УДК 531.8+681.51

Ю.А. Алюшин, П.М. Вержанский, М.Н. Калинкин

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ НАВИГАЦИОННОГО РОБОТА МОЩНОСТЬЮ ПРИВОДОВ ВЕДУЩИХ КОЛЕС

Для описания движения мобильного навигационного робота использован принцип суперпозиции с описанием движений в форме Лагранжа с наложением трех простых движений. Уравнения для скоростей и ускорений получены дифференцированием уравнений пространственного движения. Угловые скорости и ускорения ведущих колес использованы в качестве аргументов при расчете составляющих кинетической энергии поступательного и вращательного движения, скорости их изменения и мощности, подаваемой на ведущие колеса. Приведены примеры управления простыми и сложными движениями робота.

Ключевые слова: принцип суперпозиции движений в форме Лагранжа, кинетическая энергия, мощность приводов, ведущие колеса.

В последнее время навигационные роботы получают широкое распространение для работы в особо опасных условиях, в том числе в горной промышленности. Алгоритмы управления ими реализуются, как правило, на основе точных аналитических выражений, которые не требуют интегрирования дифференциальных уравнений и поэтому могут быть использованы при моделировании работы навигационных систем на продолжительных интервалах времени [1, 2]. В данной работе предложен один из возможных вариантов управления роботом через мощности независимых электроприводов колес с использованием описания движения в форме Лагранжа [3, 4].

Систему отсчета наблюдателя (рис. 1, *а*) принимаем так, чтобы в исходном состоянии оси ведущих колес робота были ориентированы вдоль оси *y*, а их пересечения с плоскостями симметрии колес имели координаты *A(c, b, r)* и *B(c, d, r)*. Движение робота в пространстве переменных Лагранжа можно рассматривать как наложение трех движений:

а) вращательного движения колес относительно собственных осей,

б) дополнительного вращения робота относительно оси, проходящей через произвольно выбранный полюс параллельно оси *z*, которое возникает за счет разности окружных скоростей ведущих колес,

в) поступательного движения полюса.

С учетом ориентации колес в исходном состоянии, вращение принадлежащих им частиц в плоскости *xOz* описывают уравнения

$$x = c + (\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi,$$

$$y = \beta, \qquad (1)$$

$$z = r - (\alpha - c)\sin\Delta\varphi + (\gamma - r)\cos\Delta\varphi,$$

где α, β, γ — лагранжевы (начальные) координаты рассматриваемой частицы по направлениям осей *x, y* и *z*, соответственно.

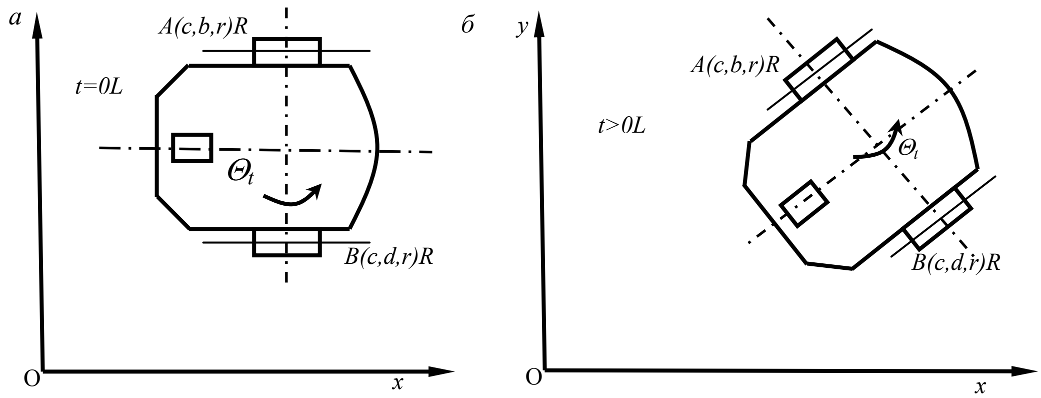


Рис. 1. Исходное (а) и текущее (b) положения навигационного робота

Разность угловых скоростей ведущих колес приводит к вращению относительно оси, параллельной оси z. В качестве полюса для описания этого вращательного движения можно принять точку А. Тогда уравнения внешнего наложенного движения принимают вид

$$x = c + (\alpha - c)\cos\Delta\theta - (\beta - b)\sin\Delta\theta,$$
$$y = b + (\alpha - c)\sin\Delta\theta + (\beta - b)\cos\Delta\theta, \tag{2}$$
$$z = \gamma.$$

