

УДК 622.28

С.В. Князева

**РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБДЕЛКИ  
НАПОРНОГО ТОННЕЛЯ, СООРУЖАЕМОГО  
ВБЛИЗИ СКЛОНА С ПРИМЕНЕНИЕМ  
ИНЪЕКЦИОННОГО УКРЕПЛЕНИЯ ПОРОД**

Семинар № 18

**В** Тульском государственном университете разработан аналитический метод расчета монолитных обделок тоннелей круглого поперечного сечения, сооружаемых вблизи склонов [1]. В дальнейшем указанный метод был развит для случая, когда обделка напорного гидротехнического тоннеля представляет собой многослойную конструкцию. Разновидностями многослойных обделок могут быть железобетонные обделки (здесь отдельно выделяются слои бетона и арматуры), конструкции из чугунных или железобетонных тубингов (слои моделируют спинки и ребра тубингов, включая межреберное заполнение), обделки из набрызгбетона в сочетании с анкерами (при этом в качестве отдельного слоя выделяется зона грунта, укрепленного анкерами). В данной работе рассматривается случай, когда дополнительным слоем из другого материала моделируется зона, создаваемая путем укрепительной цементации.

Предлагаемый метод расчета основан на математическом моделировании взаимодействия многослойной обделки тоннеля, пройденного вблизи склона с окружающим массивом грунта и

базируется на новом аналитическом решении плоской задачи теории упругости, расчетная схема которой приведена на рис. 1.

Массив грунта (пород), механические свойства которого характеризуются модулем деформации  $E_0$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ , моделируется полубесконечной линейно-деформируемой средой  $S_0$ , ограниченной наклонной прямой  $L'_0$  ( $\beta$  - угол наклона к горизонтали), и круговым контуром  $L_0$  отверстия радиуса  $R_0$ , центр которого расположен на расстоянии  $H$  от прямой  $L'_0$ .

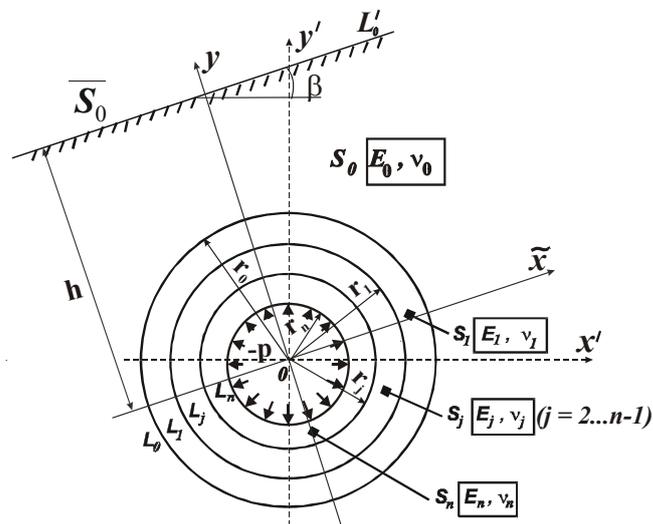


Рис. 1. Расчетная схема

Ось  $OX$  параллельна границе  $L'_0$  и проходит через центр отверстия. Многослойное кольцо, содержащее произвольное число  $n$  слоев  $S_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ) ограниченных контурами  $L_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ) радиусами соответственно  $R_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ), выполненных из материалов с деформационными характеристиками  $E_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ),  $\nu_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ), моделирует многослойную обделку. Наружный 1-й слой многослойного кольца, ограниченный контуром  $L_1$  радиуса  $R_1$  с деформационными характеристиками  $E_1$  и  $\nu_1$  моделирует зону укрепительной цементации. Слои  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и среда  $S_0$  деформируются совместно, то есть на линиях контакта  $L_j$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ) выполняются условия непрерывности векторов напряжений и смещений.

Действие внутреннего давления воды, заполняющей тоннель, моделируется действием на внутреннем контуре кольца  $L_n$  нормальной нагрузки  $-p$ , линейно изменяющейся по высоте

$$p = p_0 + \gamma_w(R_n - y') \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое характеризует величину внутреннего напора, а второе – вес воды, заполняющей тоннель ( $\gamma_w$  – удельный вес воды).

Поставленная задача решена с применением теории аналитических функций комплексного переменного, аппарата аналитического продолжения комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили через прямолинейную границу полуплоскости и комплексных потенциалов Лопана.

