© С.Т. Штилькинд, 2006

УДК 622.272:

С.Т. Штилькинд

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ РАЗМЫВЕ ПОДЗЕМНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ В КАМЕННОЙ СОЛИ

Семинар № 14

Физическая постановка задачи

В массиве каменной соли имеется цилиндрическая выработка высоты H и диаметра D (рис. 1). В выработку опущены две соосные подвесные колонны. Внешняя подвесная колонна имеет диаметр D_{out}, а центральная подвесная колонна - D_{in}. Башмак внешней подвесной колонны расположен на глубине h_{out}, считая от потолочины выработки, а башмак центральной (внутренней) подвесной колонны – на глубине h_{in}.

В выработку подается вода с объемным расходом Q. Используются два режима подачи воды: противоточный (рис. 1, *а*), при котором вода закачивается по пространству между внутренней и внешней подвесной колоннами, и прямоточный (рис. 1, *б*), при котором вода поступает в выработку по центральной подвесной колонне.

Подача воды приводит к растворению боковой поверхности выработки - поверхности каменной соли. Свойства каменной соли считаются известными. Образующийся при растворении каменной соли рассол отбирается по центральной подвесной колонне в случае противоточного режима и по межтрубному пространству в случае прямоточного режима.

Необходимо рассчитать поле течения рассола и поле концентрации соли внутри выработки для двух режимов размыва (прямоток и противоток) при различных геометрических параметрах выработки, концентрацию выдаваемого рассола и расход рассола на выходе из выработки, а также скорость растворения поверхности каменной соли.

Исходные уравнения

Для описания течения в выработке используются ламинарные уравнения движения двухкомпонентной (соль+ вода) изотермической идеальной жидкости. Движение рассматривается в цилиндрических координатах (r, z) в области, показанной на рис. 2.

Задача рассматривается в безразмерных переменных. Для этого в качестве пространственного масштаба выбирается радиус выработки $R = \frac{D}{2}$, в качестве характерного времени – величина $\bar{t} = \frac{R^2 \rho_0}{\mu}$. Масштабом скорости в этом случае будет величина $\bar{v} = \frac{R}{\bar{t}} = \frac{\mu}{R\rho_0}$. В качестве масштаба плотности рассола выбирается плотность воды ρ_0, концентрации соли – концентрация соли в насыщенном рассоле a_n, давления – величина $\rho_0 \bar{v}^2$.

Внутри области используется следующая система уравнений:

- уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

- уравнение баланса импульса для r-компоненты импульса

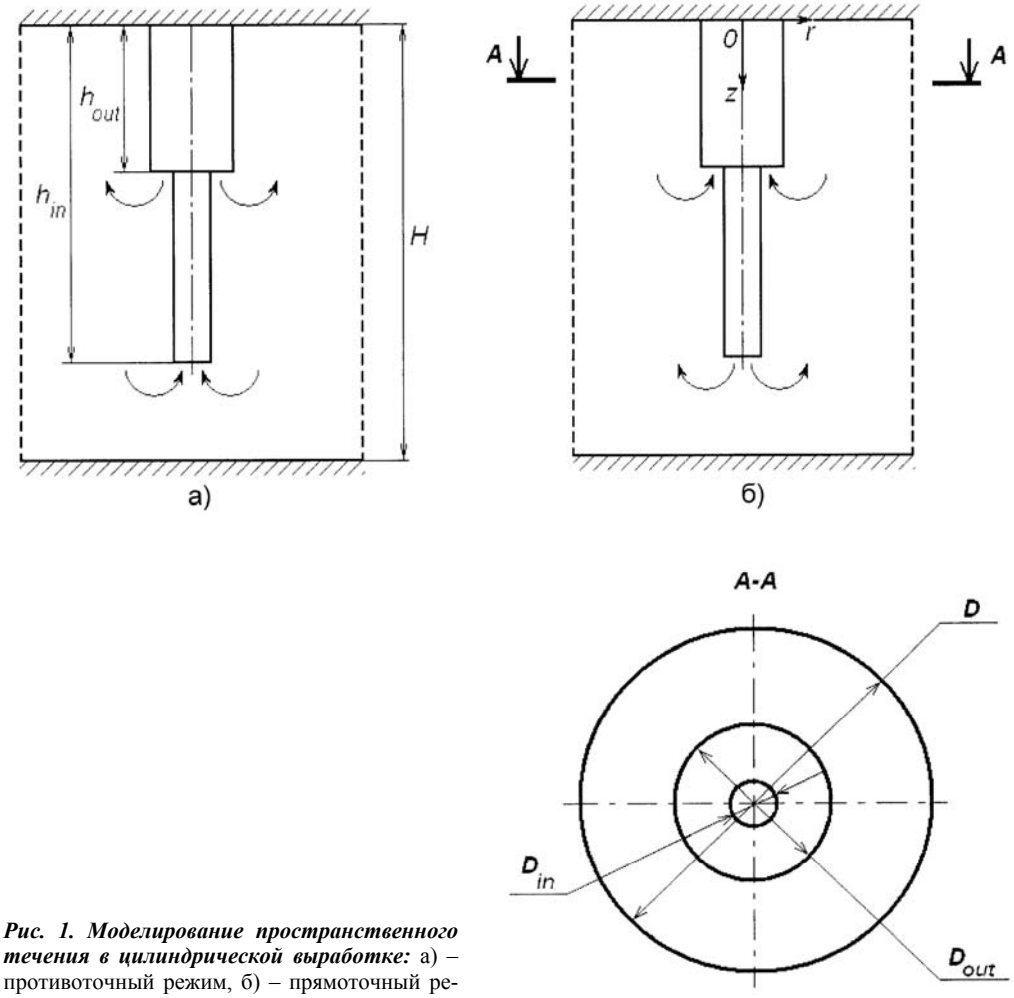

Рис. 1. Моделирование пространственного течения в цилиндрической выработке: а) – противоточный режим, б) – прямоточный режим

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(ru^2\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(vu\right)}{\partial z}\right)+\frac{\partial P}{\partial r}=$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

для z-компоненты импульса

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(ruv\right)}{\partial r}+\frac{\partial v^2}{\partial z}\right)+\frac{\partial P}{\partial z}=$$
$$=\rho\cdot Gr+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

- уравнение баланса соли

$$\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rua\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(va\right)}{\partial z}=$$
$$=\frac{1}{Sh}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho D\frac{\partial c}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho D\frac{\partial c}{\partial z}\right)\right],$$

$$Gr=\frac{g\rho_0{}^2R^3}{\mu^2},\quad Sh=\frac{\mu}{\rho_0 D},$$

где u, v – компоненты скорости рассола в цилиндрических координатах (r,z) соответственно; ρ - плотность рассола; P -

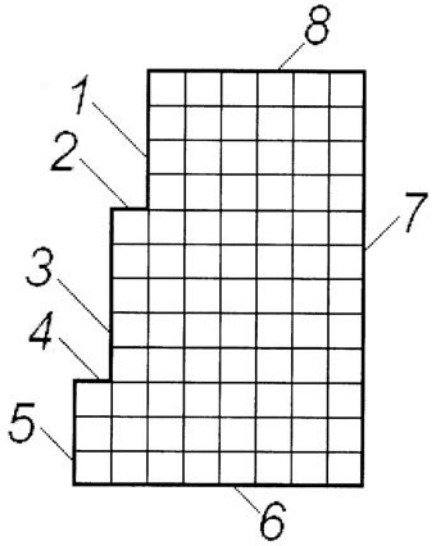

Рис. 2. Геометрия расчетной области: *1, 3* – поверхности подвесных колонн; *6* – дно выработки; *8* – потолочина выработки; *2, 4* – сечения подачи воды и отвода рассола; *5* – ось симметрии; *7* – поверхность растворения

давление; a - плотность соли; $c = \frac{a}{\rho}$ - относительная концентрация соли; μ - динамическая вязкость рассола; g - ускорение свободного падения; D - коэффициент диффузии соли в рассоле, Gr и Sh - числа Грасгофа и Шмидта.