Используя принцип суперпозиции, получаем уравнения совмещенного движения для любых частиц колес А и В с начальными координатами (α, β, γ)

$$x = c + [(\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\cos\Delta\theta - (\beta - b)\sin\Delta\theta,$$
$$y = b + [(\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\sin\Delta\theta + (\beta - b)\cos\Delta\theta, \tag{3}$$
$$z = r - (\alpha - c)\sin\Delta\varphi + (\gamma - r)\cos\Delta\varphi.$$

Для частиц колеса А уравнения (3) за счет $\beta = b$ принимают более простой вид

$$x = c + [(\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\cos\Delta\theta,$$
$$y = b + [(\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\sin\Delta\theta, \tag{3а}$$
$$z = r - (\alpha - c)\sin\Delta\varphi + (\gamma - r)\cos\Delta\varphi.$$

Расстояние от любой частицы колеса B до точки A остается постоянным

$$(x - c)^2 + (y - b)^2 + (z - r)^2 =$$
$$\left\{[(\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\cos\Delta\theta - (\beta - b)\sin\Delta\theta\right\}^2 +$$
$$+\left\{[(\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\sin\Delta\theta + (\beta - b)\cos\Delta\theta\right\}^2 +$$
$$+\left[-(\alpha - c)\sin\Delta\varphi + (\gamma - r)\cos\Delta\varphi\right]^2 =$$
$$= [(\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]^2 + (\beta - b)^2 + \left[-(\alpha - c)\sin\Delta\varphi + (\gamma - r)\cos\Delta\varphi\right]^2 =$$

$= (\alpha - c)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - r)^2$

или $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - r)^2 = (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - r)^2$. (4)

Траектории точек A и B, ассоциируемых с осями колес, после наложения движений «а» и «б», можно найти по приведенным уравнениям с учетом указанных выше значений переменных Лагранжа. Точка A, которая принята в качестве полюса, остается неподвижной и сохраняет координаты (см. ур - ие 3а) $x = c$, $y = b$, $z = r$, а точка B перемещается по окружности (см. ур-ие 3)

$$x = c - (d - b)\sin\Delta\theta\,,\ \ y = b + (d - b)\cos\Delta\theta\,,\ \ z = r \tag{5}$$

или $(x - c)^2 + (y - b)^2 = (d - b)^2$, $z = r$. (5а)

Будем считать, что точка A совершает поступательное движение по некоторой плоской кривой

$$x = x(t)\,,\ \ x = x(t)\,,\ \ z = r = const \neq z(t)\,. \tag{6}$$

Платформа и ось колеса B в этом внешнем движении также перемещаются поступательно в соответствии с уравнениями

$$x = \alpha + u_A(t)\,,\ \ y = \beta + v_A(t)\,,\ \ z = r = const \neq z(t)\,. \tag{7}$$

Особо отметим, что если заданы угловые скорости, тогда компоненты перемещения точки A должны быть получены интегрированием линейных скоростей по времени. Поэтому в дальнейшем сначала находим скорости

$$(x_t)_A = \psi_t r\cos\theta\,,\ \ (y_t)_A = \psi_t r\sin\theta\,, \tag{8}$$

а затем перемещения

$$u_A(t) = \int_0^t (x_t)_A dt = r\int_0^t \psi_t \cos[\theta(t)]dt\,,\ \ v_A(t) = \int_0^t (y_t)_A dt = r\int_0^t \psi_t \sin[\theta(t)]dt\,. \tag{9}$$

Для простейших вариантов движения, например, для движения по кругу, интегрирование может быть выполнено в явном виде (см. ниже).

