УДК 622.274: 519.3

А.В. Томилин

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА

Приведено описание основных соотношений геометрического структурного анализа, позволяющих найти объемную долю составляющей горной породы, а также среднюю величину и дисперсию двугранных углов между компонентами горной породы.

Ключевые слова: геометрический структурный анализ, объемная доля, средняя величина двугранных углов.

1. Применение геометрического структурного анализа для нахождения механических свойств горных пород

При нахождении механических свойств горных пород методами механики неоднородных горных пород перед исследователями возникают проблемы, такие как:

1. Сложность или даже невозможность определить, какая из имеющихся компонент является матрицей, в связи с их большим количеством и разнообразием форм.

Невозможность определить матрицу влияет на применение математической модели, позволяющей найти эффективные упругие модули для полиминеральных горных пород.

2. Необходимость определения двугранных углов между компонентами горной породы. Ориентация структурных и текстурных элементов в пространстве может быть сильно коррелированна, вследствие чего произойдет изменение математической модели применяемой в курсе механики неоднородных горных работ.

2 Объемная доля составляющих горной породы

Основным геометрическим соотношением необходимым при изучении физических свойств неоднородных горных пород является объемная доля включения горной породы.

Рассмотрим пространственную полиминеральную микроструктуру, состоящую из двух составляющих, единица объема которой в виде куба с ребром, равным 1 мм, такой куб схематически изображен на рисунке 2. Структура состоит из микрочастиц включения α внутри матрицы β. Долю включения α в объеме или суммарный объем всех микрочастиц этого включения в единице объема микроструктуры обозначаем $\sum V_\alpha$, мм^3/мм^3.

На передней грани рассматриваемого куба, площадь которой равна 1 мм^2, мы видим двумерную структуру горной породы, состоящую из тех же двух составляющих α и β. Долю площади, которую занимает компонента α, т. е. суммарную площадь всех сечений микрочастиц этой компоненты на единице площади двумерной структуры (на 1 мм^2 площади шлифа) обозначим $\sum S'_\alpha$ мм^2/мм^2.

Проведем большое число z равноотстоящих сечений, параллельных передней грани куба (рис. 2), и получим z плоскопараллельных пластинок толщиной $\Delta = 1/z$ каждая из которых имеет площадь 1 мм2. Долю площади, занятой компонентой α на этих сечениях, обозначим $\sum S'_{\alpha 1}, \sum S'_{\alpha 2}, ..., \sum S'_{\alpha z}$. Поскольку число сечений может быть сколь угодно большим, а толщина пластинок Δ

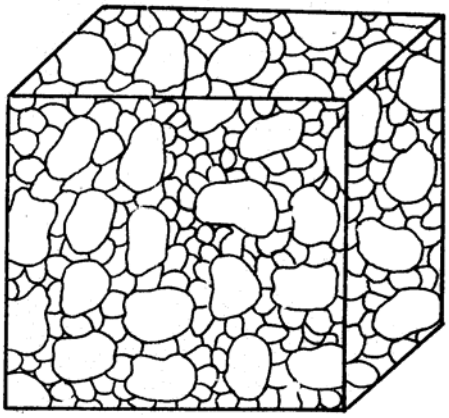

Рис. 1 Неравномерно-зернистая структура биминеральной горной породы

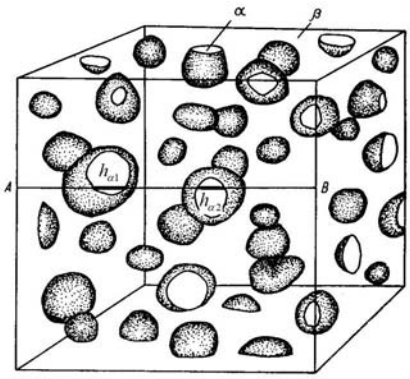

Рис. 2 Пространственная структура, состоящая из микрочастиц компоненты α в матрице β

сколь угодно малой, примем, что объем компоненты α внутри первой пластинки равен $\sum S'_{\alpha 1}$, во второй $\sum S'_{\alpha 2}$, в z-й $\sum S'_{\alpha z}$. Поэтому, учитывая что $\Delta = 1/z$, суммарный объем компоненты α внутри всех пластинок (1 мм^3 структуры) равен:

$$\sum V_\alpha = \Delta\sum S'_{\alpha 1} + \Delta\sum S'_{\alpha 2} + ... + \Delta\sum S'_{\alpha z} = \frac{\Delta\sum S'_{\alpha 1} + \Delta\sum S'_{\alpha 2} + ... + \Delta\sum S'_{\alpha z}}{z} = \Delta\sum S'_\alpha, \quad (1)$$

где $\Delta\sum S'_\alpha$ - средняя величина площади, занятой компонентой α на единице площади двумерной структуры, мм^2/мм^2.