Система дополняется уравнением состояния рассола в виде

$$\rho = \rho_0 + \frac{\rho_n - \rho_0}{a_n} a ,$$

где ρ_0 - плотность воды; ρ_n - плотность насыщенного рассола; a_n - плотность соли в насыщенном рассоле.

Граница расчетной области состоит из восьми различных участков (см. рис. 2), на которых ставятся следующие граничные условия:

- ось симметрии (граница 5, рис. 2) $r = 0$; $h_{in} \le z \le H$:

$$u = 0 , \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial a}{\partial r} = 0 .$$

- боковая поверхность внешней подвесной колонны (граница 1, рис. 2) $r = r_{out}$; $0 \le z \le h_{out}$:

$u = v = 0$ (условие прилипания), $\frac{\partial a}{\partial r} = 0$ (условие непротекания).

- боковая поверхность внутренней подвесной колонны (граница 3, рис. 2) $r = r_{in}$; $h_{out} \le z \le h_{in}$:

$$u = v = 0 , \frac{\partial a}{\partial r} = 0 .$$

- дно выработки (граница 6, рис. 2) $0 \le r \le R$; $z = H$:

$$u = v = 0 , \frac{\partial a}{\partial z} = 0 .$$

- потолочина выработки (граница 8, рис. 2) $r_{out} \le r \le R$; $z = 0$:

$$u = v = 0 , \frac{\partial a}{\partial z} = 0 .$$

- входная граница (граница 2 или 4, рис. 2):

$$u = 0 , \ v = v_{in} = \frac{S_k}{S_{in}} \mathrm{Re} , \ a = 0 , \ P = P_{in} ,$$

выходная граница (граница 2 или 4, рис. 2):

$$u = 0 , \ v = v_{in} = \frac{Q}{S_{in}} ,$$

где $\mathrm{Re} = \frac{R \rho_0 Q}{\mu \cdot S_k}$ - число Рейнольдса, $S_k = \pi R^2$,

$$S_{in} = \begin{cases} \pi \cdot \left(r_{out}^2 - r_{in}^2 \right), \ 0 \le r \le r_{in}; \ z = z_{in}; \\ \pi \cdot r_{in}^2, \ r_{in} \le r \le r_{out}; \ z = z_{out}; \end{cases}$$ -

случаи противотока и прямотока соответственно;

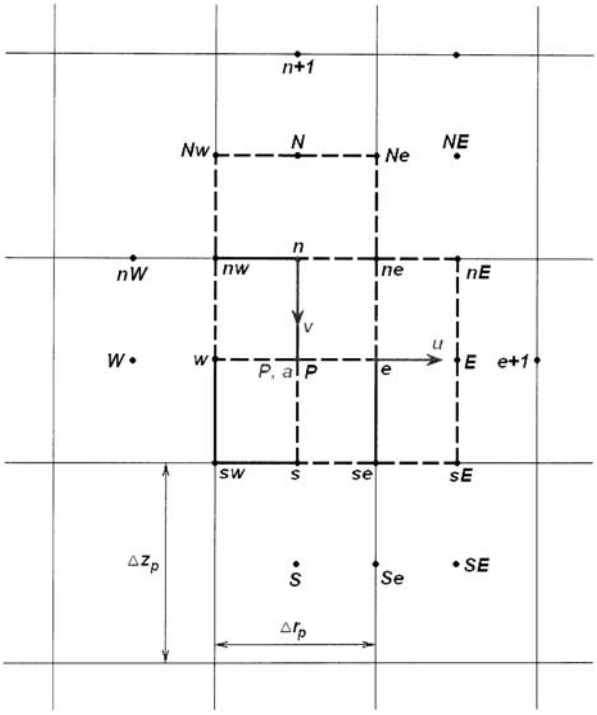

Рис. 3. Шаблоны используемых разностных схем: (nw-ne-se-sw) – контрольный объем для давления и концентрации соли (объем ячейки), (s-n-nE-sE) –контрольный объем для радиальной компоненты скорости, (w-Nw-Ne-e)- контрольный объем для вертикальной компоненты скорости

