УДК 550.341.2

В.К. Балханов, Ю.Б. Башкуев

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ РАЗВЕТВЛЕННЫХ СТРУКТУР

Для широко представленных в природе разветвленных структур, к которым относятся дельты рек, стримерные каналы и ветвистые разряды молний, предложены три независимых метода измерения фрактальной размерности D. Рост фрактальных объектов, к которым относятся и рассматриваемые структуры, описываются размерностью блуждания h. Предложенная в статье фрактальная производная позволяет выразить величину h через фрактальную размерность D соотношением $h = 2(D-1)$. Это соотношение верно только для разветвленных структур и проверено для упомянутых выше объектов.

Мы обратим внимание на весьма обширный класс природных объектов, которые можно назвать разветвленными структурами. К ним относятся дельты рек, стримерные каналы и ветвистые молнии. Все перечисленные объекты являются фрактальными. Одним из удивительных свойств является их масштабная инвариантность или самоподобие. В каком бы масштабе их не наблюдали, какой бы участок не выделяли, мы будем видеть все те же разветвленные структуры. Е. Федер в книге [1] заметил, что "… остается неясным вопрос, как ввести определение фрактальной размерности системы рек. Геометрия потоков и рек несомненно требует дальнейшего исследования". В статье будут описаны три метода измерения, которые дадут согласующие между собой результаты. Для решения поставленной задачи введем математическую формулировку масштабной инвариантности и определим фрактальные интегралы и дифференциалы.

Первый метод измерения фрактальной размерности основывается на подсчете длины L всех ветвлений в зависимости от масштаба измерения χ. Согласно фрактальной геометрии [2], такая зависимость дается законом Мандельброта – Ричардсона:

$$L = C_\eta \chi^{1-D}. \qquad (1)$$

Здесь D – фрактальная размерность рассматриваемой разветвленной структуры, C_η - типичный во фрактальной геометрии неопределенный множитель. Данный метод отличается своей трудоемкостью и большим объемом вычислительной работы.

В настоящее время нет теории, которая описывала бы развитие ветвлений и позволяла бы рассчитывать их фрактальную размерность. Об этом прямо сказано в [1], а также обращается внимание в [3]. Поэтому актуальна разработка других, не зависимых от формулы (1), методов измерения фрактальной размерности. Далее в статье изложим два других метода, отличных от первого. Один из них, который будем называть вторым методом, можно назвать кластерным. Третий метод основывается на размерности блуждания и фрактальной производной. Как увидим, все методы дадут согласующие между собой результаты. Обратим внимание, что второй и третий методы измерения в вычислительном плане являются более экономными, по сравнению с первым, использующим формулу (1).

Самоподобие фрактальных объектов означает, что растянутую или сжатую в η раз фрактальную линию можно измерить масштабом, в η раз отличным от исходного. Поскольку фрактальная размерность при этом не меняется, то аналогично закону (1), можем записать следующее выражение:

$$\eta L = C_\eta \cdot (\eta \chi)^{1-D}. \qquad (2)$$

Параметр η является масштабным множителем. Пока он не конкретизирован, скобки в (2) нельзя открывать.

Формулы (1) и (2) представляют собой математическую формулировку независимых аксиом фрактальной геометрии, на основе которых можно решать все известные задачи, относящиеся к новой геометрии. В качестве исторического экскурса заметим, что Евклид в своей книге “Начала” в качестве применения 39 аксиом (по Давиду Гильберту) классической геометрии рассмотрел 500 задач.

Приступим к изложению второго, кластерного метода измерения фрактальной размерности. Для этого выделим в разветвленной структуре замкнутую область линейного размера R. Полагая $\eta = 1/R$, из условия самоподобия (2), получаем известное из кластерной физики [4] соотношение:

$$L \sim R^{\mathrm{D}}. \tag{3}$$

Множители, не содержащие линейный размер R, не выписаны. Здесь L является длиной всех ветвлений внутри выделенной области. Меняя размер области и, делая необходимые вычисления с использованием формулы (3), легко определяем фрактальную размерность.