Уравнения совмещенного движения можно записать через компоненты вектора перемещения

$$\begin{aligned} x &= a + u(t) + [c - a + (\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\cos\Delta\theta - (\beta - b)\sin\Delta\theta\,,\\ y &= b + v(t) + [c - a + (\alpha - c)\cos\Delta\varphi + (\gamma - r)\sin\Delta\varphi]\sin\Delta\theta + (\beta - b)\cos\Delta\theta\,,\\ z &= r - (\alpha - c)\sin\Delta\varphi + (\gamma - r)\cos\Delta\varphi\,. \end{aligned} \tag{10}$$

При одновременном вращении обоих колес кинематические связи сводятся к дифференциальным соотношениям

$$r(d\varphi - d\psi) = Ld\theta \ \text{ или } \ d\theta = (r/L)(d\varphi - d\psi) = (r/L)(\varphi_t - \psi_t)dt\,.$$

Отсюда находим

$$\theta_t = (r/L)(\varphi_t - \psi_t) \ \text{ при } \ L = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = |\,b - d\,|\,. \tag{11}$$

Если изменение углов и угловых скоростей колес во времени будет известно, решение сводится к последовательному определению кинематических характеристик вращательного, а затем поступательного движения, мощности, момента и сил на осях ведущих колес

$$\theta_t = \frac{r}{L}(\varphi_t - \psi_t)\,,\ \theta_{tt} = \frac{r}{L}(\varphi_{tt} - \psi_{tt})\,,\ \theta = \theta_0 + \frac{r}{L}(\varphi - \psi)\,, \tag{12}$$

$$u_A(t) = x_A - \alpha_A = r\int_0^t \psi_t \cos\theta dt\,,\ v_A(t) = y_A - \beta_A = r\int_0^t \psi_t \sin\theta dt\,. \tag{13}$$

Все последующие соотношения представлены через независимые функции угловых скоростей или углов поворота, которые определяют поведение робота в любой момент времени.

Ниже приведены уравнения для скоростей и ускорений осей колес и центра масс платформы симметричного робота при $r_A = r_B = r$, $\alpha_C = 0,5(\alpha_A + \alpha_B)$, $\beta_C = 0,5(\beta_A + \beta_B)$:

точка A

$$(x_t)_A = \psi_t r\cos\theta\,,\ (y_t)_A = \psi_t r\sin\theta\,,$$

$$(x_{tt})_A = \psi_{tt} r\cos\theta - \psi_t\theta_t r\sin\theta = \psi_{tt} r\cos[\frac{r}{L}(\varphi-\psi)] - \frac{r^2}{L}\psi_t(\varphi_t - \psi_t)\sin[\frac{r}{L}(\varphi-\psi)]\,,$$

$$(x_{tt})_A = r\left\{\psi_{tt}\cos[\frac{r}{L}(\varphi-\psi)] - \frac{r}{L}\psi_t(\varphi_t-\psi_t)\sin[\frac{r}{L}(\varphi-\psi)]\right\},$$

$$(y_{tt})_A = \psi_{tt} r\sin\theta + \psi_t\theta_t r\cos\theta\,,$$

$$(y_{tt})_A = r\left\{\psi_{tt}\sin[\frac{r}{L}(\varphi-\psi)] + \frac{r}{L}\psi_t(\varphi_t-\psi_t)\cos[\frac{r}{L}(\varphi-\psi)]\right\},$$

$$x_A = \alpha_A + r\int_0^t \psi_t\cos\theta dt\,,\ y_A = \beta_A + r\int_0^t \psi_t\sin\theta dt\,,$$