- поверхность растворяющейся соли (граница 7 рис.2) $r = R$; $0 \le z \le H$:

$a = a_n$, $v = 0$, $u = \beta \cdot w$,

$$\beta = 1 - \frac{\left(\rho_0 + a_n - \rho_n\right)\rho_s}{a_n \cdot \rho_0},$$

$$w = \frac{\rho_0}{\rho_s\left(\rho_n - a_n\right)} \rho D \frac{\partial c}{\partial r}.$$

Методика численного решения

Поставленная задача решается численно. Внутри области (рис. 2) вводится трехмерная сетка с шагом (Δr , Δz) по пространству и $\Delta\tau$ по времени. Давление и плотность соли представляются их значениями в центре ячейки, а компоненты вектора скорости – значениями в центрах соответствующих контрольных объемов (рис. 3).

Исходные уравнения интегрируются по контрольным объемам для каждой переменной. Контрольные объемы для давления и концентрации соли совпадают с объемами разностных ячеек, а контрольные объемы для компонент скорости сдвинуты относительно центров ячеек по направлениям скорости (см. рис. 3).

При аппроксимации пространственных производных на верхнем временном слое получается следующая система нелинейных уравнений:

- уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r_P}\frac{(ru)_e^{n+1} - (ru)_w^{n+1}}{\Delta r_P} + \frac{v_n^{n+1} - v_s^{n+1}}{\Delta z_P} = 0,$$

где Δr_P - расстояние между вертикальными границами ячейки, Δz_P - расстояние между горизонтальными границами ячейки, r_P - радиус центра ячейки (рис. 3).

- баланса импульса для r-компоненты импульса:

$$\rho_e\left(\frac{u_e^{n+1} - u_e^n}{\Delta\tau} + \frac{1}{r_e}\frac{ru_E^2 - ru_P^2}{\Delta r_e} + \frac{(uv)_{ne} - (uv)_{se}}{\Delta z_e}\right) + \frac{P_E^{n+1} - P_P^{n+1}}{\Delta r_e} = \frac{1}{r_e}\frac{(\mu r)_E \frac{(u_{e+1} - u_e)}{\Delta r_E} - (\mu r)_P \frac{(u_e - u_w)}{\Delta r_P}}{\Delta r_e} + \frac{(\mu)_{ne}\frac{(u_{Ne} - u_e)}{\Delta z_{ne}} - (\mu)_{se}\frac{(u_e - u_{Se})}{\Delta z_{se}}}{\Delta z_e},$$

для z-компоненты импульса:

$$\rho_n\left(\frac{v_n^{n+1}-v_n^n}{\Delta\tau}+\frac{1}{r_n}\frac{(ruv)_{ne}-(ruv)_{nw}}{\Delta r_n}+\right.$$

$$\left.+\frac{(v^2)_N-(v^2)_P}{\Delta z_n}\right)+\frac{P_N^{n+1}-P_P^{n+1}}{\Delta z_n}=$$

$$=\rho_n Gr+\frac{1}{r_P}\frac{(r\mu)_{ne}\frac{(v_{nE}-v_n)}{\Delta r_e}-(\mu r)_{nw}\frac{(v_n-v_{nW})}{\Delta r_w}}{\Delta r_P}+$$

$$+\frac{(\mu)_N\frac{(v_{n+1}-v_n)}{\Delta z_N}-(\mu)_P\frac{(v_n-v_s)}{\Delta z_P}}{\Delta z_n},$$