Самоподобие означает, что переход от одних масштабов к другим можно осуществлять геометрическим подобием траектории [5], когда положение r и время t преобразуются следующим образом:

$$\vec{r}\,' = \eta\, \vec{r}\,, \quad t' = \eta^{h}\, t\,. \tag{4}$$

Исключая масштабный параметр, получаем одно из краеугольных соотношений фрактальной геометрии:

$$r \sim t^{1/h}\,. \tag{5}$$

Ввиду исключительной важности, степенной показатель h в (5) называют размерностью блуждания [6]. Известно, что преобразования (4) или соотношение (5) позволяют анализировать некоторые вопросы движения тел, не решая, фактически, уравнения движения. Аналогично, во фрактальной геометрии соотношение (5) позволяет описывать рост фрактальных объектов. Впервые закон (5) с показателем $h = 2$ получил Эйнштейн при объяснении броуновского блуждания. Затем Ричардсон [7] применил преобразования (4) к уравнениям гидродинамики, а Колмогоров [8] получил закон (5) с показателем $h = 2/3$. Флори, при описании полимерной цепи [9], также нашел закон (5) с размерностью $h = 5/3$ (для трехмерного случая). Мы привели известные и, по – видимому, пока единственные случаи теоретического вычисления размерности блуждания.

Фрактальная геометрия должна давать возможность связывать размерность блуждания с фрактальной размерностью. Так, для случая блуждания вдоль фрактальной линии, Мандельброт [2] установил, что $h = D$; вывод этого соотношения дан также в [10]. Для полимерной цепи Пьетронеро [6] установил, что

$$h = 1 + \frac{D}{2}\,. \tag{6}$$

Это же соотношение можно получить из других соображений, строя функцию Лагранжа в переменных “линейный размер – время” и предполагая скейлинговое поведение при масштабном преобразовании потенциальной энергии, ответственной за запутывание полимерной цепи [11]. Далее покажем, какую связь имеют размерность блуждания и фрактальная размерность для разветвленных структур. Этим самым будет развит третий, наиболее экономный, метод измерения фрактальной размерности. Для изложения этого метода необходимо ввести фрактальную производную.

По своему смыслу длина есть сумма всех приложенных к кривой масштабов, т.е. $L = \sum \chi$. Аналогично определению обычного интеграла, определим фрактальный интеграл следующим выражением:

$$\sum \chi = \int \chi \, d_D \chi\,. \tag{7}$$

Обратим внимание, что индекс D, указывающий на фрактальность, пишется снизу символа дифференцирования. Сравнивая (7) с формулой Мандельброта – Ричардсона (1), получаем правило фрактального интегрирования для линейных функций:

$$\int \chi \, d_D \chi = C_\eta \, \chi^{1-D}\,.$$

Его обобщение [11] на степенные функции следующее:

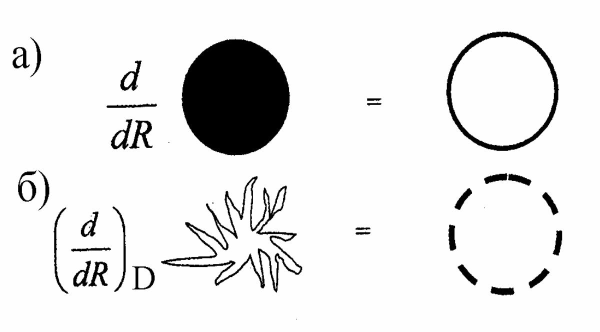
$$\int \chi^n \, d_D \chi = C_\eta \, \chi^{n-D}\,.$$

Считая, как это принято, дифференцирование обратной операции интегрирования, определим фрактальную производную следующим соотношением:

$$\left(\frac{d}{d\chi}\right)_D \int \varphi(\chi)\, d_D \chi = \varphi(\chi)\,.$$

Так, для степенной функции получаем:

Геометрический смысл обычной а) и фрактальной б) производных



$$\left(\frac{d}{d\chi}\right)_D \chi^n = C_\eta^{-1}\,\chi^{n+D}. \qquad (8)$$

Здесь мы не будем приводить очевидные соображения отличия фрактальных интегралов и дифференциалов [11] от дробного интегродифференциального исчисления [12]. Укажем только, что во фрактальной геометрии наличествует неопределенный множитель C_η, отсутствующий при дробном интегрировании и дифференцировании.

