© В.И. Морозов, А.Б. Гончаров, А.Б. Тулинов, 2006

УДК 658.588.8

В.И. Морозов, А.Б. Гончаров, А.Б. Тулинов

ПРОГРЕССИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ ГОРНОГО И ОБОГАТИТЕЛЬНОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Семинар № 23

Отличительной особенностью горной промышленности от других областей является большая номенклатура эксплуатируемого механического оборудования. На карьерах и угольных разрезах эксплуатируются буровые станки, экскаваторы, бульдозеры, большегрузные автосамосвалы, ленточные конвейеры, насосы и другие виды машин и механизмов, на угольных шахтах и подземных рудниках – подъемные установки, вентиляторы, проходческие и очистные комбайны, механизированные крепи, скребковые и ленточные конвейеры и т. д.; на обогатительных фабриках – дробилки, конвейеры, грохоты, сепараторы, насосы, трубопроводный транспорт и т.д. Как правило, горные предприятия располагаются вдали от больших городов, а на их балансе находятся объекты жилищно-коммунального хозяйства, где проживают работники этих предприятий. Поэтому службе главного механика горного и обогатительного предприятия необходимо иметь набор методов ремонта эксплуатируемого оборудования.

Все методы ремонта условно можно разделить на два вида: методы ремонта, связанные с технологией ремонта, и методы ремонта, связанные с организацией ремонта. Оба метода взаимосвязаны и дополняют друг друга. Технология ремонта включает следующие процессы: демонтаж крупногабаритных агрегатов, узлов, металлоконструкций; разборка; очистка и мойка; дефектировка; восстановление деталей; сборка; наладка; испытание оборудования после ремонта.

Независимо от типа оборудования все многообразие деталей можно классифицировать. В соответствии с классификатором ЕСКД все детали можно разделить на группы по функциональному признаку: валы, оси, зубчатые колеса, цилиндры, штоки, рычаги, корпусные детали, пружины, крепеж и т. д. В каждой группе можно выделить подгруппы по размерам, материалам, из которого изготовлена деталь, по виду термообработки, по видам повреждений, полученных в процессе работы детали. Такая классификация позволяет подобрать для каждой подгруппы наиболее прогрессивную технологию восстановления деталей. Многочисленными исследованиями и практикой восстановления деталей установлено, что современные технологии ремонта позволяют восстановить утраченный ресурс. Себестоимость ремонта детали не превосходит стоимость новой (составляет 20-50 % от нее). Научно-произ-водственное предприятие ЗАО ММК «Мосинтраст» совместно с МГГУ разработали новые технологии восстановления деталей с нанесением металлополимерных покрытий «ПИКО М КЛИН», «ПИКО М ФРИК», «ПИКО М МИКРО», покрытия типа «Честер Молекуляр», эластомеры, анаэробные клеи, анаэробные материалы, анаэробные герметики, защитные покрытия типа «Протектор».

Используя покрытия типа «ПИКО», можно повысить износостойкость, коррозионную стойкость, обеспечить шероховатость порядка Ra = 3…13, компенсировать механический износ трущихся поверхностей, устранить эллипсность, бочкообраз-

ность, конусность, вогнутость, раковины у цилиндров, валов. В зависимости от размеров повреждения предварительно протачивают или растачивают восстанавливаемую поверхность, пескоструят для получения шероховатой поверхности, напыляют по технологии электродугового напыления, шлифуют и полируют по обычной технологии.

В таблице приведена область применения металлополимеров типа «Честер Молекуляр». Металлополимеры типа «Честер Молекуляр» - это двухкомпонентные композиционные материалы на основе эпоксидных смол с металлическими, волоконными и другими наполнителями.

Металлополимеры «Честер Молекуляр» обеспечивают высокое качество восстановления деталей за счет

- хорошей адгезии к стали, чугуну, цветным металлам, стеклу, древесине, бетону и пластмассам, за исключением тефлона и полиэтилена;
- способности отвердевать уже при температуре +5 °С;
- высокой стойкости против давления и вибрации, ударопрочности;
- хорошей стойкости против коррозии и эрозии в среде с повышенной влажностью и испаряемостью, стойкости против кавитации;
- высокой химической стойкости;
- отсутствия изменения объема в ходе схватывания;
- легкости смешивания Основы с Реагентом (благодаря контрастному цвету обоих компонентов – простота оптического контроля качества перемешивания)
- большего допуска перемешивания, хорошей зрительной оценки обоих компонентов, что обеспечивает получение полноценного материала;
- высокой термостойкости;
- хорошей эластичности, исключающей негативное влияние коэффициента расширения разных металлов;
- отсутствия токсичности, подтвержденного допуском к контакту с питьевой водой.

При восстановлении поврежденной поверхности, ее предварительно пескоструят или обрабатывают наждачной бумагой, делая эту поверхность шероховатой. Шероховатость способствует хорошей сцепляемости нанесенного композита с основным металлом детали. Подготовленную поверхность очищают и обезжиривают универсальным очистителем F3. Компоненты тщательно перемешивают до получения смеси однородного цвета. На поврежденную поверхность композит наносят шпателем или распылителем. В случае ремонта больших трещин или сколов композит усиливают стекловолокном. В дальнейшем восстановленную поверхность подвергают механической обработке. По такой же технологии наносят эластомеры.