баланса соли для ячеек, не граничащих с поверхностью каменной соли:

$$\frac{a_P^{n+1}-a_P^n}{\Delta\tau}+\frac{1}{r_P}\frac{(rua)_e-(rua)_w}{\Delta r_P}+\frac{(va)_n-(va)_s}{\Delta z_P}=$$

$$=\frac{1}{Sh}\left[\frac{1}{r_P}\frac{(\rho_P Dr)_e\frac{(c_E-c_P)}{\Delta r_e}-(\rho_P Dr)_w\frac{(c_P-c_W)}{\Delta r_w}}{\Delta r_P}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\rho_n D)_n\frac{(c_N-c_P)}{\Delta z_n}-(\rho_n D)_s\frac{(c_P-c_S)}{\Delta z_s}}{\Delta z_P}\right],$$

для ячеек, граничащих с поверхностью каменной соли:

$$\frac{a_P^{n+1}-a_P^n}{\Delta\tau}+\frac{1}{r_P}\frac{\left(r_e\left[(u_e-w)a_e+w\cdot a_P^{n+1}\right]\right)-(rua)_w}{\Delta r_P}+$$

$$+\frac{(va)_n-(va)_s}{\Delta z_P}=$$

$$=\frac{1}{Sh}\left[\frac{1}{r_P}\frac{(\rho_P Dr)_e\frac{(c_E-c_P)}{\Delta r_e}-(\rho_P Dr)_w\frac{(c_P-c_W)}{\Delta r_w}}{\Delta r_P}+\right.$$

$$\left.=+\frac{(\rho_n D)_n\frac{(c_N-c_P)}{\Delta z_n}-(\rho_n D)_s\frac{(c_P-c_S)}{\Delta z_s}}{\Delta z_P}\right],$$

где r_e - радиус правой границы ячейки, r_n - радиус центра конечного объема, Δr_e, Δr_w, Δz_e, Δz_w - расстояние между центрами ячеек; Δr_n, Δz_n, Δr_P, Δz_P - расстояния между границами конечных объемов.

Построение решения на верхнем *(n+1)-м* временном слое строится итерационным образом. В качестве начального приближения выбирается значение на известном нижнем *n-м* временном слое. Все диффузионные и конвективные члены вычисляются на известной предыдущей *(k-1)-й* итерации. В результате исходная система уравнений для проведения *k-й* итерации записывается следующим образом:

- уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r_P}\frac{(ru^k)_e-(ru^k)_w}{\Delta r_P}+\frac{v_n^k-v_s^k}{\Delta z_P}=0,$$

- баланса импульса для r-компоненты импульса

$$\rho_e^{k-1}\frac{u_e^k-u_e^n}{\Delta\tau}+\frac{P_E^k-P_P^k}{\Delta r_e}=f_u,$$

$$f_u=\frac{1}{r_e}\frac{(\mu r)_E\frac{(u_{e+1}-u_e)}{\Delta r_E}-(\mu r)_P\frac{(u_e-u_w)}{\Delta r_P}}{\Delta r_e}+$$

$$+\frac{(\mu)_{ne}\frac{(u_{Ne}-u_e)}{\Delta z_{ne}}-(\mu)_{se}\frac{(u_e-u_{Se})}{\Delta z_{se}}}{\Delta z_e}-$$

$$-\rho_e\left(\frac{1}{r_e}\frac{ru_E^2-ru_P^2}{\Delta r_e}+\frac{(uv)_{ne}-(uv)_{se}}{\Delta z_e}\right),$$

для z-компоненты импульса

$$\rho_n^{k-1}\frac{v_n^k-v_n^n}{\Delta\tau}+\frac{P_N^k-P_P^k}{\Delta z_n}=f_v,$$

$$f_v=\rho_n g+\frac{1}{r_P}\frac{(r\mu)_{ne}\frac{(v_{nE}-v_n)}{\Delta r_e}-(\mu r)_{nw}\frac{(v_n-v_{nW})}{\Delta r_w}}{\Delta r_P}+$$

$$+\frac{(\mu)_N\frac{(v_{n+1}-v_n)}{\Delta z_N}-(\mu)_P\frac{(v_n-v_s)}{\Delta z_P}}{\Delta z_n}-$$

$$-\frac{1}{r_n}\frac{(ruv)_{ne}-(ruv)_{nw}}{\Delta r_n}-\frac{(v^2)_N-(v^2)_P}{\Delta z_n},$$

