© Г.М. Редькин, 2007

УДК 622:001.891

Г.М. Редькин

ПРАКТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ СРЕДНЕГО СОДЕРЖАНИЯ В БЛОКЕ

Семинар № 2

Автором было установлено, что, переходя от стационарности по месторождению к стационарности по оцениваемому блоку ϑ, дисперсия среднего значения геологического показателя по этому блоку определяется равенством

$$\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right) = \sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right) - \left[\frac{\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right)}{\sigma}\right]^2, \qquad (1)$$

где

$$\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right) = \frac{1}{|\vartheta|^2}\int_\vartheta\int_\vartheta K(h)dxdy \qquad (2)$$

- дисперсия среднего содержания $\bar{c}_\vartheta$ по блоку ϑ относительно генерального среднего $\bar{c}$ по месторождению; $|\vartheta|$ - объем блока ϑ; $h = |x - y|$ - расстояние между точками x и y пространства недр; $K(h)$ - корреляционная функция, найденная по данным опробования всего месторождения; $\sigma^2 = K(0)$ - дисперсия значений геологического показателя по месторождению.

Таким образом, чтобы вычислить по формуле (1) дисперсию $\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right)$ среднего в блоке ϑ, необходимо по формуле (2) определить дисперсию $\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right)$, для чего надо иметь в аналитическом виде корреляционную функцию $K(h)$.

Корреляционную функцию можно выразить через собственную $\gamma(h)$

$$K(h) = \sigma^2 - \gamma(h). \qquad (3)$$

которую при изотропном размещении геологического показателя предложено аппроксимировать схемой де Вейса [1]

$$\gamma(h) = 3\alpha \ln h. \qquad (4)$$

Но, исходя из свойств логарифмической функции, получим $\gamma(0) = -\infty$, $\gamma(1) = 0$, $\gamma(\infty) = \infty$, что абсолютно не отвечает практике при $|h| < 1$ и $|h| >> 1$, т.к. $K_{\max}(0) = \sigma^2$ и $\lim\limits_{h\to\infty} K(h) = 0$. Схема де Вейса описывает связи между значениями показателя в какой то мере адекватно в диапазоне $1 < h < r$, где r - радиус корреляции. Хотя наиболее существенная информация о связях содержится именно в окрестности нуля $h = 0$ корреляционной функции.

Из проведенного анализа формулы (4) следует, что недостатки схемы де Вейса можно устранить, аппроксимируя экспериментальные значения корреляционной функции (3) выражением

$$K(h) = \sigma^2 - \alpha \ln\left(\frac{1}{\beta} + h\right) - \gamma, \qquad (5)$$

где α, β, γ - неизвестные параметры, которое удовлетворяет краевым условиям

$$K(0) = \sigma^2 \text{ и } K(r) = 0. \qquad (6)$$

Подставим условия (6) в выражение (5) и получим аппроксимирующую функцию

$$K(h)=\begin{cases}\sigma^2-\alpha\ln(1+\beta h), & h<r\\ 0, & h\ge r\end{cases}, \quad (7)$$

где $r=\left(e^{\sigma^2/\alpha}-1\right)/\beta$ - радиус корреляции, которая удовлетворяет всем свойствам корреляционных функций, включая краевые условия (6).

При этом α - линейный, а β - нелинейный параметры и геометрический смысл их следующий: параметр β при $\beta>1$ сжимает, а при $0<\beta<1$ растягивает график логарифмической функции вдоль оси $0h$; параметр α при $\alpha>1$ растягивает, а при $0<\alpha<1$ сжимает график логариф-мической функции вдоль оси $0K(h)$.

Определение параметров α и β функции (7) составляет содержание основной задачи теории аппроксимации [2], которая формулируется следующим образом.

Пусть по данным опробования определены экспериментальные значения корреляционной функции в зависимости от расстояния между пробами $(h_i;K_i)$, $i=1,2,...,n$ и имеется функция (7), зависящая от параметров α и β.

Требуется определить эти параметры так, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных значений от функций (7) была минимальной

$$S(\alpha;\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[K_i-\left(\sigma^2-\alpha\ln(1+\beta h_i)\right)\right]^2\to\min. \quad (8)$$

В связи с нелинейностью параметра β используем для минимизации суммы (8) вычислительную итерационную процедуру – метод дробления шага.