Для устранения зазора, фиксаций и уплотнения таких соединений, как резьбовые, трубные соединения типа вал-втулка, вал-шестерка, посадочные места подшипников качания и скольжения, заливки микротрещин и микропор используют анаэробные клеи. Анаэробные клеи – это однокомпонентные материалы, которые содержат акриловые и сложные метакриловые эфиры и перекись водорода. Клей начинает полимеризоваться, когда между поверхностями прекращается доступ воздуха. Анаэробные клеи позволяют фиксировать соединения с различными степенями усилий (слабая, средняя, сильная, очень сильная фиксация), полностью герметизируют соединения, усиливают или заменяют механические соединения, увеличивают жесткость и прочность соединений, обеспечивают самоцентровку деталей, устраняют люфт соединений, исключают применение дополнительных фиксирующих элементов, защищают от коррозии, позволяют использовать различные материалы в сопрягаемых поверхностях, уменьшают требования к допускам и снижают себестоимость механической обработки, демпфируют вибрацию. Перед применением анаэробных клеев в качестве ремонтных материалов детали очищают от грязи и масла, высушивают. Перед употреблением флакон следует хорошо взболтать. Затем

Наименование	Применение
CHESTER METAL SUPER *CHESTER METAL RAPID* *CHESTER METAL SL* *CHESTER METAL SUPER FE*	Устранение течей в трубопроводах, контейнерах и пробитых корпусах (ёмкостях) Восстановление посадочных мест подшипников Восстановление изношенных штифтов подшипников качения Ремонт дефектов корпусов (трещины, сколы и т.д.), изготовленных из стали Восстановление разбитных шпоночных пазов
CHESTER METAL SUPER BR	Ремонт дефектов корпусов (трещины, сколы и т.д.), изготовленных из бронзы Ремонт поврежденных деталей и элементов, сделанных из сплава бронзы
CHESTER METAL SUPER AL	Ремонт поврежденных деталей и элементов, сделанных из алюминиевых сплавов Устранение дефектов алюминиевого литья
CHESTER METAL SUPER MS	Ремонт дефектов корпусов (трещины, сколы и т.д.) поврежденных деталей и элементов, изготовленных из меди, латуни Устранение дефектов литья
CHESTER METAL SLIDE E *CHESTER METAL SLIDE F*	Ремонт трущихся поверхностей шатунов, подшипников Ремонт поверхностей, работающих с уплотнительными кольцами Ремонт направляющих скольжения Исправление дефектов внутренних поверхностей гидроцилиндров
CHESTER METAL CERAMIC T *CHESTER METAL CERAMIC F* *CHESTER METAL CERAMIC FSL* *CHESTER METAL CERAMIC FNT*	Восстановление роторов и корпусов насосов Ремонт отработанных поверхностей клапанов и посадочных мест клапанов Восстановление элементов, подвергшихся коррозии и износу Восстановление металлокерамической поверхности деталей, валов, покрытий

нанести состав на несколько витков резьбы болта. Сразу после нанесения состава произвести монтаж. Время полной полимеризации – 24 часа. Начало эксплуатации возможно сразу после отверждения. Более сильную фиксацию обеспечивают анаэробные герметики за счет того, что они в своем составе содержат акриловые и метакриловые сложные эфиры и перекись водорода и позволяют вести уплотнения деталей при их сборке с зазором 0,6–0,8 мм.

Рассмотренные новые технологии восстановления деталей являются менее трудоемкими и более прогрессивными, чем существующие.

Коротко об авторах

Морозов В.И. – заведующий кафедрой «Технология художественной обработки материалов», Московский государственный горный университет.
Гончаров А.Б. – Московский государственный горный университет.
Тулинов А.Б. – ЗАО ММК «Мосинтраст».

© Ю.А. Павлов, В.И. Киреев, 2006

УДК 679.8.001.57

Ю.А. Павлов, В.И. Киреев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ ДЕТАЛЕЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ ИЗ ПРИРОДНОГО КАМНЯ

Семинар № 23

Поверхность является одним из типов геометрических моделей наряду с телами и так называемыми адаптивными формами, которые объединяют поверхностное и твердотельное моделирование. По определению, поверхность представляет собой границу двух полупространств, на которые она делит рабочее пространство. Математически поверхность определяется множеством точек, координаты которых находятся из системы параметрических векторных уравнений:

$$R = \bar{r}(t) = x(t)\bar{e}_1 + y(t)\bar{e}_2 + z(t)\bar{e}_3 , \qquad (1)$$

где $\bar{r} = \{x,y,z\}$ - радиус-вектор точки на кривой, а $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - орты координатных осей. При использовании криволинейной системы координат в качестве параметров обычно используются накопленные длины дуг, отнесенные к их общей длине. Тогда поверхность описывается параметрическими векторными уравнениями следующего вида:

$$X = x\ (U, V),\ Y = y\ (U, V),\ Z = z\ (U, V), \qquad (2)$$

где *U, V* – безразмерные параметры, изменяющиеся в диапазоне от *0* до *1*. Когда значение одного из параметров (*U* или *V*) постоянно, а значение другого изменяется, точка (*A*) находится на соответствующей изопараметрической кривой, образующей данную поверхность (рис. 1).

В компьютерных программах САПР поверхности обычно представлены множеством участков, разным образом соединяемых между собой для образования сложной, многоэлементной поверхности детали изделия.

Общая классификационная схема поверхностных моделей сложных изделий и их деталей показана на рис. 2.

