УДК 622.023

М.С. Плешко

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АНКЕРНО-БЕТОННОЙ КРЕПИ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТВОЛА С ПОРОДНЫМ МАССИВОМ

Представлен аналитический метод оценки влияния анкеров на напряженно-деформированное состояние системы «монолитная бетонная крепь — породный массив» в вертикальных стволах.

Ключевые слова: вертикальный ствол, анкерно-бетонная крепь, напряженно-деформированное состояние.

В настоящее время более 90 % вертикальных стволов закреплено монолитной бетонной крепью. Одним из перспективных направлений повышения несущей способности этого вида крепления является опережающая или последующая установка анкеров, которая приводит к изменению напряженно-деформированного состояния системы «крепь — массив» в процессе совместного взаимодействия.

Для определения влияния системы анкеров на напряженно-деформированное состояние крепи и массива воспользуемся решением задачи теории упругости о действии сосредоточенной силы в упругой плоскости, ослабленной круглым отверстием.

В произвольной точке z_0 области $|z| \geq r_1$, имеющей координаты (r_0, θ_0), под углом θ_1 к действительной оси приложим сосредоточенную силу Q (рис. 1). Она обусловлена возникновением натяжения анкера и определяется с учетом технологии работ.

Из теории упругости [1] известны функции комплексных потенциалов φ и ψ, характеризующие напряженно-деформируемое состояние бесконечной плоскости от действия сосредоточенной силы. В нашем случае эти потенциалы имеют вид

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(\chi + 1)} \ln(z - z_0) + \varphi_0(z),$$

$$\psi(z) = \chi \frac{X + iY}{2\pi(\chi + 1)} \ln(z - z_0) +$$

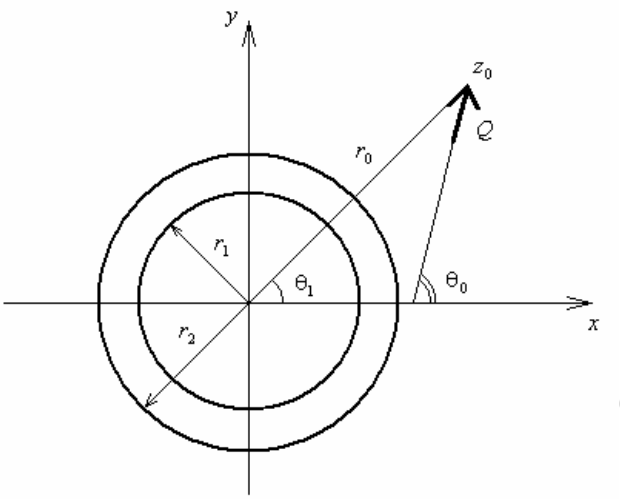

Рис. 1. Расчетная схема

$$+\frac{X+iY}{2\pi(\chi+1)}\cdot\frac{\bar{z}_0}{z-z_0}+\psi_0(z),$$

где X, Y — проекции силы Q на действительную и мнимую оси соответственно; $\chi = 3-4\nu$.

Потенциалы $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, аддитивно входящие в выражения (1) определяются в зависимости от дополнительных условий.

В работе [2] показано, что в случае действия сосредоточенной силы в бесконечной плоскости, ослабленной круглым отверстием, комплексные потенциалы φ и ψ принимают вид

$$\varphi(\xi)=A(\chi)\ln(\xi-\xi_0)-\bar{B}(\chi)\ln\left(1-\frac{1}{\bar{\xi}_0\xi}\right)-\bar{A}(\chi)\frac{1-\rho_0^2}{\bar{\xi}_0^2\left(1-\bar{\xi}_0\xi\right)};$$

$$\psi(\xi)=B(\chi)\ln(\xi-\xi_0)-A(\chi)\left[\frac{\bar{\xi}_0}{\xi-\xi_0}-\frac{1}{\xi_0\xi}\right]-\bar{B}(\chi)\left[\frac{\bar{\xi}_0}{\xi(1-\xi_0\xi)}-\frac{1}{\xi^2}\right]-$$

$$-\bar{A}(\chi)\left[\ln\left(1-\frac{1}{\bar{\xi}_0\xi}\right)+\frac{1-\rho_0^2}{\bar{\xi}_0\xi\left(1-\bar{\xi}_0\xi\right)^2}\right],$$

где

$$\xi=\frac{z}{r_1},$$

$$A(\chi)=-\frac{Q\exp(i\theta_1)}{2\pi(\chi+1)},$$

$$B(\chi)=\chi\frac{Q\exp(-i\theta_1)}{2\pi(\chi+1)},$$

$$Q=(X+iY)\exp(-i\theta_1)=(X-iY)\exp(i\theta_1),$$

r_1 — радиус отверстия.