В качестве начального значения параметра β примем единицу, т.е. $\beta_0=1$. Положим $\beta=\beta_0=1$ в критерий (8) и в силу необходимого условия экстремума функций приравняем производную суммы (8) к нулю $\frac{d}{d\alpha}S(\alpha;1)=0$ и найдем начальное значение параметра α

$$\alpha_0=\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2-K_i)\ln(1+h_i)\Big/\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln^2(1+h_i) \quad (9)$$

Затем меняем начальное значение $\beta_0=1$ либо в сторону его увеличения $\beta_0=1<\beta_1<...<\beta_K<\beta_{K+1}$, либо в сторону уменьшения $\beta_0=1>\beta_1>...>\beta_K>\beta_{K+1}$ так, чтобы выполнялось условие монотонности критерия (8)

$$S(\alpha_0;\beta_0)>S(\alpha_1;\beta_1)>...>S(\alpha_K;\beta_K)>S(\alpha_{K+1};\beta_{K+1}),$$

при этом вычисляем каждый раз соответствующие значения параметра α по формуле

$$\alpha_K=\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2-K_i\right)\ln\left(1+\beta_K h_i\right)\Big/\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln^2\left(1+\beta_K h_i\right),\ K=1,2,... \quad (10)$$

Если на некотором шаге условие монотонности нарушается $S(\alpha_K;\beta_K)<S(\alpha_{K+1};\beta_{K+1})$, то дробим β до тех пор пока монотонность не восстановится. Остановкой итерационного процесса служит точность определения минимального значения суммы (8) и параметра β.

Ж. Матероном [1] введено понятие эквивалентных проб, блоков, в том числе и линейных эквивалентов. Отрезок l называется линейным эквивалентом

блока ϑ, если $\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right) = \sigma^2\left(\bar{c}_l \middle| \bar{c}\right)$. На основе данного определения им установлены приближенные линейные эквиваленты различных многоугольников и многогранников. В частности для прямоугольника со сторонами a и b $l = a + b$, а для параллелепипеда со сторонами $a \geq b \geq c$ $l = a + b + c/2$.

Таким образом любому оцениваемому блоку ϑ отвечает линейный эквивалент l и дисперсию (2) можно представить в виде

$$\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right) = \sigma^2\left(\bar{c}_l \middle| \bar{c}\right) = \frac{1}{l^2}\int_0^l\int_0^l K\left(|x-y|\right)dxdy \cdot \tag{11}$$

Подставим в формулу (11) корреляционную функцию (7) и получим дисперсию среднего в блоке относительно генерального среднего

$$\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right) = \begin{cases} \sigma^2 + \alpha - A(l)/l^2, \text{ при } 0 \leq l < r, \\ B/l - \left[A(r) + Br - \left(\sigma^2 + \alpha\right)r^2\right]/l^2, \\ \text{при } \quad r \leq l, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$A(l) = \frac{\alpha}{2\beta^2}\left[(1+\beta l)^2\left(2\ln(1+\beta l) - 1\right) + 1\right],$$

$$B = 2\left[\left(\sigma^2 + \alpha\right)r - \frac{\alpha}{\beta}(1+\beta r)\ln(1+\beta r)\right] \tag{13}$$

- выражения зависящие от параметров корреляционной функции (7).

Исследование функции (12), (13) свидетельствует о ее монотонном убывании между предельными значении

$\lim\limits_{l\to 0}\left(\sigma^2 + \alpha - A(l)/l^2\right) = \sigma^2$ и

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l^2}\left[\left(\sigma^2+\alpha\right)r^2 - A(r) + 2B(l-r)\right] = 0$$

Такое поведение дисперсии (12) согласуется с теорией стационарных случайных функций и подтверждает справедливость ее аналитического выражения (12), (13).