Систематизация поверхностей предусматривает иерархический принцип

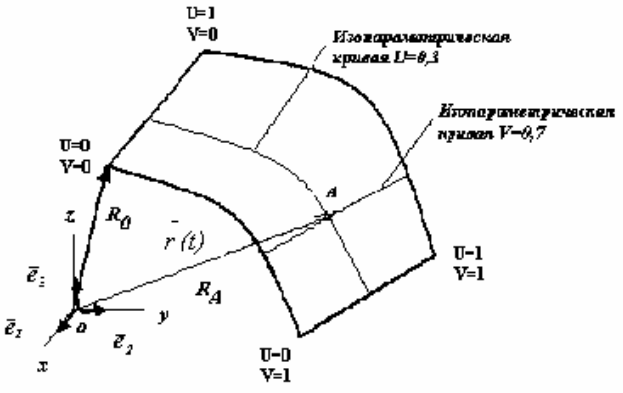


Рис. 1. Изопараметрические кривые, образующие поверхность

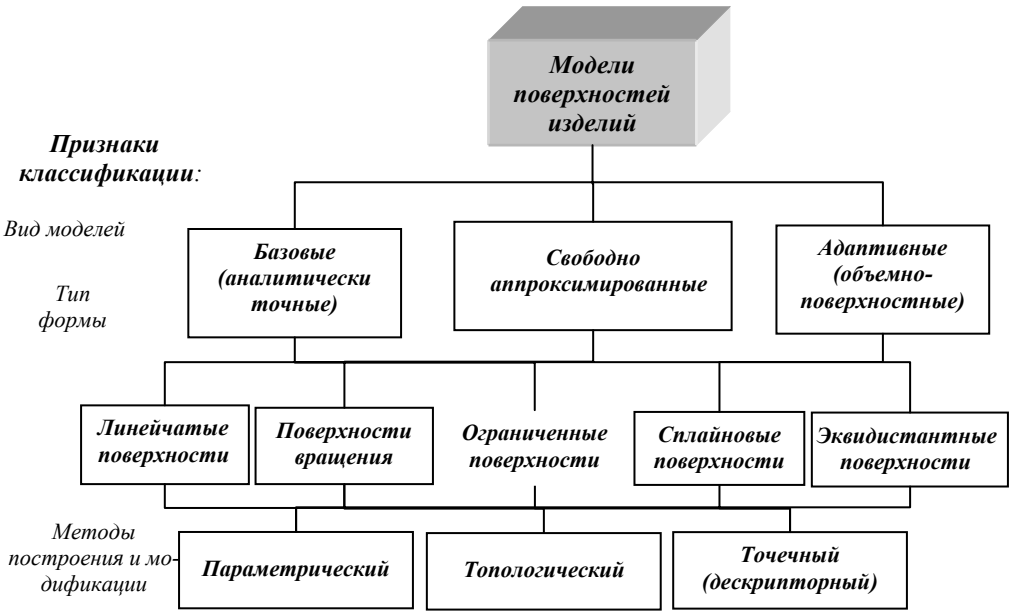


Рис. 2. Классификационная схема геометрического поверхностного моделирования деталей изделий

задания классификационных признаков, главными из которых являются: вид геометрических моделей; тип геометрической формы; метод построения (формообразования); метод модификации формы.

Различают три вида участков поверхностей - базовые (или аналитически точные), свободно аппроксимируемые, характеризуемые математическим способом их приближенного формообразования, и адаптивные – объемно-поверхностные. Деление участков поверхности на аналитически точные и аппроксимируемые не означает, что последние не могут быть точно изготовлены. Базовые поверхности состоят из линейчатых участков и поверхностей вращения. К линейчатым поверхностям можно отнести плоскость, конус, цилиндр и другие. Эти поверхности, в свою очередь, могут быть замкнутыми или разомкнутыми и являются развертывающимися. Линейчатые поверхности формируются при перемещении по определенному закону образующей прямой линии *G,* вдоль пространственной направляющей кривой – директрисы *C* (рис. 3).

В данном примере пространственная директриса *C* определяется векторным уравнением кривой $\bar{p} = \bar{x}(u)$, а образующая прямая *G* задана точкой (*F*) на этой кривой и вектором $\bar{v}g(u)$, зависящим от параметра *u*.Тогда линейчатая поверхность, образованная прямой линией *G*, описывается векторным уравнением:

$$\bar{r}(u,v) = \bar{x}(u) + \bar{v}g(u). \qquad (3)$$

Компьютерные модели поверхностей типовых геометрических фигур (параллелепипед, цилиндр, сфера, призма, конус, тор, правильный многогранник и другие) строятся на основе специальных генерирующих программ по заданным размерным параметрам. Геометрические модели таких поверхностей являются аналитическими. В отличие от твердых тел, характеризуемых историей их создания, они имеют единственное представление в структуре данных в виде массива параметров, не-

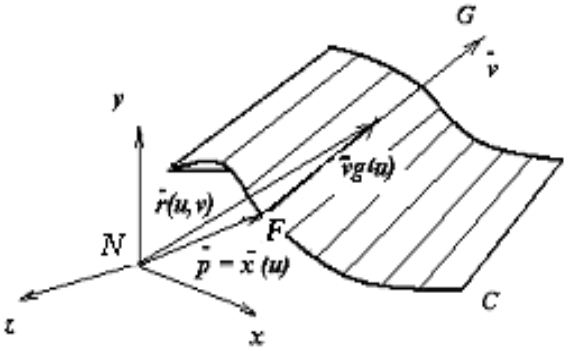


Рис. 3. Аналитическое определение линейчатой поверхности

обходимых для их построения. Точность расчета поверхностей регулируется коэффициентом полигона, т.е. характеризуется погрешностью их аппроксимации плоскими участками (треугольной или 4-угольной формы) при графическом построении.

Другой подход к формированию сложных поверхностей промышленных изделий основан на использовании математических методов их приближенного изображения – аппроксимации. Если число параметров, определяющих аппроксимирующую функцию, равно числу таблично заданных точек, то такая функция называется интерполирующей, а процесс ее определения и вычисления - интерполяцией.

Аппроксимация и интерполяция пространственных кривых и поверхностей проводятся с применением наиболее удобных базисных полиномов. Кривые и поверхности, полученные такими приближенными методами, называются свободными, аналитически не описываемыми геометрическими объектами. Такого рода кривые и поверхности преимущественно используются при описании сложных геометрических форм, в том числе в деталях и изделиях камнеобрабатывающих и ювелирных производств.

Форма не описываемых аналитически геометрических объектов обусловлена функциональными или эсте-тическими требованиями. Применение таких кривых и поверхностей можно объяснить следующими особенностями. Кривая и поверхность должны соответствовать определенным свойствам действительного объекта, например, проходить через заданные точки или исключать перегибы. При этом получение заданной формы геометрического объекта необходимо выполнить на станках с ЧПУ посредством интерполяции с использованием минимального количества параметров.