После введения комплексных потенциалов  $\tilde{\varphi}_j(z)$ ,  $\tilde{\psi}_j(z)$  ( $j = 0, \dots, n$ ), регулярных в соответствующих областях

$S_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ) и связанных с напряжениями и смещениями известными формулами Колосова-Мусхелишвили, сформулированная задача теории упругости сводится к краевой задаче теории аналитических функций комплексного переменного при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0(t) + \overline{t\tilde{\varphi}'_0(t)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t)} &= 0 \text{ на } L'_0 \\ \tilde{\varphi}_{j+1}(t) + \overline{t\tilde{\varphi}'_{j+1}(t)} + \overline{\tilde{\psi}_{j+1}(t)} &= \tilde{\varphi}_j(t) + \overline{t\tilde{\varphi}'_j(t)} + \overline{\tilde{\psi}_j(t)} \\ \text{на } L_j \quad (j = 0, \dots, n-1) \\ \alpha_{j+1}\tilde{\varphi}_{j+1}(t) - \overline{t\tilde{\varphi}'_{j+1}(t)} - \overline{\tilde{\psi}_{j+1}(t)} &= \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} [\alpha_j\tilde{\varphi}_j(t) - \overline{t\tilde{\varphi}'_j(t)} - \overline{\tilde{\psi}_j(t)}] \\ \tilde{\varphi}_n(t) + \overline{t\tilde{\varphi}'_n(t)} + \overline{\tilde{\psi}_n(t)} = f(t) \text{ на } L_n, \end{aligned}$$

где

$$f(t) = \frac{\gamma_w R_n^2}{2} \left( \begin{array}{l} -\frac{2p_0}{\gamma_w R_n} \sigma - 2\sigma + i \frac{e^{-i\beta}}{2} \ln \sigma - \\ -i \frac{e^{i\beta}}{2} \sigma^2 \end{array} \right),$$

$\sigma = e^{i\theta}$  – точка единичной окружности.

Для решения поставленной контактной задачи используем предложенное И.Г. Арамановичем [4] на основе развития метода Д.И. Шермана аналитическое продолжение комплексных потенциалов  $\tilde{\varphi}_0(z)$ ,  $\tilde{\psi}_0(z)$ , регулярных в области  $S_0$  (нижняя полуплоскость с круговым отверстием), в верхнюю полуплоскость  $\tilde{S}_0$  через прямолинейную границу  $L'_0$ . Это позволяет свести решение рассматриваемой задачи к итерационному процессу, при котором в каждом приближении решается задача для многослойного кольца, подкрепляющего отверстие в полной плоскости

$\tilde{S}_0 + \tilde{S}'_0$ , при граничных условиях, содержащих некоторые дополнительные члены, отражающие влияние наклонной границы  $L'_0$ , представленные в форме комплексных рядов Лорана, неизвестные коэффициенты которых отыскиваются на основе предыдущих приближений.

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_{j+1}(r_j\sigma) + r_j\sigma\overline{\tilde{\varphi}'_{j+1}(r_j\sigma)} + \overline{\tilde{\psi}_{j+1}} = \\ & = \tilde{\varphi}_j(r_j\sigma) + r_j\sigma\overline{\tilde{\varphi}'_j(r_j\sigma)} + \overline{\tilde{\psi}_j(r_j\sigma)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1\chi j)}\sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(3\chi j)}\sigma^k \\ & \mathfrak{a}_{j+1}\overline{\tilde{\varphi}_{j+1}(r_j\sigma)} - r_j\sigma\overline{\tilde{\varphi}'_{j+1}(r_j\sigma)} - \overline{\tilde{\psi}_{j+1}(r_j\sigma)} = \\ & = \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} \left[ \mathfrak{a}_j\overline{\tilde{\varphi}_j(r_j\sigma)} - r_j\sigma\overline{\tilde{\varphi}'_j(r_j\sigma)} - \overline{\tilde{\psi}_j(r_j\sigma)} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2\chi j)}\sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(4\chi j)}\sigma^k \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_n(r_n\sigma) + r_n\sigma\overline{\tilde{\varphi}'_n(r_n\sigma)} + \overline{\tilde{\psi}_n(r_n\sigma)} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1\chi n)}\sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(3\chi n)}\sigma^k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1\chi j)}\sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(3\chi j)}\sigma^k = \\ & = +i\bar{K}\sigma^2 \left( \frac{1}{1+\mathfrak{a}_{j+1}} - \frac{1}{1+\mathfrak{a}_j} \right) + \\ & + \lambda_{j,0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ C_k^{(3\chi 0)}r_j^k + \delta_{3,k}(k-2)\overline{C_k^{(3\chi 0)}r_j^{2-k}} \right] \sigma^k + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3\chi 0)}r_j^{k+2}} + \overline{C_k^{(4\chi 0)}r_j^k} \right] \sigma^{-k} \right\} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2\chi j)}\sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(4\chi j)}\sigma^k =$$

