УДК 51

А.В. Юденков, А.В. Романков

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Решение задачи Гильберта для бианалитических функций выражается в терминах броуновского движения. Этот подход соединяет теорию краевых задач для бианалитических функций с вероятностной теорией потенциала.

Ключевые слова: бианалитическая функция, задача Гильберта, теория упругости, изотропное тело.

Задача Гильберта для бианалитических функций была поставлена Ф.Д. Гаховым в 1949 году [1]. Данная задача с одной стороны обобщает задачу Гильберта для аналитических функций, с другой стороны включает в себя как частный случай первую основную задачу теории упругости для изотропного тела.

Дадим классическую постановку краевой задачи Гильберта для бианалитических функций.

Пусть D односвязная область, ограниченная контуром Г. Требуется найти бианалитическую в области D функцию

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) \tag{1}$$

по краевым условиям

$$\mathrm{Re}\left[(a_k(\sigma) - ib_k(\sigma))\frac{\partial F(\sigma)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}}\right] = C_k(\sigma),\ \sigma \in \Gamma\ . \tag{2}$$

Здесь $\varphi_k (k = 1,2)$ — аналитические компоненты; a_k, b_k, c_k – заданные на контуре Г действительные функции. Будем считать, что выполнены условия нормировки

$$a_k^2 + b_k^2 = 1\ .$$

Несложно видеть, что первая основная задача теории упругости для изотропного тела является частным видом задачи (2). Напомним, что краевые условия первой основной задачи теории упругости записываются следующим образом [3].

$$\mathrm{Re}\frac{\partial F}{\partial x} = C_1(\sigma); \qquad \mathrm{Re}\frac{\partial F}{\partial y} = C_2(\sigma). \tag{3}$$

Классическая задача Гильберта для бианалитических функций была рассмотрена в работах В.С.Рогожина, М.П.Ганина, К.М. Расулова. Достаточно полно основные методы решения задачи (2) и ее обобщений приведены в работах [5], [6].

Задача Гильберта для бианалитических функций (2) моделирует напряженное состояние упругого изотропного тела в случае, когда нагрузки, форма тела, упругие характеристики могут быть представлены детерминированными функция-

ми. Однако, во многих практических задачах указанные параметры носят случайный характер. Поэтому актуальной научной задачей является изменение постановки и методов решения задачи Гильберта таким образом, чтобы с ее помощью можно было определять случайные бианалитические функции.

В работе предлагается выразить решение задачи Гильберта для бианалитических функций в терминах броуновского движения. Этот подход соединяет теорию краевых задач для бианалитических функций с вероятностной теорией потенциала [2].

Сформулируем понятие X — бианалитических функций.

Определение 1. Функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ в области D ограниченной контуром Г называется X — бианалитической, если для всех $z \in D$ и всех открытых множеств W, для которых $\overline{W} \in D$, аналитические компоненты $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ представимы в следующем виде

$$\varphi_k(z) = U_k(x, y) + iV_k(x, y) = M(U_k(Y_{\tau_w}, Y_{\tau_w})) + iM(V_k(X_{\tau_w}, Y_{\tau_w})) = M\ (\varphi_k(z_{\tau_w})),$$

k=0,1. (4)

Здесь $M(f)$ — математическое ожидание случайной функции, τ_w – момент первого выхода двумерного броуновского процесса из множества w. Функции U_k и V_k связаны между собой соотношения Коши-Римана.

Лемма 1. Пусть F — X — бианалитическая функция в области D плоскости комплексного переменного z, A — характеристический оператор, тогда

$$A^2F = 0. \quad (5)$$

Обратно, если $F \in C^2(D)$ и $A^2F = 0$ в D, то функция F является X- бианалитической.

Доказательство.

Применим дважды к функции $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ характеристический оператор.

$$AF = \lim_{w \to z} \frac{M(F(z_{\tau_w})) - F(z)}{M(\tau_w)} = \varphi_1'(z);\ A^2F = \lim_{w \to z} \frac{M(\varphi_1'(z_{\tau_w})) - \varphi_1'(z)}{M(\tau_w)} = \Delta\varphi_1'(z) = 0.$$

Для доказательства обратного утверждения воспользуемся формулой Дынкина.

$$M(F(z_{\tau_w})) = \varphi_0(z) + \lim_{k \to \infty} M\left(\int_0^{\tau_w \wedge k} (A\varphi_0)(z_s)ds\right) +$$

$$+\bar{z} \cdot \lim_{k \to \infty} M\left(\int_0^{\tau_w \wedge k} (A\varphi_1)(z_s)ds + \varphi_1(z)\right) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$$

Для дальнейших исследований понадобиться следующее утверждение (см [4] стр. 216).