Аппроксимация геометрического объекта предполагает наличие некоторого множества параметров, часть которых является обязательной, а другие влияют на детализацию данного описания. Поэтому выбор параметров зависит от требуемой точности моделиро-вания формы изделия.

При построении образующих участки поверхностей пространственных кривых руководствуются следующими положениями:

- необходимо использовать ломаную характеристическую линию, называемую также дескриптором, которая в первом приближении передает форму кривой, при этом вершины этой ломаной могут и не принадлежать кривой;
- следует предусмотреть возможность локальных и глобальных изменений формы кривой за счет выбора ее параметров;
- кривая должна быть сегментируемой (кусочно-составной), в которой отдельные сегменты соединяются в соответствии с граничными условиями (например, заданной характеристики плавности сопряжений);
- увеличение числа сегментов кривой при повышении степени аппроксимирующего полинома не должно нарушать гладкость кривой, т.к. при этом повышается вероятность нежелательных экстре-

мумов, что приводит к появлению петель, а также точек перегиба, вызывающих так называемую осцилляцию кривой;

- для кривой желательна непрерывность не только ее аппроксимированной формы, но и производных первого и более высоких порядков в точках сопряжения сегментов.

Процесс создания сложных, полностью не заданных аналитически поверхностей изделий из камня базируется на следующих принципах:

- форма проектируемой поверхности изделия может быть произвольной и обычно разрабатывается дизайнером или конструктором;

- созданная форма, прежде всего, должна удовлетворять эстетическим критериям, а в некоторых случаях и функциональным требованиям;

- интерактивное конструирование кривых и поверхностей должно носить итерационный характер;

- модель, полученную на некотором шаге итерации, модифицируют и улучшают до тех пор, пока не будет достигнута желаемая форма кривой или поверхности;

- поверхности в большинстве случаев должны быть кусочно-гладкими, а разного рода нерегулярности и осцилляции должны находиться в пределах заданных допусков.

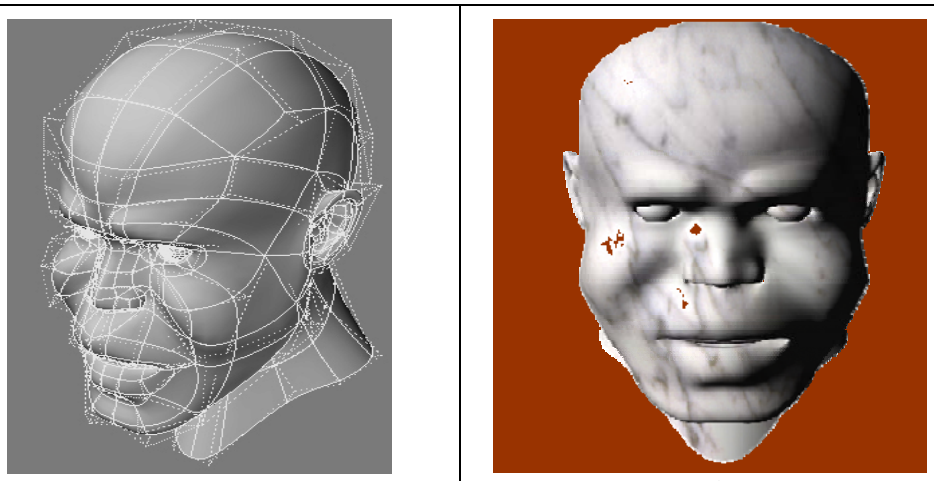
Кусочно-гладкой является дуга кривой с непрерывно изменяющимися касательными. Гладким участком поверхности является патч (patch) с непрерывно изменяющимися касательными плоскостями. Понятие "гладкий" включает также следующие дополнительные требования к аппроксимации:

- метод построения сегментов кривой и участков поверхности должен давать возможность определения точек перегиба образующей кривой;
- кривая или поверхность должны обладать малой осцилляцией, т.е. ограниченным числом точек перегиба.

Аналитически последнее требование означают, что кривые или поверхности должны быть многократно дифференцируемы, и их производные должны удовлетворять критериям непрерывности. В общем случае кривая или поверхность является C^n-непрерывной функцией $(n \geq 1)$, если ее n-я производная непрерывна на некотором интервале параметров $[a, b]$.

При свободном формообразовании поверхностей в современных компьютерных системах проектирования используются следующие типы аппроксимирующих их участков: патчи вращения, линейчатые, ограниченные и эквидистантные, сплайн-поверхности [2].

В последние годы широкое применение получил метод построения сложных поверхностей, названный NURBS (Non Uniform Rational B-Spline, т.е. неоднородный рациональный *B*-сплайн) [6]. Неоднородным он называется потому, что сопрягаемые области объектов NURBS (кривых или поверхностей) обладают различными свойствами (весами), значения которых не равны между собой. Рациональный означает, что объект NURBS может быть описан с помощью математических формул. *B*-сплайн - это любая гладкая кривая, определенная в трехмерном пространстве, нормаль которой может иметь произвольное направление. Здесь *B*-сплайны используются для построения участков поверхностей. Такие патчи поверхностей, являющиеся конструкционными элементами для создания объектов сложной формы, изначально также создаются как плоские, а затем их форма изменяется на этапе модификации. Отдельные участки NURBS-поверхности можно соединять друг с другом для формирования общей слож-ной поверхности объекта (изделия).



а) б)

Рис. 4. Пример сложного изделия из камня, разработанного методом NURBS-моделирования: а – интерполяция по исходной дескрипторной сетке; б – модель текстурированной скульптурной поверхности

Пример использования метода NURBS для моделирования сложной скульптурной поверхности декоративно-художественного изделия из камня показан на рис. 4.

