© В.Н. Кононенко, К.В. Халкечев, 2008

УДК 622.73:534.242

В.Н. Кононенко, К.В. Халкечев

РЕЗОНАНСНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ПРИ ДРОБЛЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД

Рассмотрены вопросы реализации и применения механизма резонансного разрушения открывающие новые возможности в разработке методов и средств дробления и измельчения горных пород и материалов.

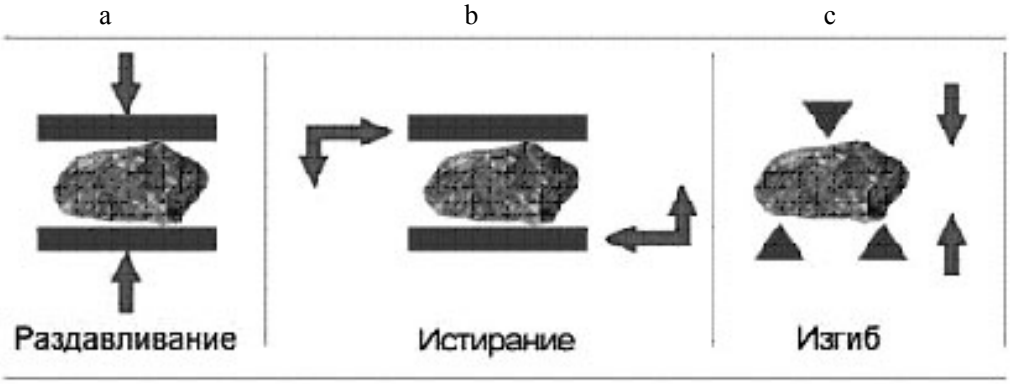
В условиях современного горного производства и обогащения полезных ископаемых, характеризующихся неуклонным ростом мощности предприятий, интенсификацией производственных процессов особо важное значение приобрела проблема дробления и измельчения горных пород и материалов.

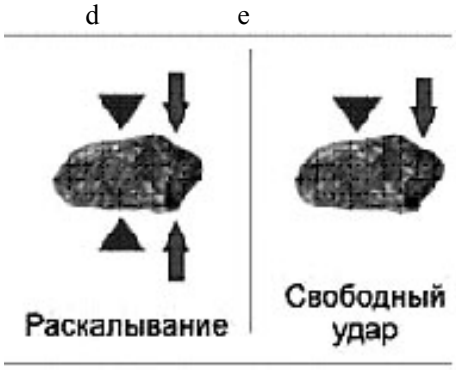
В основном применяют пять способов разрушения при дроблении и измельчения - раздавливание, истирание, изгиб, раскалывание и удар, которые схематически изображены на рисунке.

Обычно в дробильных машинах или мельницах, разрушение твердого тела происходит несколькими способами в результате комбинированного воздействия, но преобладающим является один или два способа. Механизм разрушения твердых тел вышеперечисленными способами достаточно хорошо изучен, однако, при дроблении материала часто возникает резонансный режим разрушения, приводящий к наиболее оптимальному способу разрушения.

Рассмотрим механизм возникновения резонансного разрушения при дроблении горных пород и материалов. Влияние ускорений точек упругого тела на напряжённое состояние дробимого материала может быть учтено следующим образом. Если какое-либо тело движется с ускорением, то это значит, что на него передаются (к нему приложены) силы (давления) от других тел; по закону равенства действия и противодействия оно передает на эти тела равные приложенным силам и противоположно направленные реакции, называемые силами инерции. Это рассуждение применимо также и к каждому элементу движущегося с ускорением тела; этот элемент будет передавать на прилегающие части материала усилия, равные силе инерции этого элемента.

Таким образом, при ускоренном движении возникают добавочные вполне реальные напряжения, которые эквивалентны статическим напряжениям, вызванным силами инерции; от каждого элемента дробимой частицы на соседние части материала будут передаваться такие напряжения, как будто бы к ней была приложена соответствующая сила инерции. Отсюда получаем практическое правило для определения напряжений в части упругого тела, точки которого испытывают ускорения: надо вычислить эти ускорения и в дополнение к внешним силам, действующим на рассматриваемый элемент, нагрузить его соответствующими силами инерции. Дальше следует вести расчёт так, как будто действует статическая нагрузка.





