© Г.М. Редькин, 2007

УДК 622:001.891.5622

Г.М. Редькин

ПОГРЕШНОСТЬ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ В БЛОКЕ

Семинар № 2

Использование теории случайных функций [1,2] при моделировании свойств месторождений полезных ископаемых предполагает принятие гипотез стационарности и эргодичности, т.е. возможность замены одной реализацией множества реализаций случайной функции при определении математического ожидания

$$Mf(x) = \bar{c} = const \qquad (1)$$

и корреляционной функции

$$K(x, y) = K(|x - y|), \qquad (2)$$

зависящей только от расстояния $h = |x - y|$ между точками x и y пространства недр.

При этом дисперсию среднего значения $\bar{c}_\vartheta$ в оцениваемом блоке ϑ относительно генерального среднего $\bar{c}$ (1) по месторождению определяют по формуле

$$\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right) = \frac{1}{|\vartheta|^2} \int_\vartheta \int_\vartheta K(h)\,dxdy, \qquad (3)$$

где $|\vartheta|$ - объем блока ϑ.

На основе теоремы о среднем предельное значение равенства (3) при $|\vartheta| \to 0$ будет равно

$$\lim_{|\vartheta| \to 0} \sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}\right) = \lim_{h' \to 0} \frac{K(h') \cdot |\vartheta|^2}{|\vartheta|^2} = K(0) = \sigma^2$$

$$0 < h' < h, \qquad (4)$$

где σ^2 - дисперсия значений данных опробования по всему месторождению.

Таким образом, из равенств (1) и (4) следует, что средние содержания $\bar{c}_\vartheta$ в оцениваемых блоках ϑ должны совпадать с генеральным средним $\bar{c}$, а дисперсии этих средних $\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right) = \sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta \middle| \bar{c}_\vartheta\right)$ должны стремиться к σ^2 при $|\vartheta| \to 0$, что на практике не находит подтверждения, т.к.

$$\bar{c}_\vartheta \neq \bar{c} \text{ и } \lim_{|\vartheta| \to 0} \sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right) = 0. \qquad (5)$$

Поэтому дисперсия (3), полученная на основе теории случайных функций, требует корректировки.

Уточним дисперсию среднего содержания геологического показателя в блоке $\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right)$ переходом от стационарности по месторождению к стационарности по блоку. Будем исходить из того, что геологический показатель размещен в пространстве недр с дисперсией данных опробования такой, как в оцениваемом блоке ϑ, и со связями между его значениями существующими на месторождении.

Тогда математическое ожидание и корреляционную функцию, отвечающие такому пространственному размещению показателя, выразим соответственно равенствами

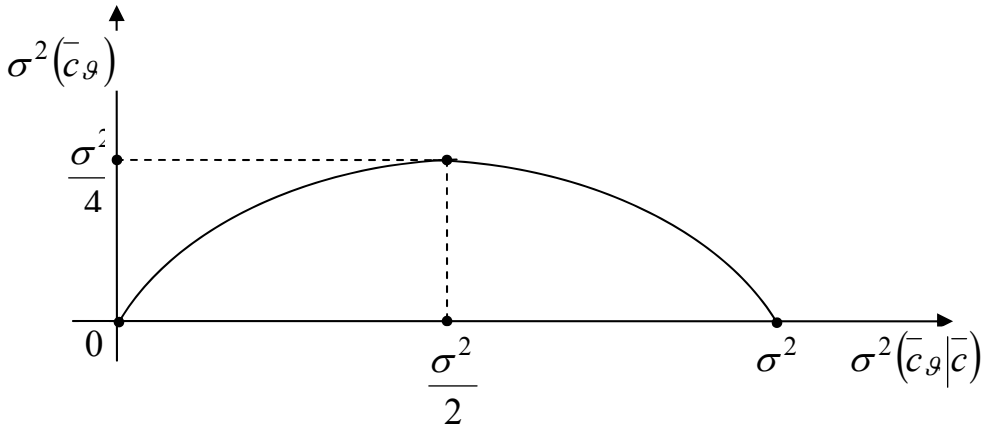

График зависимости дисперсии среднего значения по блоку от дисперсии $\sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c})$.