Поверхностное моделирование на основе NURBS обладает следующими преимуществами перед другими методами:

- позволяет точно описать все возможные геометрические примитивы, такие как отрезки, окружности, дуги, эллипсы, плоскости, цилиндры, конусы, сферы, торы и более сложные объекты при помощи универсального математического аппарата;
- упрощает имитацию антропо- и зооморфных или любых других объектов, поверхности которых характеризуются гладкостью и плавностью линий и имеют сложным образом искривленные пространственные формы;
- предоставляет возможность формировать гладко сопрягаемые поверхности объектов, задаваемых набором их поперечных сечений (Cross Sectional Design);
- обеспечивает высокое качество визуализации закругленных границ объектов и сопряжений поверхностей благодаря разбиению их на участки, формируемые с использованием аналитических выражений.

Различают два типа NURBS-поверхностей:

- точечная поверхность (Point Surface) строится в режиме интерполяции и проходит через все опорные точки, заданные в трехмерном пространстве;

- CV-поверхность (Control Vertices - CV Surface) плавно аппроксимирует все опорные точки, заданные в трехмерном пространстве и называемые управляющими вершинами.

Точечные NURBS-поверхности используются в современных компьютерных системах ЧПУ технологическим оборудованием, предназначенным для формообразования сложных поверхностей изделий.

NURBS-поверхности могут включать в себя как участки, описываемые полиномами Безье с высоким порядком (обычно от 5 до 9), так и патчи, заданные *B*-сплайнами.

Поверхность NURBS определяется следующим способом [6]:

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{i,j}R_{i,k,j,l}(u,v)\,, \qquad (4)$$

здесь $P_{i,j}$ – матрица контрольных (характеристических) точек поверхности; $R_{i,k,j,l}(u, v)$ – рациональная базовая функция, задающая форму и характер сопряжения участков поверхности, которая находится из формулы:

$$R_{i,k,j,l}(u,v)=\frac{w_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)}{\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}[w_{r,s}N_{r,k}(u)N_{s,l}(v)]}\,, \qquad (5)$$

где $w_{i,j}$ - веса контрольных точек $P_{i,j}$, изменение которых в диапазоне от 0 до ∞ вызывает рост влияния данной точки на характер проходящих через нее B-сплайнов, которые образуют соответствующий участок поверхности; $N_{i,k}$, $N_{j,l}$ – нормированные B-сплайн-функции, соответственно по направлениям u и v, которые рассчитываются, например, по направлению u, по следующей формуле

$$N_{i,k}(u)=\frac{u-i}{k-1}N_{i,k-1}(u)+\frac{i+k-u}{k-1}N_{i+1,k-1}(u)\,; \qquad (6)$$

где $N_{r,k}$, $N_{s,l}$– нормированные граничные B-сплайн-функции участков поверхности, находящиеся по аналогичной (5) формуле; k, l – количество участков B-сплайн-кривых в направлении u и v, соответственно; $w_{r,s}$ - веса граничных контрольных точек $P_{r,s}$, которые определяют их влияние на характер проходящих через них B-сплайн-функций.

Геометрическое значение весов контрольных точек и их влияние на изменение B-сплайн-функции показано на рис. 5.

Кривая NURBS $C(u)$ - это векторная, рациональная, кусочно-заданная, многочленная функция следующего вида:

$$C(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n}[w_iP_iN_{i,k}(u)]}{\sum_{i=0}^{n}[w_iN_{i,k}(u)]}, \qquad (7)$$

где w_i - весовые коэффициенты; P_i - контрольные точки (вектор); $N_{i,k}$- нормированные базовые B-сплайн-функции степени n.

В данном примере весовой коэффициент w_3 определяют положение узловой точки B кривой относительно контрольной точки P_3:

- при $w_3 = 0$ значение $C(u) = B$, т.е. кривая на этом участке полностью автономна по отношению к ее контрольной точке P_3;
- при $w_3 = 1$ значение $C(u) = N$ – кривая располагается симметрично между двумя смежными точками P_2 и P_3;
- при возрастании $w_3 > 1$ $C(u) = B_3$, т.е. кривая все ближе приближается к точке P_3.

Геометрическая связь положений точек B, N, B_i и P_i определяется соотношениями:

$$N = (1 - a)B + a\,P_i, \qquad (8)$$

$$B_i = (1 - b)B + b\,P_i,$$

где $a = R_{i,k}(u; w_i = 1)$ и $b = R_{ik}(u)$.

На основании линейных параметров a и b получается следующее соотношение для изменения формы кривой, определяемое значением весово-

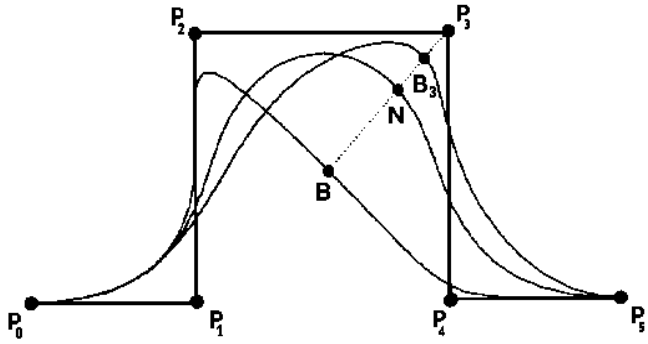


Рис. 5. Пример изменения геометрического вида NURBS-кривой при различных весовых значениях контрольной точки P_3

го коэффициента:

$w_i = (1 - a)/a : (1 - b)/b =$

$P_iN/BN : P_iB_i/BB_i.$ (9)

Следовательно, чтобы необходимым образом изменить форму NURBS-кривой, следует не только задать контрольные точки, но и определить рациональную базовую функцию $R_{i,k}(u)$ или значение весового коэффициента w_i.