Различные способы дробления и измельчения: a - раздавливание; b - измельчение истиранием; c - изгиб; d - раскалывание; e - дробление ударом

Здесь надо различать три случая. Если величина и расположение внешних сил, приложенных к рассматриваемому элементу, не зависят от его деформаций, если эти деформации не изменяют характера движения тела, то ускорения его точек вычисляются по правилам кинематики твердого тела, и учёт динамических воздействий сводится к добавочной статической нагрузке соответствующими силами инерции. Это имеет место в большинстве практически важных случаев (за исключением удара).

Если при этом ускорение будет меняться, то, как правило, возникнут колебания рассматриваемой части упругого тела, которые могут в некоторых случаях дать явление резонанса, связанное с резким увеличением деформаций и напряжений. Эти напряжения могут достигать весьма большой величины и будут прибавляться к тем, которые учитываются путём введения в расчёт статической нагрузки силами инерции.

Наконец, могут быть случаи (удар), когда величина ускорений, а значит, и соответствующих сил инерции будет зависеть от деформируемости рассматриваемых элементов; в этом случае при вычислении сил инерции приходится использовать и данные сопротивления материалов.

Сила инерции будет вызывать напряжения и деформации, периодически меняющие свой знак. Это будут так называемые вынужденные колебания. Если период вынужденных колебаний совпадет с периодом свободных колебаний упругого тела, то мы получим явление резонанса, при котором амплитуда (размах) колебаний будет резко расти с течением времени. Наличие сил трения,

сопротивление воздуха и т. д. ограничивают на практике рост этой амплитуды; однако она может достичь очень большой величины, значительно превышающей те деформации, которые испытывало бы тело под действием ускорений той же величины, но не меняющих знака.

Следовательно, явление резонанса, если оно длится некоторое время, а не сбивается немедленно по возникновении, ведет к постепенному росту деформаций и пропорциональных им напряжений, что может вызвать разрушение дробимой частицы.

Таким образом, реализация и применение механизма резонансного разрушения открывает новые возможности в разработке методов и средств дробления и измельчения горных пород и материалов и позволит вести эффективную и малоэнергозатратную технологию рудоподготовки для обогащения полезных ископаемых и производства строительных материалов. ГИАБ

Коротко об авторах

Кононенко В.Н. – кандидат технических наук, доцент кафедры кадастра и геоинженерии КубГТУ,
Халкечев К.В. – профессор, доктор физико-математических наук, Московский государственный горный университет.

Статья представлена Кубанским государственным технологическим университетом.

© В.Н. Кононенко, 2008

УДК 622.73:534.242

В.Н. Кононенко

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ, ИЗОТРОПНОЙ ДРОБИМОЙ ЧАСТИЦЫ В ВИДЕ КУБА С ЖЁСТКО ОПЕРТЫМИ КРАЯМИ

Исследован резонансный механизм разрушения твердых тел в дробильном оборудовании.

Для исследования резонансного механизма разрушения твердых тел в дробильном оборудовании необходимо определить собственные частоты частиц измельчаемого материала. Представим измельчаемую частицу в виде куба со стороной а и с жёстко опертыми краями.

Задача может быть решена приближённо методом Ритца.

Обозначим плотность ρ, модуль Юнга E, коэффициент Пуассона ν. Вектор смещений имеет координаты $\vec{u}=\{u,v,w\}$. Основную собственную частоту в данном случае одинаково определяют как продольные, так и поперечные колебания.

Первоначально рассмотрим граничные условия: вся внешняя поверхность куба жёстко оперта, т.е. смещения на границе нулевые. Из разложения в ряд Фурье амплитуды: $\vec{\varphi}(\vec{x})=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\cdot\vec{f}_k(\vec{x})$ возьмём первое приближение для амплитуды низших собственных колебаний:

$$u := phiu_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

$$v := phiv_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

$$w := phiw_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right),$$

очевидно удовлетворяющее граничным условиям.

Потенциальная энергия:

$$\int_0^a\int_0^a\int_0^a V_0(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где удельная энергия деформации (в единице объёма):

$$V0 := \frac{1}{2}\nu E\left(\frac{phiu_{1,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}+\frac{phiv_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{phiw_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}\right)^2/((1+\nu)(1-2\nu))+E\left(\frac{phiu_{1,1,1}^2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2\pi^2\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)^2\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)^2}{a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{phiv_{1,1,1}^2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)^2\pi^2\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)^2}{a^2}+\frac{phiw_{1,1,1}^2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)^2\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)^2\pi^2}{a^2}\right)/(2+2\nu)+\frac{1}{2}E\left(\right.$$
$$\left(\frac{phiu_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}+\frac{phiv_{1,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\right)^2$$
$$+\left(\frac{phiu_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}+\frac{phiw_{1,1,1}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\pi\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\right)^2$$
$$\left.+\left(\frac{phiv_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\pi}{a}+\frac{phiw_{1,1,1}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\pi\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)}{a}\right)^2\right)/(2+2\nu).$$