точка B

$$x_B = x_A - (d-b)\sin\Delta\theta\,,\ y_B = y_A + (d-b)\cos\Delta\theta\,,$$

$$(x_t)_B = (x_t)_A - \theta_t(y_B - y_A) = (x_t)_A - \theta_t(d-b)\cos\theta\,,$$

$$(y_t)_B = (y_t)_A + \theta_t(x_B - x_A) = (y_t)_A - \theta_t(d-b)\sin\theta\,,$$

$$(x_{tt})_B = (x_{tt})_A - \theta_{tt}(d-b)\cos\theta + \theta_t^2(d-b)\sin\theta\,,$$

$$(y_{tt})_B = (y_{tt})_A - \theta_{tt}(d-b)\sin\theta - \theta_t^2(d-b)\cos\theta\,,$$

$$(x_{tt})_B = (x_{tt})_A - \theta_{tt}(y_B - y_A) - \theta_t^2(x_B - x_A)\,,$$

$$(y_{tt})_B = (y_{tt})_A + \theta_{tt}(x_B - x_A) - \theta_t^2(y_B - y_A)\,.$$

Для точки C из простых геометрических соотношений находим

$$x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B)\,,\ y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B)\,,$$

$$(x_t)_C = \frac{1}{2}[(x_t)_A + (x_t)_B],\ (y_t)_C = \frac{1}{2}[(y_t)_A + (y_t)_B],$$

$$(x_{tt})_C = \frac{1}{2}[(x_{tt})_A + (x_{tt})_B],\ (y_{tt})_C = \frac{1}{2}[(y_{tt})_A + (y_{tt})_B].$$

Составляющие кинетической энергии, характеризующие поступательное ($E_{кп}$) и вращательное ($E_{кv}$) движение колес и платформы, а также скорости их изменения ($W_{кп}$, $W_{кv}$) для каждого элемента робота определяют уравнения:

колесо A

$$(E_{kn})_A = 0{,}5m_A(r\psi_t)^2,\ (E_{kv})_A = 0{,}5J_A(\psi_t)^2$$

$$(W_{kn})_A = m_A(x_t x_{tt} + y_t y_{tt})_A = 0{,}5m_A r^2(\psi_t^2)_t = m_A r^2\psi_t\psi_{tt},$$

$$(W_{kv})_A = 0{,}5J_A(\psi_t^2)_t = J_A\psi_t\psi_{tt},$$

$$(W_k)_A = (m_A r^2 + J_A)\psi_t\psi_{tt} = J_{PA}\psi_t\psi_{tt},$$

колесо B

$$(E_{kn})_B = 0{,}5m_B(x_t^{\,2} + y_t^{\,2})_B = 0{,}5m_B[r^2\psi_t^2 + (d-b)^2\theta_t^2 - 2r(d-b)\psi_t\theta_t],$$

$$(E_{kv})_B = 0{,}5J_B(\varphi_t^2),$$

$$(W_{kn})_B = m_B(x_t x_{tt} + y_t y_{tt})_B = m_B\left\{r^2\psi_t\psi_{tt} + (d-b)^2\theta_t\theta_{tt} - 2r(d-b)(\theta_{tt}\psi_t + \theta_t\psi_{tt})\right\},$$

или $(W_{kn})_B = m_B\varphi_t r^2[\varphi_{tt} - \psi_{tt}(1 + \frac{d-b}{L})] + m_B\psi_t r^2(1 + \frac{d-b}{r})(2\psi_{tt} - \varphi_{tt})$,

$$(W_{kv})_B = 0{,}5J_B(\varphi_t^2)_t = J_B\varphi_t\varphi_{tt},$$

платформа C

$$(E_{kn})_C = 0{,}5m_C(x_t^{\,2} + y_t^{\,2})_C = (1/8)m_C\left\{\left[2(x_t)_A - \theta_t(y_B - y_A)\right]^2 + \left[2(y_t)_A + \theta_t(x_B - x_A)\right]^2\right\},$$

$$(E_{kn})_C = \frac{1}{8}m_C[4(x_t^{\,2} + y_t^{\,2})_A - 4\psi_t\theta_t r(d-b) + L^2\theta_t^2],\ (E_{kv})_C = 0{,}5J_C\theta_t^2,$$