В 90-е годы проф. Киреевым В.И. были предложены интегро-дифферен-циальные сплайны для аппроксимации поверхностей геометрических объектов [3, 4]. Чтобы оценить достоинства этого математического метода, необходимо обобщить возможные теоретические принципы аппроксимации кривых.

Классическими методами приближения табличных функций произвольного вида $y_i = f(x_i)$, заданных на отрезке [*a, b*] в узлах x_i (*i=1, 2,..., k-1)*, являются следующие:

1) интерполяция алгебраическими многочленами типа $P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$;

2) сглаживание методом наименьших квадратов алгебраическими многочленами или другими базисными функциями;

3) интерполяция или сглаживание дифференциальными сплайн-функ-циями.

Интерполяция на основе линейных, квадратичных или кубических полиномов имеет существенный недостаток, проявляющийся в появлении сильных осцилляций ("биений") между узлами. При этом с повышением степени полинома (*n>3*) неустойчивость интерполяционной кривой возрастает. Недостатком полиноминальной интерполяции по локальным участкам $x(i) = [x_i, x_{i+1}]$, $I = 1,2,...,k-1$ методом наименьших квадратов является неточный учет свойств аппроксимируемых функций, приводящий к разрыву *p*-производных (*p = 1, 2*) от полиномов $P_n(x_i)$. Для устранения этого недостатка используются интерполяционные сплайн-функции разной степени.

Кубическим сплайном, аппроксимирующим произвольную сеточную функцию (x_i, f_i), называется составная функция $S_3(x) = \bigcup_{i=1}^{k-1} S_3^{(i)}(x)$, звенья которой на каждом отрезке $x(i) = [x_i, x_{i+1}]$ выражаются полиномом

$S_3^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j^{(i)} (x - x_i)^j$. Числовые значения $a_j^{(i)}$, в расчетные формулы которых входят значения функции f_i и ее производных (f_i^1, f_i^{11}), находятся по аппроксимационным соотношениям (для локальных сплайнов), либо из алгебраической системы уравнений, получающейся из условий стыковки звеньев по соответствующим производным (для глобальных сплайнов).

Расчетные соотношения для коэффициентов $a_j^{(i)}$ полинома получаются из следующих условий согласования $S_3^{(i)}(x)$ с аппроксимируемой функцией f_k в узловых точках *k*:

$S_3^{(i)}(x_k) = f_k$, $S_3^{(i)(p)}(x_k) = f_k^{(p)}$,

$k = i, i+1, p = 1$ или 2. (10)

Звенья $S_3(x)$ локальных кубических сплайнов получаются по четырем условиям согласования дифференциального типа:

$$S_3^{(i)}(x_i)=f_i,\ S_3^{(i)}(x_{i+1})=f_{i+1},\ S_3^{(i)1}(x_i)=f_i^1,\ S_3^{(i)1}(x_{i+1})=f_{i+1}^1 \quad (11)$$

где $f_i^1 = f^1(x_i)$, $f_{i+1}^1 = f^1(x_{i+1})$ - производные в узлах x_i и x_{i+1} (наклоны сплайна) вычисляются по соответствующим аппроксимационным соотношениям.

Формула звена кубического сплайна, полученная на основе условий (10), имеет вид:

$$S_3^{(i)}(x) = f_i + \overline{m}_i(x - x_i) + (3\frac{\delta f_{i+1}}{h_i^2} - \frac{\Delta \overline{m}_{i+1}}{h_{i+1}})(x - x_i)^2 +$$

$$+(-2\frac{\Delta f_{i+1}}{h_{i+1}^3} + \frac{\Delta \overline{m}_{i+1}}{h_{i+1}^2})(x - x_i)^3 \qquad (12)$$

где $f_i = f(x_i),\ \overline{m}_i = S_3^1(x_i),\ h_{i+1} = x_{i+1} - x_i,$
$\delta f_{i+1} = \Delta f_{i+1} - \overline{m}_i h_{i+1},\ \Delta\overline{m}_{i+1} = \overline{m}_{i+1} - \overline{m}_i.$

Итак, чтобы найти локальный кубический сплайн $S_3(x) = \bigcup_{i=1}^{k-1} S_3^{(i)}(x)$ на всем отрезке $[a,b]$, нужно задать в k узлах параметры сплайна – значения f_i и его наклоны $\overline{m_i}$ *(i=0, 1,…,k)*.

Такой сплайн является интерполяционным и дифференциальным. Наклоны сплайна при значениях шага h = =*const* можно вычислить по формулам:

$$\overline{m_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad i = 1,2,....,k-1,$$
$$\overline{m_0} = \frac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h},\ \overline{m_k} = \frac{3f_k + f_{k-2} - 4f_{k-1}}{2h} \qquad (13)$$

Этот локальный сплайн имеет дефект q = 2, т.е. он обеспечивает непрерывность только первой производной во всех внутренних узлах, а непрерывность $S_3^{11}(x)$ не гарантируется.

Для глобального сплайна дефекта q=1 параметры $\overline{m_i}$ вычисляются из системы уравнений:

$$\overline{m}_0 = f_0^1,\ \overline{m}_k = f_k^1,$$
$$\frac{1}{h_i}\overline{m}_{i-1} + 2(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}})\overline{m}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\overline{m}_{i+1} =$$
$$3(\frac{\Delta f_{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{\Delta f_i}{h_i^2}),\ i = 1,2,..., k-1, \qquad (14)$$

где f_0^1, f_k^1 - производные в крайних точках отрезка [*a, b*], которые вычисляются по аппроксимационным формулам, а внутренние уравнения этой системы получаются путем стыковки вторых производных звеньев сплайна (12) в узлах x_i (*i = 1, 2,…,k-1*) по соотношению:

$$S_3^{(i)11}(x)\Big|_{x=x_i}^{[x_i, x_{i+1}]} = S_3^{(i-1)11}(x)\Big|_{x=x_i}^{[x_{i-1}, x_i]},$$
$$i = 1,2,..., \kappa - 1.$$

