

УДК 621.926.5

*А.П. Вержанский***ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕЛЮЩЕЙ
ЗАГРУЗКИ В МЕЛЬНИЦАХ БАРАБАННОГО ТИПА**

Движение мелющей загрузки в помольных камерах мельниц барабанного типа, в частности, вибрационных мельниц является наименее изученным процессом в исследованиях, посвящённых тонкому измельчению материалов. Это связано, с одной стороны, с наличием нескольких сотен и даже тысяч мелющих тел, одновременно находящихся в движении и взаимодействующих друг с другом, и, с другой стороны, замкнутостью объёма помольных камер, в которых находятся мелющие тела, что значительно усложняет, а иногда и делает невозможным измерения динамических параметров загрузки.

Анализ теоретических исследований движения мелющей загрузки в помольных камерах вибрационных мельниц свидетельствует о наличии достаточно малого числа работ, посвященных изучению динамики мелющих тел во всем объеме помольной камеры, а также в отдельных ее частях. На наш взгляд это связано с ограниченными возможностями нахождения истинных значений различных коэффициентов (например, демпфирования при соударении шаров или трения при движении отдельных слоев загрузки), входящих в уравнения движения.

При этом, если методики определения коэффициентов трения и соответствующих сил трения между твердыми телами в легкодоступных для непосредственного измерения частях механизмов разработаны достаточно полно, то в замкнутом объеме, каким является помольная камера любой мельницы, определение реальных значений вышеуказанных величин представляет собой в настоящий момент

сложную, а иногда неразрешимую задачу. Известны работы [1], [2], в которых авторы решают эту задачу, применяя косвенные методы расчета и анализа физических величин, входящих в дифференциальные уравнения движения мелющей загрузки, в результате чего математические модели, содержащие определенные подобным образом физические величины в целом правильно описывают существо процесса, но содержат при этом ряд неточностей, влияющих на достоверность значений параметров, полученных в результате решения уравнений движения загрузки.

На наш взгляд имеется возможность найти более точные значения динамических параметров загрузки, представив её в виде ряда шаров, между которыми находятся либо пустые промежутки, либо измельчаемый материал. При этом, в любом случае, шары могут двигаться друг относительно друга в процессе движения помольной камеры, что, вообще говоря, в действительности и происходит. Руководствуясь вышеизложенным, составим расчётную схему движения мелющей загрузки в вибрационной мельнице.

Представим помольную камеру вибромельницы в виде цилиндра в общем случае некругового сечения с центром в точке O . Выберем две декартовы системы координат так, как показано на рис. 1. Одна из них $-x, y, z$ - неподвижная - будет связана с центром вращений камеры (точка O). Другую подвижную систему координат x_1, y_1, z_1 свяжем с центром C помольной камеры, совершающим движение по круговой траектории. Сечение плоско-