$$(W_{kn})_C = \frac{1}{2}m_C\varphi_t r^2[\frac{1}{2}\varphi_{tt} - \psi_{tt}(\frac{1}{2} + \frac{d-b}{L})] + \frac{1}{2}m_C\psi_t r^2[-\varphi_{tt}(\frac{1}{2} + \frac{d-b}{L}) + \psi_{tt}(\frac{5}{2} + 2\frac{d-b}{L})],$$

$$(W_{kv})_C = J_C\theta_t\theta_{tt} = \frac{r^2}{L^2}(\varphi_t - \psi_t)(\varphi_{tt} - \psi_{tt})J_C = \frac{r^2}{L^2}J_C[\varphi_t(\varphi_{tt} - \psi_{tt}) - \psi_t(\varphi_{tt} - \psi_{tt})].$$

При движении по прямой ($\varphi_t = \psi_t$) выполняются соотношения

$$(W_{kn})_A = m_A r^2\psi_t\psi_{tt} = (W_{kn})_B = m_B r^2\varphi_t\varphi_{tt},\ (W_{kn})_C = m_C r^2\psi_t\psi_{tt} = m_C r^2\varphi_t\varphi_{tt},$$

$$(W_{kv})_A = J_A\psi_t\psi_{tt} = (W_{kv})_B = J_B\varphi_t\varphi_{tt},\ (W_{kv})_C = 0.$$

Энергетический баланс

$$W_e = M_A\psi_t + M_B\varphi_t = (W_{kn} + W_{kv})_A + (W_{kn} + W_{kv})_B + (W_{kn} + W_{kv})_C \qquad (14)$$