Для получения формулы звена сплайна вместо условий (11) можно использовать следующие:

$$S_3^{(i)}(x_i) = f_i,\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) = f_{i+1},$$
$$S_3^{(i)11}(x_i) = f_i^{11},\ S_3^{(i)11}(x_{i+1}) = f_{i+1}^{11}. \qquad (15)$$

В этом случае параметрами сплайна являются $f_i, f_{i+1}, m_i, m_{i+1}$, где m_i, m_{i+1} - есть не наклоны сплайна, а его вторые производные в узлах. Формула звена сплайна приобретает вид:

$$S_{3,i}(x) = f_i + (\frac{\Delta f_{i+1}}{h_i} - \frac{m_i}{2}h_{i+1} - \frac{\Delta m_{i+1}}{6}h_{i+1})(x - x_i) +$$
$$+\frac{m_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{\Delta m_i}{6h_{i+1}}(x - x_i)^3, \qquad (16)$$

где

$m_i = S^{11}(x_i),\ \Delta m_{i+1} = m_{i+1} - m_i,\ \Delta f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$

Для обеспечения непрерывности первой производной кубического сплайна во всех внутренних узлах x_i (*i=1, 2,…,k-1*) параметры сплайна вычисляются из системы алгебраических уравнений:

$$m_0 = 0,\ m_k = 0,$$
$$m_{i-1}h_i + 2m_i(h_i + h_{i+1}) + m_{i+1}h_{i+1} =$$
$$= 6(\frac{\Delta f_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\Delta f_i}{h_i}), \qquad (17)$$

где $m_0 = f_0^{11}, m_k = f_k^{11},\ i = 1,2,..., k-1.$

Соотношения (17) получаются из условия стыковки первых производных двух соседних звеньев. При этом кубические сплайны приобретают четвертый порядок точности относительно шага h_{i+1}, что часто приводит к неоправданной сложности вычислений. Поэтому для широкого круга задач геометрического моделирования более предпочтительными становятся квадратичные параболические сплайны. Однако их построение традиционными спосо-

бами приводит к неустойчивости, для устра-нения которых имеются специальные алгоритмы регуляции, заключающиеся в смещении узлов сплайна относительно узлов дескрипторной сеточной функции [2].

Этого недостатка лишены интегро-дифференциальные сплайны, эффективно применяющиеся при интерполяции параболических сплайнов, прежде всего четных степеней ($n = 2, 4, 6,\ldots$) [3, 4].

Построение параболических интегро-дифференциальных сплайнов показано на примере интерполяционного многочлена второй степени на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_{2,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}(x - x_i) + a_{2,i}(x - x_i)^2 .$$

Дифференциальные условия согласования искомого многочлена $S_{2,i}(x)$ и заданной табличной функции $f(x_i)$ записываются уравнением:

$$\delta S_{2,i}^{(p)}(x_k) = S_{2,i}(x_k) - f(x_k) = 0 \quad (k = i, i+1,\ p = 0,1) \quad . \qquad (18)$$

Интегро-дифференциальные условия согласования $S_{2,i}(x)$ и заданной точками функции $f(x_i)$ имеют другой вид:

$$\delta S_{2,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{2,i}(x) - f(x)]dx = 0 \ ;$$

$$\delta S_{2,i}^{(0)}(x_k) = S_{2,i}(x_k) - f(x_k) = 0 \quad (k = i, i+1) \ , \qquad (19)$$

где x_i – узлы дескрипторной сетки Δ_1: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ представленной на отрезке $[a, b]$ (рис. 6).

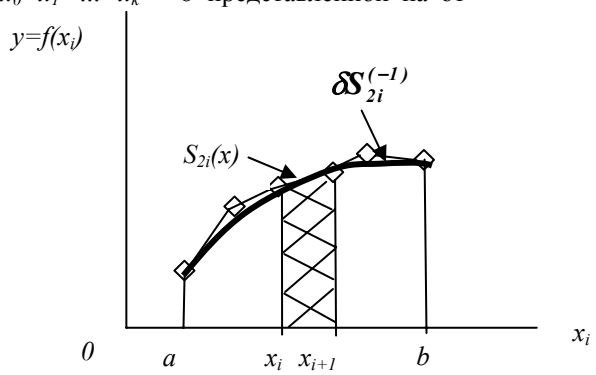


Рис. 6. Аппроксимация дискретной функции $f(x_i)$ с помощью интегро-дифференци-ального сплайна $S_{2i}(x)$

Решение системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_{0i}, a_{1i}, a_{2i} и подстановка их в формулу для $S_{2i}(x)$ приводит к следующему аналитическому определению i-го звена параболического сплайна:

$$S_{2,i}(x) = f_i + \left(\frac{6\delta I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2\Delta f_i}{h_{i+1}}\right)(x - x_i) + \left(-\frac{6\delta I_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} + \frac{3\Delta f_i}{h_{i+1}^2}\right)(x - x_i)^2, \qquad (20)$$

где $I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, $\delta I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - f_i h_{i+1}$