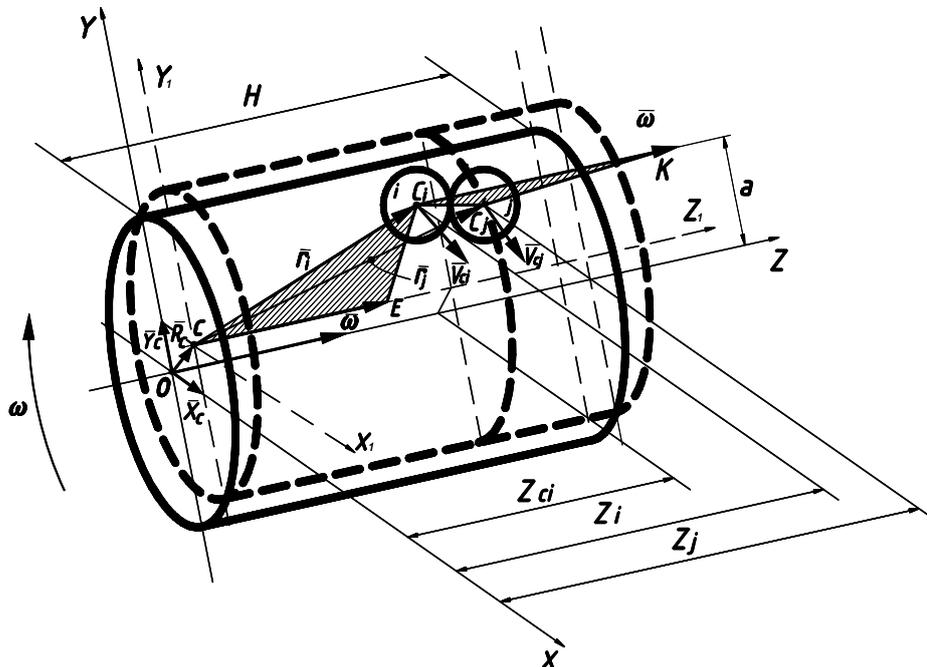


Рис. 1. Расчётная схема вибромельницы

стью xOy представляет собой окружность, образованную за из N_φ точек $\{(X_i, Y_i, Z_i), i=1, N_\varphi\}$. В осевом направлении поверхность разбита N_z параллельными сечениями. Указанные координаты относятся к состоянию покоя. Помольная камера мельницы совершает плоскопараллельное движение:

$$X_c = A \cdot \cos(\omega t), \quad Y_c = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

При этом все точки камеры получают одинаковое смещение: $(X_c, Y_c, 0)$

Движение каждого шара задаётся векторным способом. К каждому шару из начала подвижной системы координат проводится радиус-вектор, постоянно меняющий величину и направление. Радиус-вектор, проведённый к шару из начала неподвижной системы координат, определяется следующим образом:

$$\vec{OC}_i = \vec{OC} + \vec{CC}_i \text{ или}$$

$$\vec{OC}_i = \vec{OC} + \vec{r}_i \quad (2)$$

При рассмотрении процесса взаимодействия пары шаров их радиусы - векторы связаны простым соотношением:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_j - \vec{C}_i \vec{C}_j \quad (3)$$

С учётом (3) выражение (2) приобретает вид

$$\vec{OC}_i = \vec{OC} + \vec{r}_j - \vec{C}_i \vec{C}_j \quad (4)$$

Продифференцируем выражение (4) по времени, учитывая, что, так как вектора \vec{r}_j и $\vec{C}_i \vec{C}_j$ проведены не из начала неподвижной системы координат, то при их дифференцировании необходимо использовать формулу Бура. Отсюда имеем:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_j + \frac{d\vec{r}_j}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_j - \frac{d(\vec{C}_i \vec{C}_j)}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{C}_i \vec{C}_j \quad (5)$$

где $\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{v}_{C_j}$ – скорость относительного движения точки C_j в подвижной системе

координат; $\frac{d^0(C_i \vec{C}_j)}{dt} = \vec{v}_{C_j C_i}$ – скорость движения центра масс j -го шара относительно центра масс i -го шара; $\vec{\omega} \times \vec{r}_j$ и $\vec{\omega} \times C_i \vec{C}_j$ – скорости концов векторов \vec{r}_j и $C_i \vec{C}_j$; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения подвижной системы координат относительно неподвижной.

Здесь следует отметить, что произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}_j$ и $\vec{\omega} \times C_i \vec{C}_j$ являются соответственно скоростями \vec{v}_{C_j} и $\vec{v}_{C_j C_i}$ относительного движения центров масс шаров с номерами j и i в подвижной системе координат. Направлены эти скорости перпендикулярно соответствующим заштрихованным на рис. 1 плоскостям $C_i C_j K$ и $C_i C E$. Точное направление векторов

скоростей \vec{v}_{C_j} и $\vec{v}_{C_j C_i}$ можно определить, например, по правилу правого винта. Здесь необходимо сделать следующие замечания.

1. Из опыта эксплуатации вибрационных мельниц известно, что их эффективной работы можно добиться при коэффициенте заполнения помольной камеры мелющими телами большим 0,8. Это говорит о том, что при работе мельницы всё пространство помольной камеры заполнено мелющими телами, и расстояния между ними не превышают размера самих мелющих тел (в дальнейшем под мелющими телами будем понимать шары). Таким образом, модуль и направление радиуса вектора, проведённого из начала подвижной системы координат к центру масс шара, например, с номером i не будут существенно меняться длительный промежуток времени (относительно периода колебаний помольной камеры). На рис. 2 показаны годографы векторов \vec{r}_j и \vec{r}_i (тонкие замкнутые линии). Это даёт возможность с достаточной для численного расчёта точностью определить положение конкретного шара в помольной камере.