Обычно геометрическим образом производной служит касательная к некоторой линии. Однако фрактальная кривая изломана в каждой точке и не имеет касательных, поэтому необходима другая наглядная картина. Такое наглядное построение существует и состоит в следующем. Взяв производную от площади круга, мы получаем длину окружности. Таким образом, производная “вырезала” внутреннюю часть объекта, оставив только границу с внешней областью. Фрактальная производная аналогично “вырезает” внутреннюю часть ветвящихся структур, оставляя только области пересечения ветвлений с внешней частью пространства, в которую вложена сама структура, рис. 1. “Объем” L разветвленных структур дается формулой (3). Фрактальная производная от L даст число пересечений ветвлений с границей области, а именно

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{d}{dR}\right)^D R^D = C_\eta \cdot R^{2(D-1)}, \qquad (9)$$

где мы использовали правило (8). Здесь введен нормировочный множитель $1/R^2$, представляющий собой единственную размерную величину. Со временем число ветвлений увеличивается и можно считать величины N на t пропорциональными друг другу. Тогда из (9) следует соотношение (5) с показателем

$$h = 2(D-1). \qquad (10)$$

Использование результата (10) состоит в следующем. В разветвленной структуре выделяем замкнутую область и производим подсчет числа пересечений ветвлений с границей области. Эти измерения позволяют найти величину h, а вместе с нею, согласно (10), и фрактальную размерность.

Вряд ли целесообразно в теоретической статье, какой является данная работа, приводить подробности измерений, они изложены в [13, 14]. Дополнительный материал, используемый при измерении фрактальной размерности стримерных каналов, взят из [15, 16]. Здесь приведем только результаты, относящиеся к фрактальной размерности и размерности блуждания. Так, для дельты рек Селенга и Волга соответственно: $D_C = 1.38 \pm 0.01$ и $h_C = 0.76 \pm 0.01$; $D_V = 1.72 \pm 0.02$ и $h_V = 1.44 \pm 0.02$. Для стримерных каналов, рассмотренных в [15], $D = 1.5 \div 1.53$ и $h = 1.01 \div 1.06$, для случая, описанных в [16], $D = 1.59$ и $h = 1.18$. Для ветвистого разряда молнии $D = 1.74$ и $h = 1.48$.

Таким образом, в статье рассмотрена задача определения фрактальной размерности разветвленных структур. Для измерения размерности предложены три метода, которые для дельты рек, стримерных каналов и ветвистых молний дали согласующие между собой результаты. Использование фрактальной производной позволило установить связь размерности блуждания с фрактальной размерностью. Следующей задачей может стать построение теории разветвленных структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. 254 с.

2. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
3. *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* Физика молнии и молниезащиты. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 320 с.
4. *Смирнов Б.М.* Физика фрактальных кластеров. - М.: Наука, 1991. С. 197.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. – М.: Наука, 1973. 208 с.
6. Фракталы в физике.// Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9-12 июля, 1985) – М.: Мир, 1988. 672 с.
7. *Richardson L.F.* // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1926. V. 110. P. 709.
8. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса // ДАН СССР **30**, 301 (1941). Р.299-303.
9. *Flory P.* Principles of Polymer Chemistry. – Cornell Univ. Press, Ithaca, N.Y. 1971.
10. *Крылов С.С., Любчич В.А.* Масштабная зависимость кажущегося сопротивления и фрактальная структура железистых кварцитов // Физика Земли, 2002. № 12. С. 14-21.
11. *Балханов В.К.* Введение в теорию фрактального исчисления. - Улан-Удэ.: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2001. 58 с.
12. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
13. *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* Фрактальная размерность руслового режима дельты Селенги // Водные ресурсы. Т.31. № 2. С. 165-169.
14. *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* Определение фрактальной размерности грозового разряда // “5 Российская конференция по атмосферному электричеству”, Владимир, 21-26 сент. 2003. Сб. трудов. С. 282- 284.
15. *Носков М.Д., Малиновский А.С., Закк М., Шваб А.Й.* Моделирование роста дендритов и частичных разрядов в эпоксидной смоле // ЖТФ, 2002. Т.72, вып. 2. С. 121-128.
16. *Попов Н.А.* Исследование пространственной структуры ветвящихся стримерных каналов коронного разряда // Физика плазмы, 2002. Т.28, № 7. С. 664-672.

Коротко об авторах

Балханов Василий Карлович – аспирант,
Башкуев Юрий Буддич – профессор, доктор технических наук,
Бурятский научный центр СО РАН, г. Улан-Удэ.

Д И С С Е Р Т А Ц И И

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	*Название работы*	*Специальность*	*Ученая степень*
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ГОРНОЙ ГЕОМЕХАНИКИ МАРКШЕЙДЕРСКОГО ДЕЛА – МЕЖОТРАСЛЕВОЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР ВНИМИ			
БОРИСОВ Алексей Валентинович	Разработка способов проведения и средств крепления широких выработок в зоне интенсивного проявления горного давления на шахтах Воркутинского месторождения	25.00.22	к.т.н.