Лемма 2. Пусть $g(\sigma)$ — ограниченная измеримая функция на границе Г области D.

Тогда функция $U(x, y) = M\left[g(z_{\tau_w})\right], z \in Z$ является гармонической.

Рассмотрим задачу Гильберта в стохастической постановке, ограничившись случаем круговой области.

Требуется найти X — бианалитическую функцию $F(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ по краевому условию на единичной окружности L, ограничивающей круговую область D.

$$a_1(\sigma_{\tau_D}) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b_1(\sigma_{\tau_D}) \frac{\partial v}{\partial x} = c_1(\sigma_{\tau_D}); \qquad a_2(\sigma_{\tau_D}) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + b_2(\sigma_{\tau_D}) \frac{\partial v}{\partial y} = c_2(\sigma_{\tau_D}). \tag{6}$$

Здесь τ_D — первый момент выхода двумерного броуновского процесса из области D, $c_k(\sigma)(k = 1, 2)$ – действительные функции, заданные на контуре L, удовлетворяющие условия Гильберта вместе со своими производными; a_k, b_k – действительные функции удовлетворяющие условию Гельдера вместе с производными до (3-к) порядка включительно.

Граничные условия (6) выполняются почти наверное.

Учитывая, что $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}; \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

краевые условия (6) можно привести к следующему виду

$$\mathrm{Re}\left[(a_1(\sigma_{\tau_D}) - ib_2(\sigma_{\tau_D}))(\varphi_0' + \overline{\sigma_{\tau_D}}\varphi_1' + \varphi_1)\right] = c_1(\sigma_{\tau_D}), \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}\left[(a_2(\sigma_{\tau_D}) - ib_2(\sigma_{\tau_D}))(\varphi_0' + \overline{\sigma_{\tau_D}}\varphi_1' - \varphi_1)\right] = c_2(\sigma_{\tau_D}).$$

Сведем стохастическую задачу Гильберта для бианалитических функций к четырем стохастическим задачам Дирихле для X-аналитических функций.

Найдем регуляризирующие множители для задачи (7). Для этого решим следующую вспомогательную задачу:

$$P_k = \frac{\left|\sigma_{\tau_D}\right|^{x_k} e^{-\nu_k}}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \; v_k = arctg\frac{b_k}{a_k} - x_k \arg\sigma_{\tau_D}, \tag{8}$$

где $x_k = Jnd(a_k + ib_k)$.

Второе условие (8) представляет собой стохастическую задачу Дирихле для аналитических (гармонических) функций. Существование и единственность регуляризирующего множителя обеспечивается единственностью и существованием решения стохастической задачи Дирихле для гармонических функций.

Перейдем к решению стохастической задачи Гильберта для бианалитических функций.

Воспользуемся тем, что на окружности выполняется условие

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}. \tag{9}$$

Введем вспомогательные аналитические функции

$$\Phi_1(z) = \varphi_0'(z) + z^{-1}\varphi_1'(z) + \varphi_1(z), \; \Phi_2(z) = \varphi_0'(z) + z^{-1}\varphi_1'(z) - \varphi_1(z). \tag{10}$$

Перепишем краевые условия (7) в следующем виде

$$\mathrm{Re}\left[(a_1 - ib_1)\Phi_1\right] = C_1(\sigma_{\tau_D}), \; \mathrm{Re}\left[(a_2 - ib_2)\Phi_2\right] = C_2(\sigma_{\tau_D}). \tag{11}$$

Пусть p_k – регуляризирующие множители функций $a_k - ib_k$. Преобразуем уравнение (11)

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\Phi_1(\sigma_{\tau_D})}{x_1(\sigma_{\tau_D})}\right]=\frac{c_1(\sigma_{\tau_D})}{p_1(\sigma_{\tau_D})},\ \mathrm{Re}\left[\frac{\Phi_2(\sigma_{\tau_D})}{x_2(\sigma_{\tau_D})}\right]=\frac{c_2(\sigma_{\tau_D})}{p_2(\sigma_{\tau_D})}. \tag{12}$$

Краевые условия (12) представляют собой стохастические задачи Дирихле. Решение задач дается формулами [4].

$$\Phi_1(z)=\chi_1(z)(M(C^*{}_1(z_{\tau_D}))+i(\int_0^z-\frac{\partial M(C^*{}_1)}{\partial y}dx+\frac{\partial M(C^*{}_1)}{\partial x}dy))=\chi_1(z)S_1(z), \tag{13}$$

$$\Phi_2(z)=\chi_2(z)(M(C^*{}_2(z_{\tau_D}))+i(\int_0^z-\frac{\partial M(C^*{}_2)}{\partial y}dx+\frac{\partial M(C^*{}_2)}{\partial x}dy))=\chi_2 S_2(z).$$

Здесь $C_k^*=c_k/p_k$ (k=1,2).