должен выполняться при любом соотношении угловых скоростей

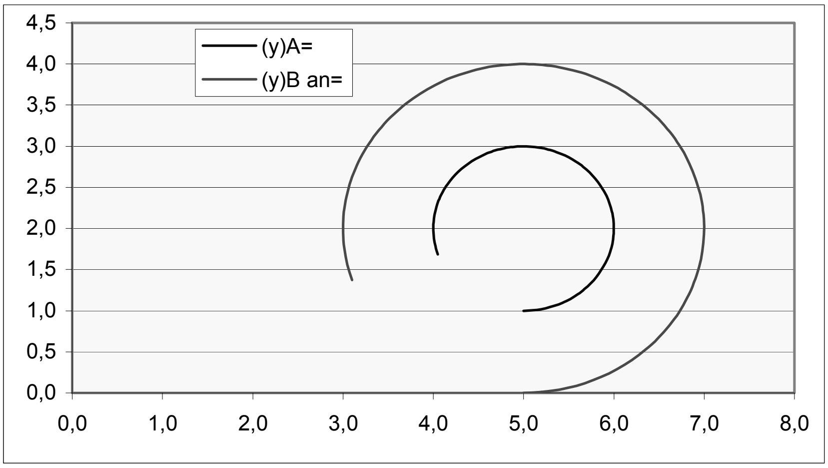


Рис. 2. Движение навигационного робота по кругу

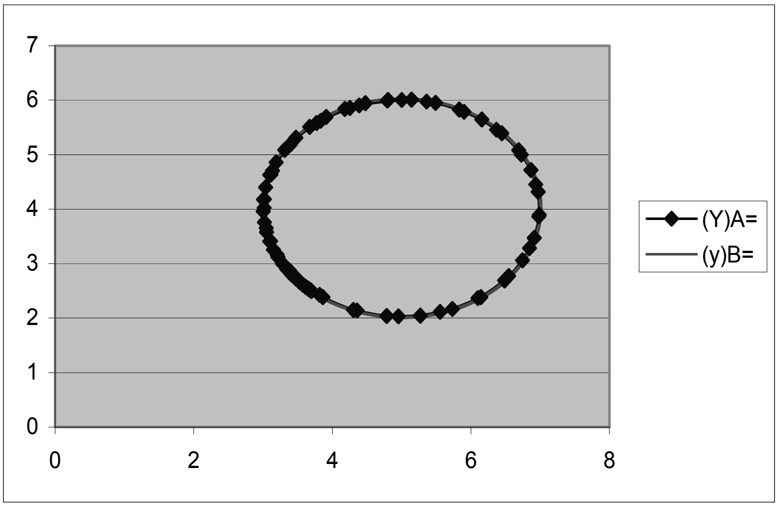


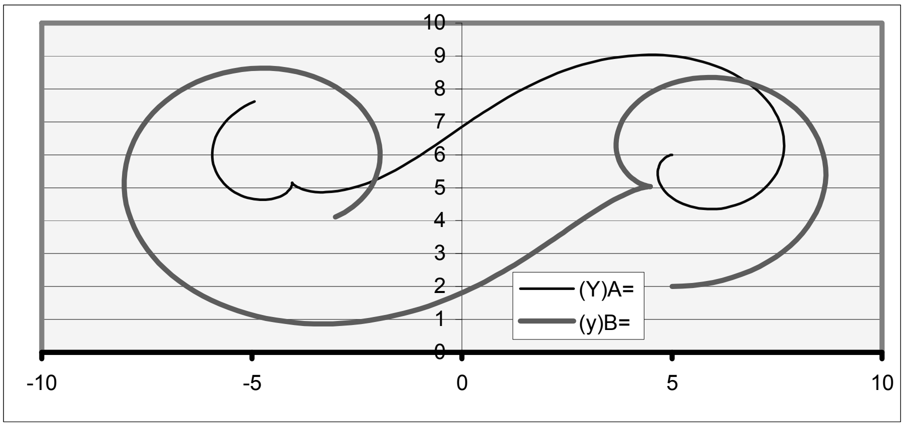
Рис. 3. Вращение навигационного робота относительно центра масс

$$W_e = m_A r^2 \psi_t \psi_{tt} + m_B r^2 \varphi_t [\varphi_{tt} - \psi_{tt}(1 + \frac{d-b}{L})] + m_B r^2 \psi_t (1 + \frac{d-b}{L})(2\psi_{tt} - \varphi_{tt}) +$$
$$+ \frac{1}{2} m_C r^2 \varphi_t [\frac{1}{2}\varphi_{tt} - \psi_{tt}(\frac{1}{2} + \frac{d-b}{L})] + \frac{1}{2} m_C r^2 \psi_t [-\varphi_{tt}(\frac{1}{2} + \frac{d-b}{L}) + \psi_{tt}(\frac{5}{2} + 2\frac{d-b}{L})] +$$
$$+ J_A \psi_t \psi_{tt} + J_B \varphi_t \varphi_{tt} + \frac{r^2}{L^2} J_C (\varphi_t - \psi_t)(\varphi_{tt} - \psi_{tt}) .$$

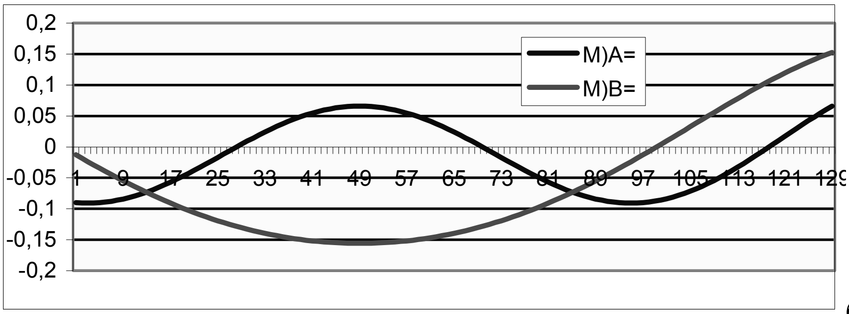
Обобщенные силы в виде моментов на приводных валах можно найти по уравнениям

$$M_A = m_A r^2 \psi_{tt} + m_B r^2 (1 + \frac{d-b}{L})(2\psi_{tt} - \varphi_{tt}) + \frac{1}{2} m_C r^2 [-\varphi_{tt}(\frac{1}{2} + \frac{d-b}{L}) + \psi_{tt}(\frac{5}{2} + 2\frac{d-b}{L})] +$$

а



б



б)