Кинетическая энергия:

$$T := \frac{1}{2}\rho\int_0^a\int_0^a\int_0^a u2(x,y,z)+v2(x,y,z)+w2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где удельная кинетическая энергия равна сумме:

$$u2 := phiu_{1,1,1}{}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)^2$$

$$v2 := phiv_{1,1,1}{}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)^2$$

$$w2 := phiw_{1,1,1}{}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)^2 .$$

Тогда квадратичная форма $J(\varphi_0,...\varphi_N) = V(\varphi_0,...\varphi_N) - p^2 \cdot T(\varphi_0,...\varphi_N) \to \min$ для потенциальной и кинетической энергии примет вид:

$$J := \frac{1}{16}\frac{\pi^2 E\, a\, (-2\, phiw_{1,1,1}{}^2 + 3\,\nu\, phiw_{1,1,1}{}^2 - 2\, phiu_{1,1,1}{}^2 + 3\,\nu\, phiu_{1,1,1}{}^2 - 2\, phiv_{1,1,1}{}^2 + 3\,\nu\, phiv_{1,1,1}{}^2)}{-1 + \nu + 2\,\nu^2}$$
$$- \frac{1}{2} p2\, \rho \left(\frac{1}{8} a^3\, phiw_{1,1,1}{}^2 + \frac{1}{8} a^3\, phiu_{1,1,1}{}^2 + \frac{1}{8} a^3\, phiv_{1,1,1}{}^2\right),$$

откуда после нахождения минимума J вычисляется основная частота собственных колебаний куба с жёстко опертыми краями:

$$p := \frac{\pi \sqrt{-3\,\nu + 2}\, \sqrt{E}}{a \sqrt{\rho}\, \sqrt{1 - \nu - 2\,\nu^2}} . \qquad (1)$$

Для дробимой частицы железистого кварцита в виде куба с жестко опертыми краями при ν = 0,225 (среднее значение коэффициент Пуассона для железистых кварцитов) соотношение (1) существенно упрощается:

$$p := \frac{4.405634079\, \sqrt{E}}{a \sqrt{\rho}} . \qquad (2)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вибрации* в технике. Т.1: Колебания линейных систем. /Ред. В.В.Бо*лотин. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.*
2. *Вибрации* в технике. Т.3: Прочность, устойчивость, колебания. /Ред. И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1981. – 548с.
3. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Изд.ФМЛ, 1959. – 439с.
4. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532с.
5. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания в упругих телах. – М.: Наука, 1981. – 286 с.
6. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979
7. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – М.: Наука, 1968. – 503с.
8. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 933с.
9. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
10. *Прохоров Г.В.* Пакет символьных вычислений Maple V. - М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. ГИАБ

Коротко об авторе

Кононенко В.Н. – кандидат технических наук, доцент кафедры кадастра и геоинженерии КубГТУ,

Статья представлена Кубанским государственным технологическим университетом.

© В.Н. Кононенко, 2008

УДК 622.73:534.242

В.Н. Кононенко

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ, ИЗОТРОПНОЙ ДРОБИМОЙ ЧАСТИЦЫ В ВИДЕ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Проведен анализ влияния деформационных свойств железистых кварцитов на частоты собственных колебаний дробимой частицы.

Рассмотрим однородную, изотропную дробимую частицу в виде квадратной пластины со сторонами a и b, толщиной h. Граничные условия: края свободны, т.е. напряжения на краях равны нулю. Основную собственную частоту в данном случае определяют изгибные колебания.

Задача может быть решена приближённо методом Ритца.

Из разложения в ряд Фурье амплитуды: $\vec{\varphi}(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cdot \vec{f}_k(\vec{x})$ возьмём первое приближение для амплитуды низших собственных колебаний:

$$
\begin{aligned}
v0 := {} & \phi_{0,1,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)+\sinh\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)\right)+\phi_{0,2,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)+\sinh\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)\right)\\
& +\phi_{1,1,1}\left(\cos\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)+\cosh\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)+\cosh\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)\right)\\
& +\phi_{1,2,1}\left(\cos\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)+\cosh\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)+\sinh\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)\right)\\
& +\phi_{1,3,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)+\sinh\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)+\cosh\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)\right)\\
& +\phi_{1,4,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)+\sinh\left(\frac{4.730042\,x}{a}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)+\sinh\left(\frac{4.730042\,y}{a}\right)\right),
\end{aligned}
$$

удовлетворяющее граничным условиям.