Положим выражения (12), (13) в равенство (1) и получим дисперсию среднего содержания по блоку ϑ относительно истинного среднего по этому блоку

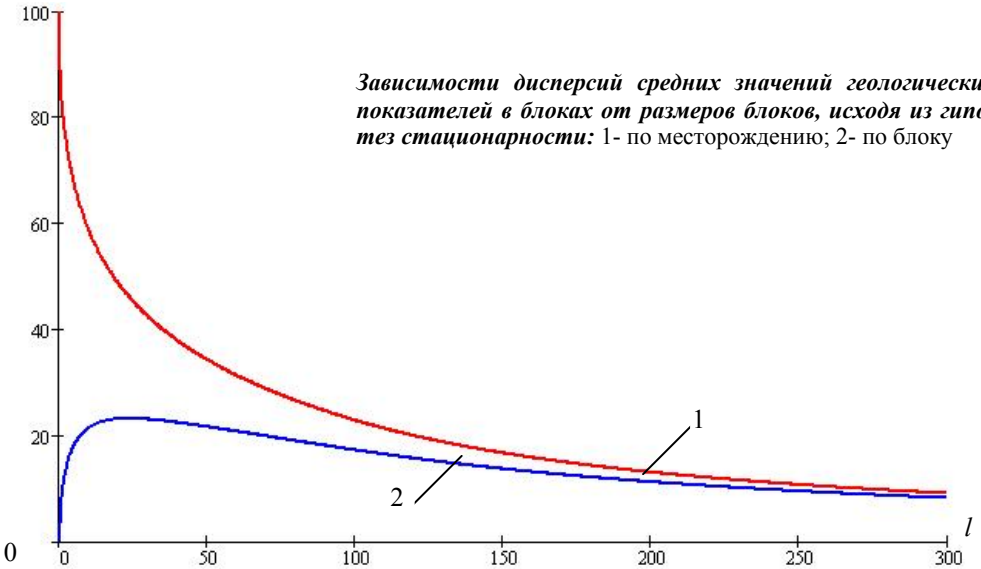
$$\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right) = \begin{cases} \dfrac{\left[\left(\sigma^2 + 2\alpha\right)l^2 - A(l)\right]\cdot A(l)}{\sigma^2 l^4} - \\ -\dfrac{\alpha\left(\sigma^2+\alpha\right)}{\sigma^2}, \\ \text{при } \quad 0 \leq l < r, \\ \dfrac{\left(\sigma^2 l^2 - Bl + c\right)\left(Bl - c\right)}{\sigma^2 l^4}, \\ \text{при } \quad r \leq l, \end{cases} \tag{14}$$

где $c = A(r) + Br - \left(\sigma^2 + \alpha\right)r^2$.

Для Ковдорского месторождения на основании содержаний железа по скважинам детальной и эксплуатационной разведки 12 горизонтов по разработанной методике (8), (9), (10) получены: параметры $\sigma^2 = 92{,}6\%\%$; α =17, 43 %%; β =2,35 1/м; $r = 86$ м, корреляционной функции (7)

$$K(l) = \begin{cases} 92{,}6 - 17{,}43\ln(1 + 2{,}35l), \\ \text{при } \quad 0 \leq l < 86 \\ 0, \quad \text{при } \quad 86 \leq l \end{cases} ; \tag{15}$$

формулы для определения соответственно дисперсий (12), (14)



Зависимости дисперсий средних значений геологических показателей в блоках от размеров блоков, исходя из гипотез стационарности: 1- по месторождению; 2- по блоку

$$\sigma^2\left(\bar{c}_l \middle| \bar{c}\right) = \begin{cases} 110 - \dfrac{1{,}58}{l^2}\left[(1+2{,}35l)^2 \times, \right. \\ \times\left(2\ln(1+2{,}35l) - 1\right) + 1\Big], \\ \text{при } 0 \le l < 86, \\ 2916/l - 63704/l^2, \\ \text{при } 86 \le l, \end{cases} \qquad (16)$$

$$\sigma^2\left(\bar{c}_l\right) = \begin{cases} \left[34{,}86l^2 - A(l)\right]A(l)/8575\,l^4 -, \\ -20{,}7 \quad \text{при } 0 \le l < 86 \\ \dfrac{(2916\,l - 63704)}{8575\,l^4} \times \\ \times\left(8575\,l^2 - 2916\,l + 63704\right), \\ \text{при } 86 \le l, \end{cases} \qquad (17)$$

Которым отвечают графики функций (см. рис.)

Используя теперь линейные эквиваленты блоков [1], можно по формуле (17) определить на Ковдорском месторождении дисперсии средних содержаний железа по блокам различной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матерон Ж.* Основы прикладной геостатики. – М.: Мир. 1968. -407 с.

2. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1970. -256 с. ГИАБ

Коротко об авторах

Редькин Г.М. – кандидат технических наук, доцент, зам. заведующего кафедрой прикладной математики, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.