2. Математически направление и модуль скорости \vec{v}_{C_j} относительного движения точки C_j в подвижной системе координат задаётся равенством (рис. 2):

$$\Delta \vec{r}_j = \vec{v}_{C_j} = \vec{v}_{j_i} - \vec{v}_{j_o} \quad (6)$$

Рассечём помольную камеру плоскостью, параллельной торцам и рассмотрим процесс передачи ударного импульса вглубь шаровой загрузки (рис. 2), представив шары, расположенные в плоскости сечения в виде наклонной цепочки

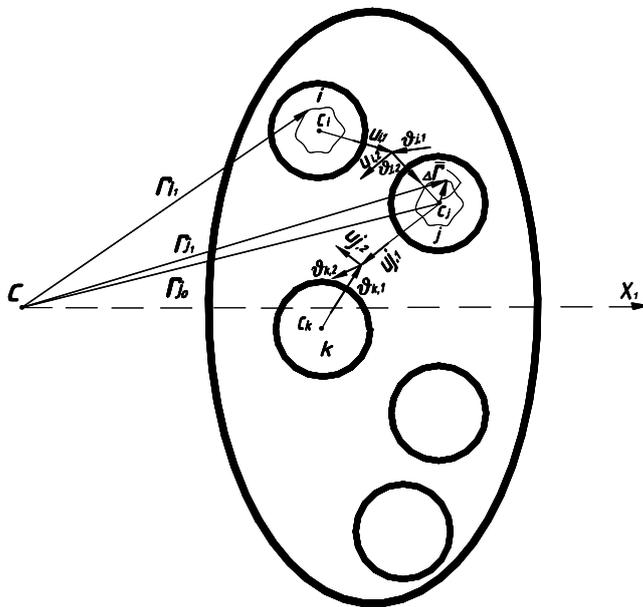


Рис. 2. К расчёту столбика шаров

(или столбика) шаров, которые, двигаясь в месте с остальной частью загрузки, совершают соударения друг с другом. С определённой степенью точности можно считать такие соударения плоскими, т.е. скорости центров масс шаров лежат в одной плоскости.

Похожую картину движения только для вертикального столбика или горизонтальной цепочки шаров описывали в своих работах А.Е. и А.А. Кобринские, Р.Ф. Нагаев, Л.И. Тывес [3], [4]. В нашем случае система, состоящая из n шаров, будет представлять собой столбик одинаковых шаров. Движение системы поддерживается за счет ударов нижнего (первого) и верхнего (последнего) шара о стенки помольной камеры.

Обозначим: u_{j1} ; u_{j2} – скорости j -го шара соответственно до и после удара о k -й (последующий) шар; v_{j1} ; v_{j2} – скорости j -го шара соответственно до и после удара о i -й (предыдущий) шар ; t_j – время прошедшее между ударами j -го шара о k -й шар и i -й шар; h_j – расстояние между точками соударения j -го шара с k -м и i -м шарами (рис. 2).

За время полного оборота помольной камеры мелющая загрузка успевает два раза совершить соударения сначала о нижнюю поверхность камеры, а потом о верхнюю её часть. Таким образом, период движения столбика задаётся следующим образом:

$$T = \frac{2\pi l}{\omega} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi l}{\omega}, \text{ где } l \in N \quad (7)$$

Анализ формулы (7) показывает, что по сравнению со свободным столбиком шаров [3] мелющие тела в помольной камере вибромельницы совершают соударения с частотой в два раза большей. Ранее было установлено, что частота соударения шаров прямо пропорциональна числу шаров в столбике и обратно пропорциональна периоду их соударения со стенками помольной камеры:

$$\nu = \frac{1}{T} \cdot n, \quad (8)$$

где n – число шаров в столбике.

Изменение скоростей j -го и i -го шаров описывается уравнением:

$$v_{j1} + u_{i1} = v_{j2} + u_{i2} \quad (9)$$

Поскольку система обладает диссипативными свойствами, то:

$$(v_{j1} - u_{i1})R = v_{j2} - u_{i2}, \quad (10)$$

где R – коэффициент восстановления при ударе.

Здесь надо сделать необходимые уточнения. В связи с тем, что за период движения помольной камеры ударный импульс дважды передаётся от её поверхности вглубь шаровой загрузки, то каждый шар, находящийся в столбике, ощущает на себе действие двух ударных импульсов: один из них направлен от нижней стенки вверх, а другой – в противоположном направлении. Таким образом, в столбике, состоящим из n шаров, шар с номером один (находящийся у нижней стенки камеры) будет одновременно иметь номер n (последний) в плане восприятия ударного импульса, передаваемого от верхней стенки камеры всему столбiku. В этом мы видим принципиальное отличие в процессах передачи ударных импульсов столбiku шаров в вибромельнице по сравнению с системой с неподвижным ограничителем, описанной А.А. и А.Е. Кобринскими в [4]. Шар с номером n на интервалах между соударениями движется в поле сил тяжести и инерций, то :

$$v_{j1y} = u_{j2y} - (g + a_{jy}^r + a_{jy}^e + a_{jy}^k)(T - t_j) \quad (11)$$

$$v_{j2y} = u_{j1y} - (g + a_{jy}^r + a_{jy}^e + a_{jy}^k) t_j \quad (12)$$

Отсюда следует, что:

$$v_{j2y} - v_{j1y} = u_{j1y} - u_{j2y} + (g + a_{jy}^r + a_{jy}^e + a_{jy}^k) T \quad (13)$$