Потенциальная энергия:

$$\int_0^b \int_0^a V_0(x, y)\, dx\, dy,$$

где удельная энергия деформации (в единице объёма):

$$
\begin{aligned}
V := {} & 0.1191897032\,10^{-18}\, h^3\, E\, (-0.1368247204\,10^{25}\, \nu\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,4,1} + 0.2892520921\,10^{25}\, \nu\, \phi_{1,1,1}\, \phi_{1,2,1} \\
& - 0.6149613710\,10^{23}\, \phi_{0,2,1}{}^2 - 0.8074507701\,10^{26}\, \phi_{1,3,1}{}^2 - 0.1584249974\,10^{27}\, \phi_{1,2,1}\, \phi_{1,4,1} \\
& - 0.1641133761\,10^{27}\, \phi_{1,1,1}\, \phi_{1,3,1} + 0.7273693752\,10^{19}\, \nu\, \phi_{1,2,1}\, \phi_{1,3,1} + 0.7273694093\,10^{19}\, \nu\, \phi_{1,1,1}\, \phi_{1,4,1} \\
& - 0.1446256854\,10^{25}\, \nu\, \phi_{1,1,1}\, \phi_{0,2,1} - 0.2278355194\,10^{25}\, \nu\, \phi_{1,4,1}{}^2 - 0.2317483246\,10^{25}\, \nu\, \phi_{1,3,1}\, \phi_{1,4,1} \\
& - 0.8368876246\,10^{26}\, \phi_{1,1,1}{}^2 - 0.1446256789\,10^{25}\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,1,1} - 0.1446925035\,10^{25}\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,2,1} \\
& + 0.2945866185\,10^{25}\, \nu\, \phi_{1,1,1}{}^2 - 0.1472013704\,10^{25}\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{1,2,1} - 0.4675666390\,10^{23}\, \nu\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{0,1,1} \\
& - 0.1446256854\,10^{25}\, \nu\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,1,1} - 0.6149613711\,10^{23}\, \phi_{0,1,1}{}^2 + 0.2892520921\,10^{25}\, \nu\, \phi_{1,1,1}\, \phi_{1,3,1} \\
& + 0.2417229679\,10^{24}\, \nu\, \phi_{1,3,1}{}^2 - 0.1472693850\,10^{25}\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,4,1} - 0.1442659754\,10^{25}\, \nu\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{1,3,1} \\
& - 0.2317483246\,10^{25}\, \nu\, \phi_{1,2,1}\, \phi_{1,4,1} - 0.1371658766\,10^{25}\, \nu\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{1,2,1} - 0.1609565379\,10^{27}\, \phi_{1,1,1}\, \phi_{1,4,1} \\
& - 0.1609565379\,10^{27}\, \phi_{1,3,1}\, \phi_{1,2,1} - 0.7798609403\,10^{26}\, \phi_{1,4,1}{}^2 + 0.2417229678\,10^{24}\, \nu\, \phi_{1,2,1}{}^2 \\
& - 0.1641133760\,10^{27}\, \phi_{1,1,1}\, \phi_{1,2,1} - 0.1371658766\,10^{25}\, \nu\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,3,1} - 0.8074507702\,10^{26}\, \phi_{1,2,1}{}^2 \\
& - 0.1584249974\,10^{27}\, \phi_{1,3,1}\, \phi_{1,4,1} - 0.1368247204\,10^{25}\, \nu\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{1,4,1} - 0.1472693851\,10^{25}\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{1,4,1} \\
& - 0.1446256789\,10^{25}\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{1,1,1} - 0.1446925035\,10^{25}\, \phi_{0,2,1}\, \phi_{1,3,1} - 0.1442659754\,10^{25}\, \nu\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,2,1} \\
& - 0.1472013704\,10^{25}\, \phi_{0,1,1}\, \phi_{1,3,1})\, /\, (a^2\, (-1. + \nu^2)) \quad .
\end{aligned}
$$