В случае радиальной установки анкерного стержня направление силы Q нормально к контуру отверстия, следовательно $\theta_1=\theta_0$. Для переменной ξ контур отверстия представляется единичной окружностью $|\xi|=1$, а граница раздела двух сред окружностью $|\xi|=r$, $r=\frac{r_2}{r_1}$.

Введем новую переменную $\zeta=\frac{\xi}{r}$, тем самым, определив конформное отображение области $|\xi|\geq 1$ на область $|\zeta|\geq\frac{1}{r}$, причем точки внешнего контура кольца $1\leq|\xi|\leq r$ (точки границы раздела сред) отображаются на точки единичной окружности $|\zeta|=1$.

Для новой переменной комплексные потенциалы примут вид

$$\varphi(\zeta)=A(\chi)\ln\left(r(\zeta-\zeta_0)\right)-\bar{B}(\chi)\ln\left(1-\frac{1}{r^2\bar{\zeta}_0\zeta}\right)-\bar{A}(\chi)\frac{1-r^2\rho_0^2}{r^2\bar{\zeta}_0^2\left(1-r^2\bar{\zeta}_0\zeta\right)};$$

$$\psi(\zeta)=B(\chi)\ln\left(r(\zeta-\zeta_0)\right)-A(\chi)\left[\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta-\zeta_0}-\frac{1}{r^2\zeta_0\zeta}\right]-\bar{B}(\chi)\left[\frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta\left(1-r^2\zeta_0\zeta\right)}-\frac{1}{r^2\zeta^2}\right]-$$

$$-\bar{A}(\chi)\left[\ln\left(1-\frac{1}{r^2\bar{\zeta}_0\zeta}\right)+\frac{1-r^2\rho_0^2}{r^2\bar{\zeta}_0\zeta\left(1-r^2\bar{\zeta}_0\zeta\right)^2}\right].$$

Вектор смещений выражается через комплексные потенциалы следующим образом

$$u(\chi,\mu,\zeta)=\frac{1}{2\mu}\left[\chi\varphi(\zeta)-\xi\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}\right].$$

Для определения поля смещений во всей области $|\zeta|\geq\frac{1}{r}$ зададимся функцией перемещений в форме

$$U(\zeta)=\begin{cases}u(\chi_1,\mu_1,\zeta)+u_1(\zeta), & \frac{1}{r}\leq|\zeta|\leq 1,\\ u(\chi_2,\mu_2,\zeta)+u_2(\zeta), & |\zeta|\geq 1,\end{cases}$$

где $u_1(\zeta)$ — голоморфная функция в кольце $\frac{1}{r}\leq|\zeta|\leq 1$, $u_2(\zeta)$ — голоморфная функция во внешности единичной окружности $|\zeta|\geq 1$, причем $u_1(\zeta)=0$ в области $|\zeta|\geq 1$, $u_2(\zeta)=0$ в области $\frac{1}{r}\leq|\zeta|\leq 1$.

При $E_1=E_0$, $\nu_1=\nu_0$ функции $u_1(\zeta)$, $u_2(\zeta)$ всюду равны нулю.

Условие непрерывности смещений на границе раздела $|\zeta|=1$ имеет вид

$$u(\chi_1,\mu_1,\zeta)+u_1(\zeta)=u(\chi_2,\mu_2,\zeta)+u_2(\zeta).$$

Обозначим точку единичной окружности через $\sigma=\exp(i\theta)$, тогда контурное условие будет иметь вид

$$u_1(\sigma)=\Delta u(\sigma)+u_2(\sigma),$$

где $\Delta u_1(\sigma)=u(\chi_2,\mu_2,\sigma)-u(\chi_1,\mu_1,\sigma)$.