Аналогично:

$$v_{j1x} = u_{j2x} - (a_{jx}^r + a_{jx}^e + a_{jx}^k)(T - t_j) \quad (14)$$

$$v_{j2x} = u_{j1x} - (a_{jx}^r + a_{jx}^e + a_{jx}^k) t_j \quad (15)$$

Отсюда следует, что:

$$v_{j2x} - v_{j1x} = u_{j1x} - u_{j2x} + (a_{jx}^r + a_{jx}^e + a_{jx}^k) T \quad (16)$$

Но, как было указано выше, j -й шар в столбике, воспринимающем ударный импульс в направлении снизу вверх одновременно будет $n-j$ - шаром в столбике, воспринимающем ударный импульс в направлении сверху вниз и тогда аналогично соотношениям (11) - (16) будем иметь:

$$v_{(n-j)1y} = u_{(n-j)2y} - (g + a_{(n-j)y}^r + a_{(n-j)y}^e + a_{(n-j)y}^k) \times (T - t_{(n-j)}) \quad (17)$$

$$v_{(n-j)2y} = u_{(n-j)1y} - (g + a_{(n-j)y}^r + a_{(n-j)y}^e + a_{(n-j)y}^k) t_{(n-j)} \quad (18)$$

Отсюда следует, что:

$$v_{(n-j)2y} - v_{(n-j)1y} = u_{(n-j)1y} - u_{(n-j)2y} + (g + a_{(n-j)y}^r + a_{(n-j)y}^e + a_{(n-j)y}^k) T \quad (19)$$

Аналогично:

$$v_{(n-j)1x} = u_{(n-j)2x} - (a_{(n-j)x}^r + a_{(n-j)x}^e + a_{(n-j)x}^k) \times (T - t_{(n-j)}) \quad (20)$$

$$v_{(n-j)2x} = u_{(n-j)1x} - (a_{(n-j)x}^r + a_{(n-j)x}^e + a_{(n-j)x}^k) t_{(n-j)} \quad (21)$$

Отсюда следует, что:

$$v_{(n-j)2x} - v_{(n-j)1x} = u_{(n-j)1x} - u_{(n-j)2x} + (g + a_{(n-j)x}^r + a_{(n-j)x}^e + a_{(n-j)x}^k) T \quad (22)$$

Таким образом, абсолютная величина скорости шара, находящегося в столбике, будет находиться как разность скоростей одного и того же шара, вычисленных при определённом направлении вектора ударного импульса, передаваемого вглубь шаровой загрузки:

$$v_{j1}^* = |v_{j1} - v_{(n-j)1}| \quad (23)$$

$$v_{j2}^* = |v_{j2} - v_{(n-j)2}| \quad (24)$$

Направления векторов \vec{v}_{j1}^* и \vec{v}_{j2}^* будут определяться направлением вектора $\vec{C}_i \vec{C}_j$ согласно (3).

Диаметр помольной камеры определим исходя из следующих соображений. А.А. и А.Е. Кобринскими при исследовании динамики столбиков впервые было введено понятие «динамическая высота столбика» - величина, характеризующая линейный размер участка, занимаемого столбиком соударяющихся шаров при устано-

вившемся движении. Здесь и далее под установившемся движением будем понимать процесс, при котором шар за период движения камеры согласно (7) по два раза соударяется с верхним и нижним шаром или стенками камеры. Неустановившиеся движения характерны при пуске или остановке двигателя. Динамическая высота столбика является суммой всех перемещений шаров, составляющих столбик при установившемся движении. Величину перемещения j -го шара между соударениями можно найти двумя способами, выразив её через скорости шара до или после удара:

$$h_j = v_{j1}^* \cdot t_j + \frac{1}{2} \cdot (g + a_{jy}^r + a_{jy}^e + a_{jy}^k) \cdot t_j^2 \quad (25)$$