Кинетическая энергия:

$$T := \frac{1}{2}\, \rho\, h \int_0^a \int_0^b v2(x, y)\, dy\, dx \quad ,$$

где удельная кинетическая энергия:

$$
\begin{aligned}
v2 := {} & \left(\phi_{0,1,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right) + \sinh\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right)\right) + \phi_{0,2,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right) + \sinh\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right)\right)\right. \\
& + \phi_{1,1,1}\left(\cos\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right) + \cosh\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right) + \cosh\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right)\right) \\
& + \phi_{1,2,1}\left(\cos\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right) + \cosh\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right) + \sinh\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right)\right) \\
& + \phi_{1,3,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right) + \sinh\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right) + \cosh\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right)\right) \\
& \left. + \phi_{1,4,1}\left(\sin\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right) + \sinh\left(\frac{4.730042\, x}{a}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right) + \sinh\left(\frac{4.730042\, y}{a}\right)\right)\right)^2 \quad .
\end{aligned}
$$

Тогда квадратичная форма ($J(\varphi_0,...\varphi_N) = V(\varphi_0,...\varphi_N) - p^2 \cdot T(\varphi_0,...\varphi_N) \to \min$ для потенциальной и кинетической энергии примет вид:

$$
\begin{aligned}
J := {} & 0.1191897032\,10^{-18}\,h^3\,E\,(-0.1368247204\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,4,1} + 0.2892520921\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,2,1} \\
& - 0.6149613710\,10^{23}\,\phi_{0,2,1}{}^2 - 0.8074507701\,10^{26}\,\phi_{1,3,1}{}^2 - 0.1584249974\,10^{27}\,\phi_{1,2,1}\,\phi_{1,4,1} \\
& - 0.1641133761\,10^{27}\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,3,1} + 0.7273693752\,10^{19}\,\nu\,\phi_{1,2,1}\,\phi_{1,3,1} + 0.7273694093\,10^{19}\,\nu\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,4,1} \\
& - 0.1446256854\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{0,2,1} - 0.2278355194\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,4,1}{}^2 - 0.2317483246\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,3,1}\,\phi_{1,4,1} \\
& - 0.8368876246\,10^{26}\,\phi_{1,1,1}{}^2 - 0.1446256789\,10^{25}\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,1,1} - 0.1446925035\,10^{25}\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,2,1} \\
& + 0.2945866185\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1}{}^2 - 0.1472013704\,10^{25}\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,2,1} - 0.4675666390\,10^{23}\,\nu\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{0,1,1} \\
& - 0.1446256854\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,1,1} - 0.6149613711\,10^{23}\,\phi_{0,1,1}{}^2 + 0.2892520921\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,3,1} \\
& + 0.2417229679\,10^{24}\,\nu\,\phi_{1,3,1}{}^2 - 0.1472693850\,10^{25}\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,4,1} - 0.1442659754\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,3,1} \\
& - 0.2317483246\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,2,1}\,\phi_{1,4,1} - 0.1371658766\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,2,1} - 0.1609565379\,10^{27}\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,4,1} \\
& - 0.1609565379\,10^{27}\,\phi_{1,3,1}\,\phi_{1,2,1} - 0.7798609403\,10^{26}\,\phi_{1,4,1}{}^2 + 0.2417229678\,10^{24}\,\nu\,\phi_{1,2,1}{}^2 \\
& - 0.1641133760\,10^{27}\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,2,1} - 0.1371658766\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,3,1} - 0.8074507702\,10^{26}\,\phi_{1,2,1}{}^2 \\
& - 0.1584249974\,10^{27}\,\phi_{1,3,1}\,\phi_{1,4,1} - 0.1368247204\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,4,1} - 0.1472693851\,10^{25}\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,4,1} \\
& - 0.1446256789\,10^{25}\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,1,1} - 0.1446925035\,10^{25}\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,3,1} - 0.1442659754\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,2,1} \\
& - 0.1472013704\,10^{25}\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,3,1})\big/(a^2\,(-1.+\nu^2)) - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,h\,(215031.6394\,a^2\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,2,1} + 107429.0297\,a^2\,\phi_{1,2,1}{}^2 \\
& + 107895.1549\,a^2\,\phi_{1,1,1}{}^2 + 107429.0297\,\phi_{1,3,1}{}^2\,a^2 + 106964.9183\,\phi_{1,4,1}{}^2\,a^2 + 327.0549164\,a^2\,\phi_{0,1,1}{}^2 \\
& + 327.0549164\,\phi_{0,2,1}{}^2\,a^2 + 214275.6365\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 214275.6365\,\phi_{1,3,1}\,\phi_{1,2,1}\,a^2 + 7838.555471\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,2,1}\,a^2 \\
& + 214102.6667\,\phi_{1,2,1}\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 215031.6394\,\phi_{1,1,1}\,\phi_{1,3,1}\,a^2 + 7701.398456\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,1,1}\,a^2 \\
& + 7832.227952\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 7832.227954\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 7695.181655\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,3,1}\,a^2 \\
& + 214102.6667\,\phi_{1,3,1}\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 7695.181655\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,2,1}\,a^2 + 7838.555470\,\phi_{0,1,1}\,\phi_{1,3,1}\,a^2 \\
& + 286.7472610\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{0,1,1}\,a^2 + 7701.398454\,\phi_{0,2,1}\,\phi_{1,1,1}\,a^2)
\end{aligned}
$$