где f_u и f_v вычисляются на известной *(k-1)-й* итерации,

- баланса соли для ячеек, не граничащих с поверхностью каменной соли:

$$a_P^k = a_P^n + \\ +\Delta\tau\left(\frac{1}{r_P}\frac{(\rho_P Dr)_e\frac{(c_E-c_P)}{\Delta r_e}-(\rho_P Dr)_w\frac{(c_P-c_W)}{\Delta r_w}}{\Delta r_P}+\right. \\ +\frac{(\rho_n D)_n\frac{(c_N-c_P)}{\Delta z_n}-(\rho_n D)_s\frac{(c_P-c_S)}{\Delta z_s}}{\Delta z_P}- \\ \left.-\frac{1}{r_P}\frac{(rua)_e-(rua)_w}{\Delta r_P}-\frac{(va)_n-(va)_s}{\Delta z_P}\right), \quad (1)$$

для ячеек, граничащих с поверхностью каменной соли:

$$a_P^k = \frac{r_P\cdot\Delta r_P\cdot\Delta z_P}{(r_e w\Delta\tau + r_P\cdot\Delta r_P)\cdot\Delta z_P}a_P^n + \\ +\frac{((A+C)\cdot\Delta z_P+(B+D)\cdot r_P\cdot\Delta r_P)\Delta\tau}{(r_e w\Delta\tau + r_P\cdot\Delta r_P)\cdot\Delta z_P} \quad (2)$$

$$A = (rua)_w - r_e(u_e - w)a_e,$$

$$B = (va)_s - (va)_n,$$

$$C = (\rho_P Dr)_e\frac{(c_E-c_P)}{\Delta r_e}-(\rho_P Dr)_w\frac{(c_P-c_W)}{\Delta r_w},$$

$$D = (\rho_n D)_n\frac{(c_N-c_P)}{\Delta z_n}-(\rho_n D)_s\frac{(c_P-c_S)}{\Delta z_s}.$$

Таким образом, на очередной итерации необходимо решить систему линейных уравнений, содержащую три типа уравнений:

$$\frac{1}{r_P}\frac{(ru^k)_e-(ru^k)_w}{\Delta r_P}+\frac{v_n^k-v_s^k}{\Delta z_P}=0, \quad (3)$$

$$\rho_e^{k-1}\frac{u_e^k-u_e^n}{\Delta\tau}+\frac{P_E^k-P_P^k}{\Delta r_e}=f_u, \quad (4)$$

$$\rho_n^{k-1}\frac{v_n^k-v_n^n}{\Delta\tau}+\frac{P_N^k-P_P^k}{\Delta z_n}=f_v, \quad (5)$$

после чего явно определяется новое поле концентрации соли по уравнениям баланса соли.

Уравнения для компонент импульса всегда содержат 3 неизвестных: одну компоненту скорости и давления в двух соседних ячейках. Уравнение неразрывности может содержать 2, 3 или 4 неизвестных в зависимости от количества граней ячейки, приходящихся на границу исходной расчетной области. Четыре неизвестных соответствуют ячейкам, не касающимся границ. Три – ячейкам, одна из границ которых приходится на границу расчетной области, две – ячейкам с двумя границами.

Подстановка u^k и v^k из уравнений импульса (4) и (5) в уравнение неразрывности (3) приводит к скалярному уравнению относительно P^k вида

$$AP_P - BP_w - CP_E - DP_S - EP_N = F,$$

где

$$A = z_P\Delta\tau\left(\frac{r_e}{\Delta r_e\cdot\rho_e^{k-1}}+\frac{r_w}{\Delta r_w\cdot\rho_w^{k-1}}\right)+ \\ +r_P\Delta r_P\Delta\tau\left(\frac{1}{\Delta z_n\cdot\rho_n^{k-1}}+\frac{1}{\Delta z_s\cdot\rho_s^{k-1}}\right),$$