$$\begin{aligned} & = -i\bar{K}\sigma^2 \left( \frac{1}{1+\mathfrak{a}_{j+1}} - \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j(1+\mathfrak{a}_j)} \right) + \\ & + \lambda_{j,0} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}_j C_k^{(3\chi 0)}r_j^k - \right. \\ & \left. - \delta_{3,k}(k-2)\overline{C_k^{(3\chi 0)}r_j^{2-k}} \right\} \sigma^k - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3\chi 0)}r_j^{k+2}} + \overline{C_k^{(4\chi 0)}r_j^k} \right] \sigma^{-k} \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1\chi n)}\sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(3\chi n)}\sigma^k = \\ & = \bar{K} \left[ \left( \frac{i}{1+\mathfrak{a}_n} - \frac{e^{2i\beta}}{2} \right) \sigma^2 - 2 \left( \frac{p_0}{\gamma_w R_n} + 1 \right) \sigma e^{i\beta} \right] \end{aligned}$$

Отсюда коэффициенты  $L_k^{(l\chi j)}$  ( $l=1, \dots, 4$ ;  $j=0, 1, \dots, n$ ) находятся по следующим формулам

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1\chi j)} = \\ & = \lambda_{j,0} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3\chi 0)}r_j^{k+2}} + \overline{C_k^{(4\chi 0)}r_j^k} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2\chi j)}\sigma^{-k} = \\ & = -\lambda_{j,0} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3\chi 0)}r_j^{k+2}} + \overline{C_k^{(4\chi 0)}r_j^k} \right] \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(3\chi j)} = \lambda_{k,2} i\bar{K} \left( \frac{1}{1+\mathfrak{a}_{j+1}} - \frac{1}{1+\mathfrak{a}_j} \right) + \quad (5)$$

$$+ \lambda_{j,0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (k+2)\overline{C_{k+2}^{(3\chi 0)}r_j^{k+2}} + \overline{C_k^{(4\chi 0)}r_j^k} \right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(4\chi j)} = -\lambda_{k,2} i\bar{K} \left( \frac{1}{1+\mathfrak{a}_{j+1}} - \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j(1+\mathfrak{a}_j)} \right) +$$

$$+ \lambda_{j,0} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \mathfrak{a}_j C_k^{(3\chi 0)}r_j^k - \delta_{3,k}(k-2)\overline{C_k^{(3\chi 0)}r_j^{2-k}} \right] \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1\chi n)} = 0$$

$$L_1^{(3)\chi(n)} = -2\bar{K} \left( \frac{p_0}{\gamma_w R_n} + 1 \right) e^{-i\beta};$$

$$L_2^{(3)\chi(n)} = \bar{K} \left( \frac{i}{1 + \alpha_n} - \frac{e^{2i\beta}}{2} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(3)\chi(n)} = 0, \quad (k = 3, 4, 5, \dots, \infty)$$

Входящие в формулы (5) коэффициенты  $C_k^{(l)\chi(0)}$  ( $l = 3, 4; k = 1 \dots \infty$ )

имеют вид

$$\begin{aligned} C_k^{(3)\chi(0)} &= c_k^{(3)\chi(0)} + \tilde{c}_k^{(3)\chi(0)} \\ C_k^{(4)\chi(0)} &= c_k^{(4)\chi(0)} + \tilde{c}_k^{(4)\chi(0)} \end{aligned};$$

$$\tilde{c}_k^{(3)\chi(0)} = 2\alpha_0 i h \frac{p_k}{k},$$

$$\tilde{c}_k^{(4)\chi(0)} = 2i h \frac{p_k}{k}$$

$$c_k^{(3)\chi(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \delta_{0,k} n \overline{C_n^{(1)\chi(0)}} I_{k-1,n+1} - \overline{C_n^{(2)\chi(0)}} I_{k,n} \right]$$

$$c_k^{(4)\chi(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \delta_{0,k} n(n+1) \overline{C_n^{(1)\chi(0)}} I_{k-1,n+1} - \left[ (n+1) \overline{C_n^{(1)\chi(0)}} + n \overline{C_n^{(2)\chi(0)}} \right] I_{k,n} \right\rangle$$

В свою очередь, решение указанной задачи для многослойного кольца, подкрепляющего отверстие в полной плоскости, получено, следуя работе [3], с использованием рекуррентных соотношений, связывающих коэффициенты разложений в ряды комплексных потенциалов, регулярных в двух смежных областях. Это позволяет выразить коэффициенты разложений потенциалов, определяющих напряженное состояние внутреннего  $n$ -ого слоя кольца, через коэффициенты потенциалов, регулярных вне контура  $L_0$ . Подстановка полученных выражений в граничное условие на внутреннем контуре кольца позволяет придти к системе линейных алгебраических уравнений, которая, будучи соответственно укороченной, решается в каждом приближении относительно

неизвестных коэффициентов разложения комплексных потенциалов, характеризующих напряженное состояние области  $S_0$ .