$$Mf(x) = \bar{c} = \bar{c}_\vartheta \quad \text{и} \quad K_\vartheta(h) = \frac{\sigma_\vartheta^2}{\sigma^2}K(h),$$

причем $K_\vartheta(0) = \sigma_\vartheta^2$, (6)

где σ_ϑ^2 - дисперсия данных опробования в блоке ϑ; а $K_\vartheta(h)$ - отражающая связи между значениями показателя по всему месторождению, перенормированная на стационарность по блоку ϑ корреляционная функция $K(h)$.

Подставим равенства (6) в формулу (3) и получим дисперсию среднего значения геологического показателя в блоке ϑ

$$\sigma^2(\bar{c}_\vartheta) = \sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c}_\vartheta) =$$

$$= \frac{\sigma_\vartheta^2}{\sigma^2|\vartheta|^2}\int_\vartheta\int_\vartheta K(h)dxdy = \frac{\sigma_\vartheta^2}{\sigma^2}\sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c}). \quad (7)$$

В математической статистике [3] известно соотношение, выражающие общую дисперсию через сумму внутригрупповой и межгрупповой дисперсий, которое в западной литературе названо формулой Крайга [1, 4]

$$\sigma^2 = \sigma_\vartheta^2 + \sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c}). \quad (8)$$

Разрешим равенство (8) относительно дисперсии значений по блоку σ_ϑ^2, подставим ее в равенство (7) и получим дисперсию среднего значения геологического показателя в блоке ϑ относительно его истинной средней по этому блоку

$$\sigma^2(\bar{c}_\vartheta) = \sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c}) - \left[\frac{\sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c})}{\sigma}\right]^2, \quad (9)$$

где $\left[\frac{\sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c})}{\sigma}\right]^2$ - поправка, полученная переходом от стационарности по месторождению к стационарности по блоку.

Формула (9) выражает дисперсию среднего в блоке ϑ через показатели $\sigma^2(\bar{c}_\vartheta|\bar{c})$, σ, определяемые по большому количеству данных опробования всего месторождения, которые по этой причине являются более достоверными чем

σ_ϑ^2 в формуле (7). В этом и заключается преимущество формулы (9) по сравнению с формулой (7).

Справедливость формулы (9) подтверждают ее предельные значения

$$\lim_{|\vartheta|\to 0}\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right)=0,\quad \lim_{|\vartheta|\to\infty}\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right)=0, \qquad (10)$$

которые получены при помощи равенств (4), (9) и согласуются с реальными представлениями о поведении данной дисперсии в зависимости от размеров блока ϑ.

Исследование зависимости (9) позволило определить ее области существования $D\left(\sigma^2\left(c_\vartheta\right)\right)=\left[0;\sigma^2\right]$ и изменения $E\left(\sigma^2\left(c_\vartheta\right)\right)=\left[0;\sigma^2/4\right]$. Кроме того зависимость (9) принимает в точке $\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta|\bar{c}\right)=\sigma^2/2$ максимальное значение $\sigma^2\left(\bar{c}_\vartheta\right)_{max}=\sigma^2/4$,обращена выпуклостью вверх и равна нулю на концах отрезка $\left[0;\sigma^2\right]$. Данным результатам исследования отвечает график зависимости (9) (см.рис.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. -576 с.
2. *Матерон Ж.* Основы прикладной геостастики. – М.: Мир, 1968. - 408 с.
3. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высшая школа, 1977. - 478 с.
4. *Давид М.* Геостатические методы при оценке запасов руд. – Л.: Недра, 1980. - 360 с.

ГИАБ

Коротко об авторах

Редькин Г.М. – кандидат технических наук, доцент, зам. зав. кафедры прикладной математики Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова.

Д И С С Е Р Т А Ц И И

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	*Название работы*	*Специальность*	*Ученая степень*
ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА УрО РАН			
ТЕРЕХИНА Юлия	Обоснование оптимальных параметров малых карьеров на предпроектной стадии оценки	25.00.21	к.т.н.

Валентиновна			