Из этого условия по интегральной формуле Коши [1] определяем функции $u_1(\zeta)$, $u_2(\zeta)$ следующим образом

$$u_1(\zeta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Delta u}{\sigma-\zeta}d\sigma, & \frac{1}{r}\leq|\zeta|\leq 1,\\ 0, & |\zeta|\geq 1;\end{cases}$$

$$u_2(\zeta)=\begin{cases}0, & \frac{1}{r}\le|\zeta|\le 1,\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Delta u}{\sigma-\zeta}d\sigma, & |\zeta|\ge 1.\end{cases}$$

Представим функцию $\Delta u(\sigma)$ следующим образом

$$\Delta u=\sum_{j}^{8}a_j\cdot f_j\ ,$$

где $a_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\chi_0}{\mu_0}A(\chi_0)-\frac{\chi_1}{\mu_1}A(\chi_1)\right),$

$$a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\chi_0}{\mu_0}\bar{B}(\chi_0)-\frac{\chi_1}{\mu_1}\bar{B}(\chi_1)\right),$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}B(\chi_0)-\frac{1}{\mu_1}B(\chi_1)\right),$$

$$a_4=-\bar{a}_3\,,$$

$$a_5=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}A(\chi_0)-\frac{1}{\mu_1}A(\chi_1)\right),$$

$$a_6=-\bar{a}_5\,,$$

$$a_7=a_3\,,$$

$$a_8=-a_5\,,$$

$$f_1=\ln\left(r(\sigma-\zeta_0)\right),$$

$$f_2=-\ln\left(1-\frac{1}{r^2\bar{\zeta}_0\cdot\sigma}\right),$$

$$f_3=\frac{1-r^2\rho_0^2}{r^2\bar{\zeta}_0^2\left(1-r^2\bar{\zeta}_0\cdot\sigma\right)},$$

$$f_4=\ln\left(\frac{r\left(1-\bar{\zeta}_0\cdot\sigma\right)}{\sigma}\right),$$

$$f_5=-\ln\left(1-\frac{\sigma}{r^2\bar{\zeta}_0}\right),$$

$$f_6=\frac{\left[\left(1-r^2\right)\bar{\zeta}_0\cdot\sigma+r^2\rho_0^2-1\right]\cdot\sigma}{r^2\bar{\zeta}_0\left(1-\bar{\zeta}_0\cdot\sigma\right)},$$

$$f_7=\frac{\left(1-r^2\right)\cdot\sigma^3}{r^2\left(\zeta-r^2\zeta_0\right)},$$

$$f_8 = \frac{\left(1-r^2\right)\left(1-r^2\rho_0^2\right)\cdot\sigma^3}{r^2\zeta_0\left(\sigma-r^2\zeta_0\right)}.$$

Значение интегралов типа Коши от функций f_j, $j=\overline{1,8}$ в области $\frac{1}{r}\le|\zeta|\le 1$ обозначим через F_j^{in}, а в области $|\zeta|\ge 1$ — через F_j^{ex}. Таким образом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_j}{\sigma-\zeta}d\sigma = \begin{cases} F_j^{in}, & \frac{1}{r}\le|\zeta|\le 1, \\ F_j^{ex}, & |\zeta|\ge 1. \end{cases}$$

Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Delta u}{\sigma-\zeta}d\sigma = \begin{cases} \sum_{j=1}^{8} a_j F_j^{in}, & \frac{1}{r}\le|\zeta|\le 1, \\ \sum_{j=1}^{8} a_j F_j^{ex}, & |\zeta|\ge 1. \end{cases}$$

Пользуясь правилами вычисления интегралов типа Коши [1], определим функции F_j^{in} и F_j^{ex}, $j=\overline{1,8}$:

$$F_1^{in} = \ln\left(r\left(\zeta-\zeta_0\right)\right),$$

$$F_1^{ex} = 0,$$

$$F_2^{in} = 0,$$

$$F_2^{ex} = \ln\left(1-\frac{1}{r^2\overline{\zeta}_0\cdot\zeta}\right),$$

$$F_3^{in} = \begin{cases} \dfrac{1-r^2\rho_0^2}{r^2\overline{\zeta}_0^2\left(1-r^2\overline{\zeta}_0\cdot\zeta\right)}, & \rho_0\le\dfrac{1}{r^2}, \\ 0, & \rho_0>\dfrac{1}{r^2}, \end{cases}$$