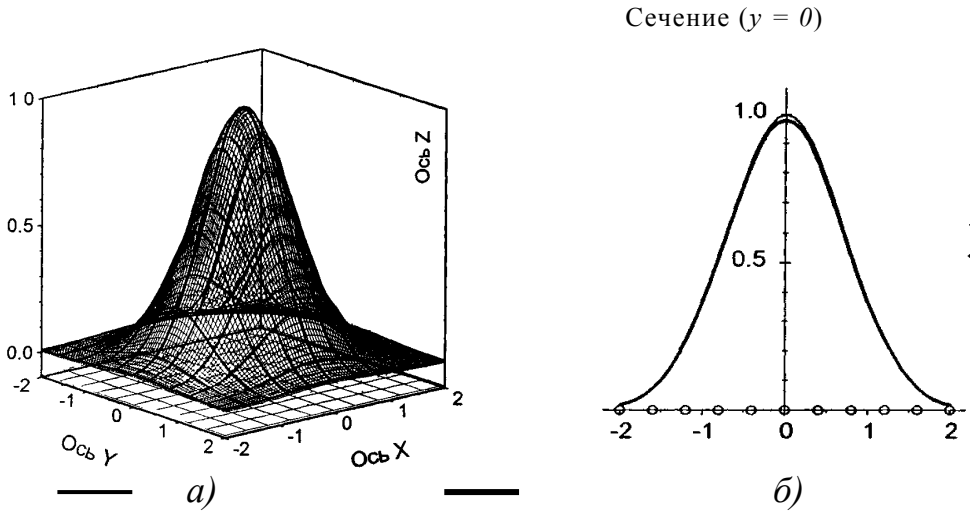
$\Delta f_i = x_{i+1} - x_i$, $h_{i+1} = x_{i+1} - x$

т.е. параметрами сплайна являются интегралы I_i^{i+1} и функции f_i .

Формула (20) звена параболического сплайна используется для формирования составного глобального сплайна на всем отрезке $[a, b]$:

$$S_{2,l}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} S_{2,i}(x) \ .$$

Для обеспечения устойчивости процесса аппроксимации здесь применяется специальный прием так называемого "слабого сглаживания". Он состоит в том, что сначала по значениям аппроксимируемой функции $f(x_i)$ рассчитываются интегралы I_i^{i+1} по всем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, а затем осуществляется пересчет значений сглаженных (осредненных) функций $\tilde{f}_i$. Для пересчета используется алгебраическая система уравнений:



Исходная функция **Сплайн** **Узлы сплайна**

Рис. 7. График (а) двумерного ИД-сплайна, аппроксимирующего заданную функцию в прямоугольной области [-2, 2]·[-2, 2]; сечение (б) сплайна и функции плоскостью y=0

$$\hat{f}_0 = f_0 \ , \ \hat{f}_n = f_n \ ,$$

$$\frac{1}{h_i}\hat{f}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\hat{f}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\hat{f}_{i+1} = 3\left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{I_{i-1}^{i}}{h_i^2}\right), \quad (21)$$

где $i = 1,2,...,k-1$

Внутренние уравнения этой системы получаются из условий непрерывности $S_2^{(p)}(x)$ в узлах x_i ($I = 1,2,...,k-1$):

$$S_2^{(p)}(x)\Big|_{x=x_i}^{[x_{i-1},x_{ii}]} = S_2^{(p)}(x)\ \Big|_{x=x_i}^{[x_i,x_{i+1}]},$$

где $p = 0, 1$.

Из сопоставления формулы (20) и (12) или (16) видно, что параболический сплайн является более простым для вычисления. При этом он обеспечивает третий порядок аппроксимации ($p = -1, 0, 1$), что позволяет достичь высокой точности моделирования криволинейного участка любой формы.

Пример расчета двумерного ИД-сплайна $S_{2,2ИД(i,j)}(x,y)$ для аппроксимации аналитически заданной функции $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ показан на рис. 7.

Другим достоинством метода интегро-дифференциальных сплайнов при аппроксимации сложной формы изделий является их логическая взаимосвязь с технологией обработки этих изделий, основные виды которой связаны с воздействием на определенную площадь или объем материала. Использование в качестве параметров не только сплайн-функций, но их интегралов позволяет достичь требуемых технологических условий обработки аппроксимируемых участков поверхностей изделий.

Для аппроксимации художественных форм, не соответствующих однозначным функциям, необходимо использовать параметрическое векторное представление пространственных кривых по формуле (1). Например, в случае обработки сложных изделий на многокоординатных станках с ЧПУ при решении задач глобальной ап-

проксимации в качестве параметра обычно используется накопленная длина хорд. Параметрический векторный сплайн ($\bar{S}$-сплайн) по аналогии с представлением радиуса-вектора $\bar{r}(t)$ записывается в виде:

$$\bar{S} = \bar{S}(t) = S_x(t)\bar{e}_1 + S_y(t)\bar{e}_2 + S_z(t)\bar{e}_3, \quad (22)$$

где $S_x(t), S_y(t), S_z(t)$ - скалярные сплайн-функции, которые аппроксимирует взаимосвязанные координатные перемещения $x(t_i), y(t_i), z(t_i)$. Построение скалярных сплайн-функций осуществляется по рассмотренной выше методике.

Таким образом, полученную при проектировании графическую модель сложной поверхности можно использовать не только для оценки эстетических свойств разрабатываемой формы изделия, но и для проектирования технологических операций изготовления данной поверхности на станках с ЧПУ, программное обеспечение которых поддерживает по-верхностное моделирование, в частности методом *B*-сплайнов и NURBS–поверх-ностей [5]. Оценка эффективности ис-пользования в системах ЧПУ метода интерполяции кривых и поверхностей из-делий на основе интегро-дифферен-циальных сплайнов может быть дана в результате много-факторного анализа практических при-меров реализации или их имитационных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
2. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. *Киреев В.И.* Интегро-дифферен-циальный метод приближения функций алгебраическими многочленами // Вычислительные технологии. - Новосибирск, ИВТ СО РАН, т.2, №6, 1993.
4. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа. 2004. – 360 с.
5. *Павлов Ю.А*. Компьютерные системы проектирования и подготовки производства промышленных изделий из камня: Учеб. пособие в 3 частях. - М.: МГГУ, 2002. – 108 с.
6. *L. Piegl.* On NURBS: A Survey // IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 11, No. 1, Jan 01, 1991. P. 55 – 71.

Коротко об авторах

Киреев В.И. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры "Высшая математика",
Павлов Ю.А. – кандидат технических наук, профессор кафедры "Технология художественной обработки материалов",

Московский государственный горный университет.