Рис. 4. Движение робота по заданной траектории (а) и соотношения между моментами на ведущих колесах (б)

$$+J_A\psi_{tt}-\frac{r^2}{L^2}J_C(\varphi_{tt}-\psi_{tt}),$$

$$M_B=m_Br^2[\varphi_{tt}-\psi_{tt}(1+\frac{d-b}{L})]+\frac{1}{2}m_Cr^2[\frac{1}{2}\varphi_{tt}-\psi_{tt}(\frac{1}{2}+\frac{d-b}{L})]+J_B\varphi_{tt}+\frac{r^2}{L^2}J_C(\varphi_{tt}-\psi_{tt}).$$

Проверку расчета проводим по выполнению баланса (14)

$$M_A\psi_t+M_B\varphi_t=(W_{kn}+W_{kv})_A+(W_{kn}+W_{kv})_B+(W_{kn}+W_{kv})_C.$$

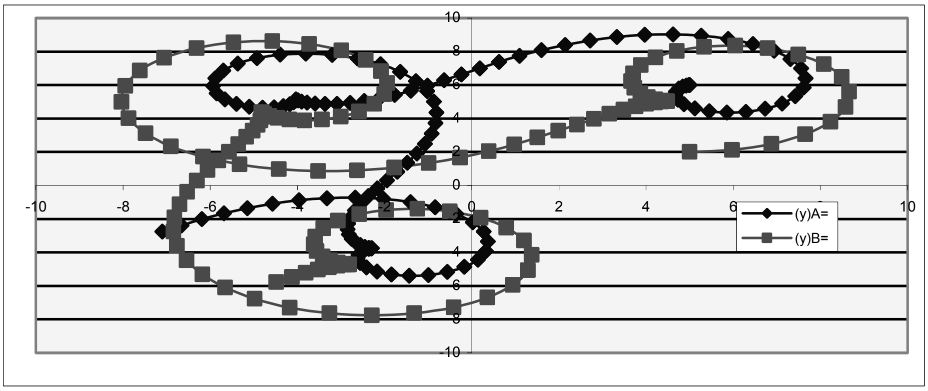
Расчеты проведены для нескольких вариантов изменения углов поворота и угловых скоростей ведущих колес.

Вариант 1:

$$\varphi=A_0+A_1\sin\frac{\pi t}{2T_1},\ \varphi_t=\frac{\pi}{2T_1}A_1\cos\frac{\pi t}{2T_1},\ \varphi_{tt}=-\left(\frac{\pi}{2T_1}\right)^2A_1\sin\frac{\pi t}{2T_1},$$

$$\psi=B_0+B_1\cos\frac{\pi t}{2T_2},\ \psi_t=-\frac{\pi}{2T_2}B_1\sin\frac{\pi t}{2T_2},\ \psi_{tt}=-\left(\frac{\pi}{2T_2}\right)^2B_1\cos\frac{\pi t}{2T_2}.$$

а



б

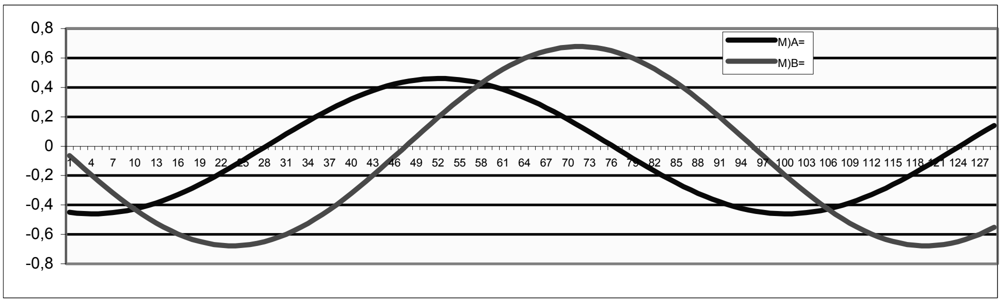


Рис. 5. Траектории точек А и В (а) при соотношении между моментами (б)