$$B = \frac{z_P r_w\Delta\tau}{\Delta r_w\cdot\rho_w^{k-1}},\quad C = \frac{z_P r_e\Delta\tau}{\Delta r_e\cdot\rho_e^{k-1}},$$

$$D = \frac{r_P\Delta r_P\Delta\tau}{\Delta z_s\cdot\rho_s^{k-1}},\quad E = \frac{r_P\Delta r_P\Delta\tau}{\Delta z_n\cdot\rho_n^{k-1}},$$

$$F = z_P\left[\frac{(f_{ue}\Delta\tau+\rho_e^{k-1}u_e^n)r_e}{\rho_e^{k-1}}-\right. \\ \left.-\frac{(f_{uw}\Delta\tau+\rho_w^{k-1}u_w^n)r_w}{\rho_w^{k-1}}\right]+ \\ +r_P\Delta r_P\left[\frac{f_{vn}\Delta\tau+\rho_n^{k-1}v_n^n}{\rho_n^{k-1}}+\frac{f_{vs}\Delta\tau+\rho_s^{k-1}v_s^n}{\rho_s^{k-1}}\right],$$

а индекс k для простоты опущен. Заметим, что $A = B + C + D + E$.

Численное решение системы разностных уравнений производится методом Гаусса.

После определения поля давления находятся компоненты скорости на следующей итерации, используя урав-нения (4) и (5).

Затем определяется поле концентрации по уравнению (1) или (2).

Итерации проводятся до выполнения условий:

$$\left|u^k - u^{k-1}\right| < \varepsilon_u, \quad \left|v^k - v^{k-1}\right| < \varepsilon_v,$$

$$\left|P^k - P^{k-1}\right| < \varepsilon_P, \left|a^k - a^{k-1}\right| < \varepsilon_a.$$

Аппроксимация конвективного потока (на примере $(va)_n$)

Конвективный поток величины φ (в данной задачи величины a, u или v) может аппроксимироваться с первым или вторым порядком точности в зависимости от гладкости решения. Если решение гладкое, то используется второй порядок аппроксимации, в противном случае – первый. Исследование на гладкость производится в окрестности данной точки в направлении нормали к грани, на которой берется конвективный поток. Распределение величины φ является гладким, если

- при $v_n \geq 0$

$(\varphi_N - \varphi_P)(\varphi_P - \varphi_S) > 0$ или

- при $v_n < 0$

$(\varphi_P - \varphi_N)(\varphi_N - \varphi_{N+1}) > 0$.

Первый порядок аппроксимации

При аппроксимации с первым порядком точности производится перенос искомой величины (a_n) по потоку:

- при $v_n \geq 0$ $(va)_n = v_n a_P$;
- при $v_n < 0$ $(va)_n = v_n a_N$.

Второй порядок аппроксимации

При гладком решении величина a_n рассчитывается следующим образом:

- если $v_n \geq 0$

$$a_n = a_P + VanLir(\varphi_S, \varphi_P, \varphi_N)\frac{\varphi_N - \varphi_P}{2};$$

- если $v_n < 0$

$$a_n = a_N + VanLir(\varphi_{N+1}, \varphi_N, \varphi_P)\frac{\varphi_P - \varphi_N}{2},$$

где $VanLir(\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C) = \dfrac{2x}{1+x}$,

$$x = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{\varphi_B - \varphi_A}.$$

Конвективная нелинейность выражений $(va)_n$ в разностных соотношениях линеаризуется путем вычисления скорости переноса (v) на известном нижнем временном слое, а неизвестной остается только переносимая полем скорости функция (a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994, 543 с.
2. *Каратыгин Е.П., Кубланов А.В., Пустыльников Л.М., Чанцев В.П.* Подземное растворение соляных залежей. – С. Петербург: Гидрометеоиздат, 1994, 222 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1988, 735 с.
4. *Мазуров В.А.* Подземные газонефтехранилища в отложениях каменной соли. – М.: Недра, 1982, 214 с.

Коротко об авторах

Штилькинд С.Т. – аспирант, кафедра «Строительство подземных сооружений и шахт», Московский государственный горный университет.