Для нахождения минимума J необходимо приравнять координаты градиента J нулю:

$$
\begin{aligned}
u1 := {} & 0.1191897032\,10^{-18}\,h^3\,E\,(-0.1368247204\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,4,1} - 0.1446256789\,10^{25}\,\phi_{1,1,1} - 0.1446925035\,10^{25}\,\phi_{1,2,1} \\
& - 0.4675666390\,10^{23}\,\nu\,\phi_{0,2,1} - 0.1446256854\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1} - 0.1229922742\,10^{24}\,\phi_{0,1,1} - 0.1472693850\,10^{25}\,\phi_{1,4,1} \\
& - 0.1371658766\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,3,1} - 0.1442659754\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,2,1} - 0.1472013704\,10^{25}\,\phi_{1,3,1})\big/(a^2\,(-1.+\nu^2)) - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,h\,(\\
& 654.1098328\,a^2\,\phi_{0,1,1} + 7701.398456\,\phi_{1,1,1}\,a^2 + 7832.227952\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 7695.181655\,\phi_{1,2,1}\,a^2 + 7838.555470\,\phi_{1,3,1}\,a^2 \\
& + 286.7472610\,\phi_{0,2,1}\,a^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u2 := {} & 0.1191897032\,10^{-18}\,h^3\,E\,(-0.1229922742\,10^{24}\,\phi_{0,2,1} - 0.1446256854\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1} - 0.1472013704\,10^{25}\,\phi_{1,2,1} \\
& - 0.4675666390\,10^{23}\,\nu\,\phi_{0,1,1} - 0.1442659754\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,3,1} - 0.1371658766\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,2,1} - 0.1368247204\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,4,1} \\
& - 0.1472693851\,10^{25}\,\phi_{1,4,1} - 0.1446256789\,10^{25}\,\phi_{1,1,1} - 0.1446925035\,10^{25}\,\phi_{1,3,1})\big/(a^2\,(-1.+\nu^2)) - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,h\,(\\
& 654.1098328\,\phi_{0,2,1}\,a^2 + 7838.555471\,\phi_{1,2,1}\,a^2 + 7832.227954\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 7695.181655\,\phi_{1,3,1}\,a^2 + 286.7472610\,a^2\,\phi_{0,1,1} \\
& + 7701.398454\,\phi_{1,1,1}\,a^2)
\end{aligned}
$$

$$u3 := 0.1191897032\,10^{-18}\,h^3\,E\,(0.2892520921\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,2,1} - 0.1641133761\,10^{27}\,\phi_{1,3,1} + 0.7273694093\,10^{19}\,\nu\,\phi_{1,4,1}$$
$$- 0.1446256854\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,2,1} - 0.1673775249\,10^{27}\,\phi_{1,1,1} - 0.1446256789\,10^{25}\,\phi_{0,1,1} + 0.5891732370\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1}$$
$$- 0.1446256854\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1} + 0.2892520921\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,3,1} - 0.1609565379\,10^{27}\,\phi_{1,4,1} - 0.1641133760\,10^{27}\,\phi_{1,2,1}$$
$$- 0.1446256789\,10^{25}\,\phi_{0,2,1})\,/\,(a^2\,(-1.+\nu^2)) - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,h\,(215031.6394\,\phi_{1,2,1}\,a^2 + 215790.3098\,\phi_{1,1,1}\,a^2$$
$$+ 214275.6365\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 215031.6394\,\phi_{1,3,1}\,a^2 + 7701.398456\,a^2\,\phi_{0,1,1} + 7701.398454\,\phi_{0,2,1}\,a^2)$$