Искомые X-аналитические функции найдем по формулам

$$\varphi_1(z)=\frac{\Phi_1(z)-\Phi_2(z)}{2},\ \varphi_0'(z)=\Phi_1(z)-\frac{1}{z}\varphi_1'(z)-\varphi_1(z). \tag{14}$$

Пусть теперь $x_k=Jnd(a_k+ib_k)>0$. В этом случае аналитические функции $\frac{\Phi_k(z)}{\chi_k(z)}$ имеют в начале координат полюс порядка x_k. В этом случае

$$\Phi_k(z)=\left[S_k(z)+Q_k(z)\right]\chi_k(z). \tag{15}$$

Здесь $Q_k(z)=\sum_{k=1}^{x_k}\left(c_k z^k-\overline{c_k}z^{-k}\right);c_1;\ldots;c_{x_n}$ — произвольные комплексные постоянные.

Пусть $x_k<0$. В этом случае стохастическая задача Гильберта для X-бианалитических функций безусловно разрешима в том, случае, если допустить, что искомые аналитические компоненты имеют в начале координат полюсы определенных порядков. Если рассматривать классический вариант задачи, в котором не допускаются особенности в области D, то следует потребовать, чтобы функции $S_k(z)$ имеют в начале координат нули — x_k порядка.

Разложим функцию $S_k(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z =0.

$$S_k(z)=S_k(0)+\frac{S_k'(0)}{1!}z+\ldots+\frac{S_k^n(0)}{n!}z^n+\ldots \tag{16}$$

Для разрешимости задачи Гильберта необходимо и достаточно выполнения условий

$$S_k(0)=0,\ S_k'(0)=0,\ S_k^{(x_k)}(0)=0. \tag{17}$$

Положим

$$S_k^{(j)}(0)=c_k^j+id_k^j,\ c_k^j=0\ (\mathrm{j}=1,\ldots,\ x_k),\ b_k^j=0. \tag{18}$$

Действительная часть функции $S_k(z)$ является гармонической функцией. Значит, она представима рядом Тейлора

$$U_k(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}C_{m.,n}^k\cdot x^m\cdot y^n. \tag{19}$$

Здесь $C_{m,n}^{k} = \left.\dfrac{\partial^{m+n} U_k}{\partial x^n \partial y^m}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$

Условия (18) будут равносильны следующим условиям

$$\left.\frac{\partial^{m+n} U_k}{\partial x^m \partial y^n}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0, (0 \le m+n \le x_k) \tag{20}$$

или $$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left(M\left(\frac{c_k(z_{\tau_d})}{p_k(z_{\tau_d})}\right)\right) = 0\,. \tag{21}$$

Случай, когда индексы краевых коэффициентов имеют разные знаки можно исследовать аналогично.

Сформулируем итоговый результат.

Теорема. Стохастическая задача Гильберта для бианалитических функций на окружности сводится к решению двух стохастических задач Дирихле для определения регуляризирующих множителей и двух независимых стохастических задач Дирихле для определения искомых аналитических компонент.

Число линейно независимых решений однородной задачи l и число условий разрешимости неоднородной задачи v связаны с индексами краевых коэффициентов соотношением

$$l - v = Jnd(a_1 - ib_1) + Jnd(a_2 - ib_2)\,, \tag{22}$$

т.е. стохастическая задача Гильберта для бианалитических функций является нётеровой.

Схема решения стохастической задачи Гильберта для бианалитических функций не меняется, если область D, отображается на внутренность единичного круга рациональными функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
2. *Дынкин Е.Б.* Основание теории марковских процессов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. — 226 с.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 511 с.
4. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 2003. — 406 с.
5. *Редкозубов С.А., Юденков А.В.* Задача Карлемана для полианалитических функций для областей сложной формы // Проблемы механики деформируемых тел и пород. — М.: Из-во МГГУ, 2001. — С. 263—270.
6. *Юденков А.В.* Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. — Смоленск: Смядынь, 2002. — 270 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Юденков А.В. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и высшей математики, Смоленская государственная сельскохозяйственная академия, e-mail: aleks-ydenkov@mail.ru,

Романков А.В. — главный технолог, производственное объединение «Кристалл», e-mail: aromankov@kristallsmolensk.com.