После окончания итерационного процесса (когда отличие соответствующих искомым коэффициентов, полученных в двух последующих приближениях, не превышает заранее заданной малой величины  $\varepsilon = 10^{-7}$ ), с использованием упомянутых выше рекуррентных соотношений вычисляются коэффициенты разложений в ряды остальных потенциалов, а по формулам И.Г. Арамановича и Колосова-Мухелишвили – напряжения в областях  $S_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ), моделирующих полубесконечную среду ( $j=0$ ) и слои обделки.

Полученное решение реализовано в виде полного алгоритма расчета и компьютерной программы, позволяющей производить многовариантные расчеты.

Ниже рассмотрен пример расчета железобетонной обделки тоннеля, сооружаемого вблизи горного склона  $\beta = 15^\circ$  на действие внутреннего напора воды. Наружный слой данной двухслойной обделки, моделирует зону, создаваемую путем укрепительной цементации. Общая толщина обделки 0,7 м.

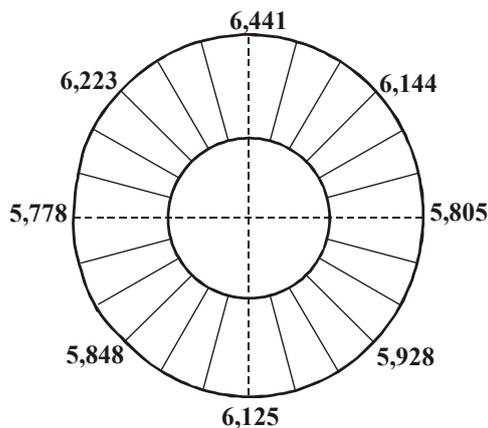
При расчете принимались следующие данные:

$$R_0 = 3 \text{ м}, R_1 = 2,5 \text{ м}, R_2 = 2,3 \text{ м},$$

$$E_1 = 300 \text{ МПа}, \nu_1 = 0,4,$$

$$E_2 = 30000 \text{ МПа}, \nu_2 = 0,2,$$

$H = 4,5 \text{ м}$ . Деформационные свойства массива горных пород характеризовались средними значениями модуля деформации  $E_0 = 40 \text{ МПа}$  и коэффициента Пуассона  $\nu_0 = 0,4$ .



Результаты расчета приведены на рис. 2

Для подтверждения достоверности полученных результатов разработанного метода произведено сравнение с результатами, полученными при решении частных задач другими авторами [1, 3].

Рис. 2. Этюра нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_{\theta,extr}^{in}$  (в МПа), действующих на внутреннем контуре железобетонной обделки тоннеля, пройденного вблизи склона, при наличии зоны укрепительной цементации

Было получено полное совпадение результатов, полученных по указанному методу расчета, с результатами Л.Н. Анциферовой и Н.Н. Корнеевой, что говорит о возможности применения разработанного метода при проектировании

многослойных обделок напорных тоннелей мелкого заложения, сооружаемых вблизи склонов с применением инъекционного укрепления пород.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнеева Н.Н. Напряженное состояние кольца, подкрепляющего отверстие в весомай полуплоскости с наклонной границей// Современные проблемы математики, механики, информатики: Тез.док. 15 – 17 февраля 2000 г. – Тула, 2000. – С. 82-83.

2. Фотиева Н.Н., Саммаль А.С., Булычев Н.С. Оценка влияния возведения здания на несущую способность и долговечность обделки канализационного тоннеля. //Известия Тульского государственного университета. Серия «Геомеханика. Механика подземных сооруже-

ний», выпуск 1/2003 г. – Тула, изд. ТулГУ, с. 295-302.

3. Фотиева Н.Н., Анциферова Л.Н. Расчет многослойных обделок тоннелей мелкого заложения// Механика подземных сооружений. Сб. науч. трудов. ТулГУ. – Тула. – 1997. – С. 9 – 25.

4. Араманович И.Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием // Докл. АН СССР. - М. - 1955. Т. 104. - №3. - С. 372-375. **ГИАБ**

#### Коротко об авторе

Князева С.В. – ГОУ ВПО «Тульский государственный университет», г. Тула.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 18 симпозиума «Неделя горняка-2007».  
Рецензент д-р техн. наук, проф. Б.А. Картозия.