$$u4 := 0.1191897032\,10^{-18}\,h^3\,E\,(0.2892520921\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1} - 0.1584249974\,10^{27}\,\phi_{1,4,1} + 0.7273693752\,10^{19}\,\nu\,\phi_{1,3,1}$$
$$- 0.1446925035\,10^{25}\,\phi_{0,1,1} - 0.1472013704\,10^{25}\,\phi_{0,2,1} - 0.2317483246\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,4,1} - 0.1371658766\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,2,1}$$
$$- 0.1609565379\,10^{27}\,\phi_{1,3,1} + 0.4834459356\,10^{24}\,\nu\,\phi_{1,2,1} - 0.1641133760\,10^{27}\,\phi_{1,1,1} - 0.1614901540\,10^{27}\,\phi_{1,2,1}$$
$$- 0.1442659754\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1})\,/\,(a^2\,(-1.+\nu^2)) - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,h\,(215031.6394\,\phi_{1,1,1}\,a^2 + 214858.0594\,\phi_{1,2,1}\,a^2$$
$$+ 214275.6365\,\phi_{1,3,1}\,a^2 + 7838.555471\,\phi_{0,2,1}\,a^2 + 214102.6667\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 7695.181655\,a^2\,\phi_{0,1,1})$$

$$u5 := 0.1191897032\,10^{-18}\,h^3\,E\,(-0.1614901540\,10^{27}\,\phi_{1,3,1} - 0.1641133761\,10^{27}\,\phi_{1,1,1} + 0.7273693752\,10^{19}\,\nu\,\phi_{1,2,1}$$
$$- 0.2317483246\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,4,1} + 0.2892520921\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,1,1} + 0.4834459358\,10^{24}\,\nu\,\phi_{1,3,1} - 0.1442659754\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,2,1}$$
$$- 0.1609565379\,10^{27}\,\phi_{1,2,1} - 0.1371658766\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1} - 0.1584249974\,10^{27}\,\phi_{1,4,1} - 0.1446925035\,10^{25}\,\phi_{0,2,1}$$
$$- 0.1472013704\,10^{25}\,\phi_{0,1,1})\,/\,(a^2\,(-1.+\nu^2)) - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,h\,(214858.0594\,\phi_{1,3,1}\,a^2 + 214275.6365\,\phi_{1,2,1}\,a^2$$
$$+ 215031.6394\,\phi_{1,1,1}\,a^2 + 7695.181655\,\phi_{0,2,1}\,a^2 + 214102.6667\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 7838.555470\,a^2\,\phi_{0,1,1})$$

$$u6 := 0.1191897032\,10^{-18}\,h^3\,E\,(-0.1368247204\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,1,1} - 0.1584249974\,10^{27}\,\phi_{1,2,1} + 0.7273694093\,10^{19}\,\nu\,\phi_{1,1,1}$$
$$- 0.4556710388\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,4,1} - 0.2317483246\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,3,1} - 0.1472693850\,10^{25}\,\phi_{0,1,1} - 0.2317483246\,10^{25}\,\nu\,\phi_{1,2,1}$$
$$- 0.1609565379\,10^{27}\,\phi_{1,1,1} - 0.1559721881\,10^{27}\,\phi_{1,4,1} - 0.1584249974\,10^{27}\,\phi_{1,3,1} - 0.1368247204\,10^{25}\,\nu\,\phi_{0,2,1}$$
$$- 0.1472693851\,10^{25}\,\phi_{0,2,1})\,/\,(a^2\,(-1.+\nu^2)) - \frac{1}{2}\,p2\,\rho\,h\,(213929.8366\,\phi_{1,4,1}\,a^2 + 214275.6365\,\phi_{1,1,1}\,a^2$$
$$+ 214102.6667\,\phi_{1,2,1}\,a^2 + 7832.227952\,a^2\,\phi_{0,1,1} + 7832.227954\,\phi_{0,2,}$$

,

что даёт однородную линейную алгебраическую систему уравнений с 6 неизвестными. Нетривиальное (ненулевое)

