени дробления породы N_j . Полезность возрастает с увеличением удельной массы m_{0j} , которая не может быть ниже значения $m_{0j} = \alpha$. Удельная масса ниже

этого критического значения полезности не имеет. На этой границе имеет место $m_j = \alpha N_j$, т.е., судя по данным ситового анализа, содержание золота в сырье находится на границе полезности.

Рассчитаем предельную полезность по потенциалам m_j и N_j :

$$\frac{\partial W}{\partial m_j} = \frac{1}{\beta_0} \frac{N_j}{\sqrt{\frac{m_j N_j - \alpha N_j^2}{\beta_0}}} = \frac{N_j}{\beta_0 W} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0} \sqrt{m_{0j} - \alpha}}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial N_j} = \frac{m_j - 2\alpha N_j}{\beta_0 W} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \frac{m_{0j} - 2\alpha}{\sqrt{m_{0j} - \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \left(\sqrt{m_{0j} - \alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{m_{0j} - \alpha}} \right). \quad (13)$$

Предельная полезность по всем показателям, как следовало ожидать, снижается при росте самой полезности и соответствующего показателя и возрастает при увеличении альтернативного показателя. Прирост удельной массы положительно сказывается на предельной полезности по N_j и отрицательно – по m_j . Максимальная полезность по N_j наблюдается при $N_j = m_j / (2\alpha)$, которая равна

$W = m_j / \sqrt{4\alpha\beta_0}$, т.е. пропорциональна содержанию полезного вещества.

Как известно, дробление горных пород является одной из основных операций технологии горного производства. Оно увеличивает полезность продукции само по себе, так и в результате повышения содержания полезного вещества в свободном состоянии. На примере техногенного месторождения Джединского ВМК показано, что из хвостов исходной крупности (5 мм) можно извлечь 62 % свободных зерен вольфрамсодержащего гюнерита и 64 % свободных раскрытых зерен шеелита. При экспериментальном измельчении материала хвостов до крупности 0.5 мм выход полезного вещества повышается до 80,1 % для гюбнерита и до 78,5 % для шеелита.

Восстановление функции полезности по данным прямых наблюдений и экспериментов как математической зависимости от множества потенци-

альных характеристик позволяет получить уравнения, с помощью которых выясняются связи и ограничения влияния потенциалов, выявляются технологические условия оптимизации производственных процессов. Такой исследовательский процесс проиллюстрирован на простом примере связи полезности продукции горного производства с ее гранулометрическим составом и содержанием полезного вещества. Имеет смысл расширить спектр используемых экстенсивных и интенсивных потенциалов (информация, размеры, температура, давление, изменение состава, стоимость, значение) в их расширительной трактовке и использовать их для оценки изменения энергетического содержания, полезности и организации на различных уровнях иерархии макросистем. При реализации этого плана многое зависит от специфики постановки задач, имеющих общий путь решения в терминах обобщенных функций макросостояний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О.М., Быстрой Г.П., Цибульский В.Р. Экономическая синергетика. Вопросы устойчивости. – Новосибирск: Наука, 2006. – 116 с.
2. Дорошенко М.Е. Обращаясь к истокам современной экономической теории //

Вестник МГУ. Экономика.-2000. - №5. - С. 3-19.

3. Черкашин А.К. Полисистемное моделирование. – Новосибирск: Наука, 2005. – 280 С. **ГИАБ**

Коротко об авторах

Федотов К.В., Черкашин А.К., Черкашина Н.А. – Иркутский государственный технический университет.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 6 симпозиума «Неделя горняка-2008». Рецензент д-р техн. наук, проф. В.А. Харченко.