или

$$h_j = v_{j2}^* \cdot (T - t_j) + \frac{1}{2} \cdot (g + a_{jy}^r + a_{jy}^e + a_{jy}^k) \times (T - t_j)^2 \quad (26)$$

Динамическая высота столбика шаров или, что тоже самое величина минимального диаметра помольной камеры, обеспечивающая установившееся движение мелющей загрузки, определяется следующим образом:

$$H = d_k = \sum_1^n h_j \quad (27)$$

Обозначим ускорение, действующее на шар, $-a_j$.

$$\vec{a}_j = \vec{g} + \vec{a}_j^r + \vec{a}_j^e + \vec{a}_j^k, \quad (28)$$

где $\vec{a}_j^r = \vec{a}_{jr}^r + \vec{a}_{jn}^r$ - относительные ускорения j -го шара,

$$\vec{a}_{jr}^r = \frac{d(\vec{v}_{j1}^*)}{dt} \cdot \vec{C}_i \vec{C}_j - \quad (29)$$

тангенциальное относительное ускорение j -го шара

$$\vec{a}_{jn}^r = \frac{v_{j1}^{*2}}{r_j} \cdot (-\vec{r}_j) - \quad (30)$$

нормальное относительное ускорение j -го шара

$\Gamma_j^e = \Gamma_{j\tau}^e + \Gamma_{jn}^e$ – переносное ускорение j -го шара,

$$\Gamma_{j\tau}^e = \frac{d(v_\kappa)}{dt} \cdot \tau - \quad (31)$$

тангенциальное переносное ускорение j -го шара, так как скорость камеры $v_\kappa = const$, то $\Gamma_{j\tau}^e = 0$;

$$\Gamma_{jn}^e = \omega^2 C_j O \cdot (-C_j O) - \quad (32)$$

нормальное переносное ускорение j -го шара,

$$\Gamma_j^k = 2\omega \times v_{j1}^* - \quad (33)$$

ускорение Кориолиса.

Тогда из (25) и (26) найдём время, прошедшее между одним соударением шара:

$$v_{j1}^* \cdot t_j + \frac{1}{2} \cdot a_{jy} \cdot t_j^2 = v_{j2}^* \cdot (T - t_j) + \frac{1}{2} \cdot a_{jy} \cdot (T - t_j)^2;$$

$$v_{j1}^* \cdot t_j + \frac{1}{2} \cdot a_{jy} \cdot t_j^2 = v_{j2}^* \cdot T - v_{j2}^* \cdot t_j + \frac{1}{2} \cdot a_{jy} \cdot T^2 -$$

$$- a_{jy} \cdot T \cdot t_j + \frac{1}{2} \cdot a_{jy} \cdot t_j^2$$

$$(v_{j1}^* + v_{j2}^* + a_{jy} \cdot T) \cdot t = v_{j2}^* \cdot T + \frac{1}{2} \cdot a_{jy} \cdot T^2;$$

$$t_j = \frac{v_{j2}^* \cdot T + \frac{1}{2} \cdot a_{jy} \cdot T^2}{v_{j1}^* + v_{j2}^* + a_{jy} \cdot T} \quad (34)$$

Воспользовавшись формулой (10), можно найти скорости первого и последнего (n -го шаров). Обозначим скорость поверхности камеры в радиальном направлении v_0 . Тогда из (1) получим:

$$v_0^x = -A\omega \cdot \sin(\omega t), \quad v_0^y = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (35)$$

Таким образом, получены соотношения, полностью определяющие характеристики движения каждого шара в загрузке, а также величину минимального диаметра камеры, обеспечивающую установившееся движение мелющей загрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриевский А.П. К определению резонансной частоты воздействия ударной волны на разрушаемый материал. - В сб. Машины и комплексы для новых экологически чистых производств строительных материалов. Белгород, 1994.
2. Биленко Л.Ф. Метод определения параметров уравнения кинетики измельчения в про-

- мышленной мельнице. - Обогащение руд, 1990. - № 4(210). - С. 3-5.
3. Кобринский А.А. Динамика одномерных систем шариков, движущихся с периодическими соударениями. - М.: Механика твердого тела, №5. 1968. - С. 36-42.
4. Кобринский А.Е., Тывес Л.И. Квазиупругая характеристика виброударных систем. - Инж. Ж. МТТ, 1966, №5.

Коротко об авторах

Вержанский А.П. – кандидат технических наук, доцент, кафедра «Теоретическая и прикладная механика», Московский государственный горный университет.