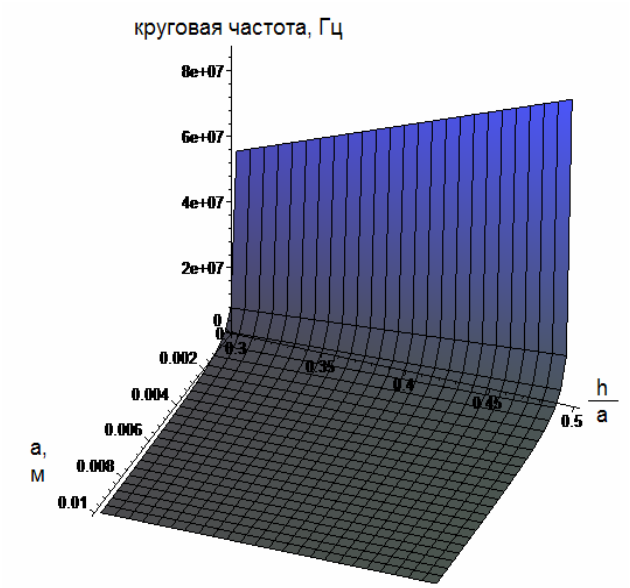
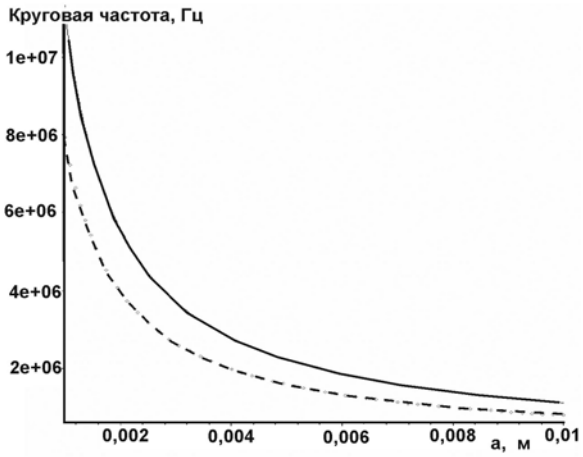


Рис. 1. Основная частота (=2π/период) собственных колебаний линейно упругой квадратной пластины (сторона a от 0.1 до 10 мм, толщина h) со свободными краями (форма колебаний с узловыми линиями, параллельными сторонам пластины) при средних значениях модуля Юнга, коэфф. Пуассона и плотности железистых кварцитов



решение этой системы существует при некоторых значениях p, минимальное из которых равно основной частоте собственных колебаний.

Определим собственные колебания дробимой частицы железистого кварцита в виде квадратной пластины (b = a)со свободными краями (плотность ρ = 3,3 г/см^3 ; модуль упругости E = 6,7·10^{10} Па; коэффициент Пуассона ν = 0,23):

$$p := 4.177433970 \sqrt{\frac{h^2 E}{a^4 \rho}} \quad (1)$$

Ранее было получено выражение для собственных колебаний однородной, изотропной дробимой частицы железистого кварцита в виде прямоугольной пластины со свободно опертыми краями:

$$p := 5.848173152 \sqrt{\frac{h^2 E}{a^4 \rho}} \quad (2)$$

Сравнение с (2) показывает, что при свободных

Рис. 2. Основная частота собственных колебаний линейно упругой квадратной пластины со свободными краями, при max и min значениях модуля Юнга, коэфф. Пуассона и плотности для железистых кварцитов, (принято h/a=1/2), сторона a от 1 до 10 мм

краях происходит снижение основного тона собственных колебаний.

Расчёты по (1) показаны на рис. 1 и рис. 2.

Для анализа влияния деформационных свойств железистых кварцитов на частоты собственных колебаний дробимой частицы проведен расчет представленный на рис. 2.

На рис. 2 принят следующий диапазон изменения упругих характеристик платины: от E_1=0,72•10^{11}; ρ_1=2700; ν_1=0,33, до E_2=0,52•10^{11}; ρ_2=3600; ν_2=0,22.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

11. *Вибрации* в технике. Т.1: Колебания линейных систем. /Ред. В.В.Болотин. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

12. *Вибрации* в технике. Т.3: Прочность, устойчивость, колебания. /Ред. И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1981. – 548 с.

13. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Изд.ФМЛ, 1959. – 439 с.

14. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.

15. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания в упругих телах. – М.: Наука, 1981. – 286 с.

16. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979.

17. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – М.: Наука, 1968. – 503 с.

18. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 933 с.

19. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

20. *Прохоров Г.В.* Пакет символьных вычислений Maple V. - М.: Изд.МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. ГИАБ

Коротко об авторе

Кононенко В.Н. – кандидат технических наук, доцент кафедры кадастра и геоинженерии КубГТУ,

Статья представлена Кубанским государственным технологическим университетом.