$$F_3^{ex} = \begin{cases} 0, & \rho_0\le\dfrac{1}{r^2}, \\ -\dfrac{1-r^2\rho_0^2}{r^2\overline{\zeta}_0^2\left(1-r^2\overline{\zeta}_0\cdot\zeta\right)}, & \rho_0>\dfrac{1}{r^2}, \end{cases}$$

$$F_4^{in} = \ln\left(-r\overline{\zeta}_0\right),$$

$$F_4^{ex} = -\ln\left(\frac{r\left(1-\overline{\zeta}_0\cdot\zeta\right)}{\zeta}\right)+\ln\left(-r\overline{\zeta}_0\right),$$

$$F_5^{in} = -\ln\left(1-\frac{\zeta}{r^2\overline{\zeta}_0}\right),$$

$$F_5^{ex} = 0,$$

$$F_6^{in} = \begin{cases} \dfrac{\left[\left(1-r^2\right)\overline{\zeta}_0 \cdot \zeta + r^2\rho_0^2 - 1\right]\cdot \zeta}{r^2\overline{\zeta}_0^2\left(1-r^2\overline{\zeta}_0\cdot\zeta\right)}, & \rho_0 \le 1, \\ -\dfrac{\left(1-r^2\right)\overline{\zeta}_0\cdot\zeta + r^2\left(\rho_0^2-1\right)}{r^2\overline{\zeta}_0^2}, & \rho_0 > 1, \end{cases}$$

$$F_6^{ex} = \begin{cases} 0, & \rho_0 \le 1, \\ \dfrac{1-r^2\rho_0^2}{\overline{\zeta}_0^2\left(1-\overline{\zeta}_0\cdot\zeta\right)}, & \rho_0 > 1, \end{cases}$$

$$F_7^{in} = \begin{cases} \dfrac{\left(1-r^2\right)\left[r^4\zeta_0^2 + r^2\zeta_0\cdot\zeta + \zeta^2\right]}{r^2}, & \rho_0 \le \dfrac{1}{r^2}, \\ \dfrac{\left(1-r^2\right)\cdot\zeta^3}{r^2\left(\zeta - r^2\zeta_0\right)}, & \rho_0 > \dfrac{1}{r^2}, \end{cases}$$

$$F_7^{ex} = \begin{cases} -\dfrac{r^4\left(1-r^2\right)\zeta_0^3}{\zeta - r^2\zeta_0}, & \rho_0 \le \dfrac{1}{r^2}, \\ 0, & \rho_0 > \dfrac{1}{r^2}, \end{cases}$$

$$F_8^{in} = \begin{cases} -\dfrac{\left(1-r^2\right)\left(1-r^2\rho_0^2\right)\left[2r^2\zeta_0 + \zeta\right]}{r^2\zeta_0}, & \rho_0 \le \dfrac{1}{r^2}, \\ \dfrac{\left(1-r^2\right)\left(1-r^2\rho_0^2\right)\cdot\zeta^3}{r^2\left(\zeta - r^2\zeta_0\right)}, & \rho_0 > \dfrac{1}{r^2}, \end{cases}$$

$$F_8^{ex} = \begin{cases} \dfrac{r^2\left(1-r^2\right)\left(1-r^2\rho_0^2\right)\zeta_0}{\zeta - r^2\zeta_0}\left[3 + \dfrac{r^2\zeta_0}{\zeta - r^2\zeta_0}\right], & \rho_0 \le \dfrac{1}{r^2}, \\ 0, & \rho_0 > \dfrac{1}{r^2}. \end{cases}$$

Таким образом, определено поле смещений от действия сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке области $|\zeta| \ge \dfrac{1}{r}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707с.

2. *Завьялов Р.Ю.* Теория и методы расчета анкерной крепи протяженных выработок. — Тула, изд. ТулГУ, 2000. — 162 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

Плешко Михаил Степанович — кандидат технических наук, доцент,
e-mail mspleschko@rambler.ru,
Шахтинский институт Южно-Российского государственного технического университета (Новочеркасского политехнического института), siurgtu@ siurgtu.ru