Если углы и угловые скорости изменяются пропорционально, например

$\psi = k\varphi$,

тогда получаем движение «по кругу» (рис. 2) с соотношениями

$\psi_t = k\varphi_t$, $\psi_{tt} = k\varphi_{tt}$,

$$\varphi = A_0 + A_1 \sin\frac{\pi t}{2T}, \ \varphi_t = \frac{\pi}{2T} A_1 \cos\frac{\pi t}{2T}, \ \varphi_{tt} = -\left(\frac{\pi}{2T}\right)^2 A_1 \sin\frac{\pi t}{2T},$$

$$\theta_t = \frac{r}{L}(\varphi_t - \psi_t) = \frac{r}{L}\varphi_t(1-k), \ \theta_{tt} = \frac{r}{L}(\varphi_{tt} - \psi_{tt}) = \frac{r}{L}\varphi_{tt}(1-k),$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{r}{L}(\varphi - \psi) = \theta_0 + \frac{r}{L}\varphi(1-k),$$

$$u_A(t) = x_A - \alpha_A = r\int_0^t \psi_t \cos\theta dt = rk\int_0^t \cos\left[\frac{r}{L}(1-k)\varphi\right]d\varphi = L\frac{k}{1-k}\sin\left[\frac{r}{L}(1-k)\varphi\right],$$

$$v_A(t) = y_A - \beta_A = r\int_0^t \psi_t \sin\theta dt = rk\int_0^t \sin\left[\frac{r}{L}(1-k)\varphi\right]d\varphi = -L\frac{k}{1-k}\left\{\cos\left[\frac{r}{L}(1-k)\varphi\right] - 1\right\}.$$

При вращении относительно центра масс (рис. 3) моменты и угловые скорости на колесах А и В равны по величине, но противоположны по знаку. Результаты расчетов для более сложных траекторий, а также соотношения моментов на ведущих колесах приведены на рис. 4 и 5.

Разработанная математическая модель с окончательными зависимостями, записанными через независимые функции угловых скоростей, позволяет определить их по заданной траектории движения робота, а затем найти любые другие кинематические или динамические характеристики, в том числе необходимые для реализации заданного движения мощности, подаваемые на приводы независимых ведущих колес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буданов В.М., Девянин Е.А.* О движении колесных роботов.// ПММ. 2003. т.67, вып.2. С. 244—255.

2. *Карпов В.Э.* Об одной задаче управления мобильным роботом. Труды конференции по искусственному интеллекту. Обнинск, 2006. В. 3-т, т.2 – М: Физматлит, 2006 – 310 с., с. 719-727.

3. *Алюшин Ю.А.* Энергетические основы механики. Учеб. пособие для вузов: – М.: Машиностроение, 1999. — 192 с.

4. *Алюшин Ю.А.* Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа.// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. №3. С. 13-19.

5. *Алюшин Ю.А., Рачек В.М., Балахнина Е.Е.* Развитие методов моделирования в механике на основе общих уравнений динамики и описания движения в переменных Лагранжа. Отчет по НИР. Номер гос. регистр. 01.2.006.140822. Инв. номер ВНТИЦ 02200950038, 122 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Алюшин Юрий Алексеевич — доктор технических наук, профессор, alyushin7@gmail.com,
Вержанский Петр Михайлович — кандидат технических наук, доцент,
Калинкин Михаил Николаевич, студент
Московский государственный горный университет, ud@msmu.ru

РУКОПИСИ, ДЕПОНИРОВАННЫЕ В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «ГОРНАЯ КНИГА»

ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ МИРОВОГО РЫНКА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ. ВЛИЯНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА СТРАТЕГИЮ ПРЕДПРИЯТИЙ

(№ 932/01-13 от 26.10.12, 14 с.)

Сейфуллаева Маиса Эмировна — доктор экономических наук, профессор,
Андрашчикова Кристина — аспирант,
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова.

ESSENTIAL TRENDS OF THE GLOBAL IT MARKET. INFLUENCE OF THE IT ON STRATEGY OF THE ENTERPRISES

Seifullaeva Maisa Emirovna, Andrascikova Kristina