Полученное соотношение показывает, что доля включений в объеме горной породы и доля площади двумерной структуры, занятая этим включением, численно равны.

Рассмотрим теперь двумерную структуру, наблюдаемую на передней грани куба (рис. 2). Проведем на этой грани множество равноотстоящих горизонтальных секущих и получим z узких полос шириной $\Delta = 1/z$ и длиной 1 мм каждая (на рис. 2 показана одна такая секущая AB). Обозначим суммарную длину отрезков этих прямых, проходящих по компоненте α, $\sum h_{\alpha 1}, \sum h_{\alpha 1}, ..., \sum h_{\alpha z}$. Поскольку ширина полосок весьма мала, примем, что площадь компоненты α на первой полоске равна $\sum h_{\alpha 1}$, на второй $\sum h_{\alpha 2}$, на z-й $\sum h_{\alpha z}$. Тогда суммарная площадь компоненты α на всех z полосках, т. е. на 1 мм^2 двумерной структуры, будет равна:

$$\sum F_\alpha = \Delta\sum h_{\alpha 1} + \Delta\sum h_{\alpha 2} + ... + \Delta\sum h_{\alpha z} = \frac{\Delta\sum h_{\alpha 1} + \Delta\sum h_{\alpha 2} + ... + \Delta\sum h_{\alpha z}}{z} = \Delta\sum h_\alpha, \quad (2)$$

где $\sum h_\alpha$ - средняя суммарная длина отрезков, проходящих по компоненте α, на единице длины секущей, мм/мм.

Из соотношения (2) следует, что доля включений на площади шлифа численно равна доле длины секущей линии, проходящей через это включение.

Нанесем на ту же двумерную структуру большое число z точек, которые расположатся на площади структуры беспорядочно, случайно, но статистически равномерно. Из общего числа точек z некоторая доля точек z_α попадает на участки компоненты α, а остальные - на матрицу β. Согласно теории вероятностей, если на некоторую

площадь бросить наудачу точку, то вероятность попадания точки на какую-либо часть этой площади пропорциональна площади этой части и не зависит от ее формы и расположения (при этом следует помнить, что эта площадь может состоять из ряда отдельных участков). В результате вся площадь равна 1 мм^2, а интересующая нас часть площади, занятая компонентой α, равна, $\sum S'_\alpha$ мм^2.

Отсюда следует:

$$\frac{z_\alpha}{z} = \frac{\sum S'_\alpha}{1}, \text{ т.е. } \sum S'_\alpha = \frac{z_\alpha}{z} \text{ мм}^2/\text{мм}^2, \quad (3)$$

Из полученного соотношения видно, что доля включений на площади шлифа численно равна доле числа случайных точек, попавших на это включение.

Сведя воедино соотношения (1) - (3), получим соотношение, согласно которому доля компоненты в объеме сплава, на площади шлифа, на секущей линии и доля случайных точек, попавших на компоненты, равны друг другу:

$$\sum V_\alpha = \sum S'_\alpha = \sum h_\alpha = \frac{z_\alpha}{z}, \quad (4)$$

Соотношение (4) математически строго и показывает, что измерение относительного объема компоненты в полиминеральной горной породе можно заменить измерением и суммированием площадей на единице площади шлифа, длин отрезков на единице длины секущей линии или подсчетом числа случайных точек на шлифе.

Определение объемной доли составляющих полиминеральной горной породы можно выполнять по одному из этих трех вариантов, независимо от общего числа составляющих данной горной породы.

Используя соотношение (4) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{\sum V_\alpha}{\sum V_\beta} = \frac{\sum S'_\alpha}{\sum S'_\beta} = \frac{\sum h_\alpha}{\sum h_\beta} = \frac{z_\alpha}{z} * \frac{z}{z_\beta} = \frac{z_\alpha}{z_b} \quad (5)$$

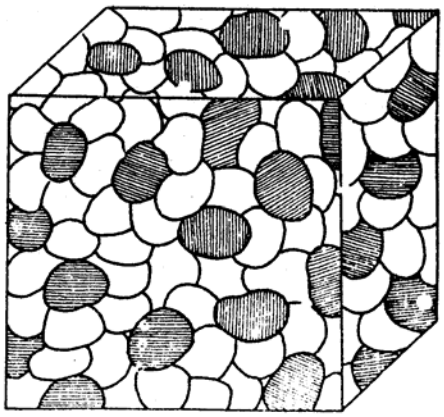

Рис. 3 Полиминеральная равномерно-зернистая структура - зерна изометрические, округлой формы одного минерала окружены зернами другого

Основываясь на соотношении (5), можно определить какая из имеющихся компонент является основной (матрицей), а какая включением в нее, это важно для случаев, когда визуально решить данную задачу очень сложно или невозможно, например:

Если результат соотношения (5) будет больше 1, то матрицей является компонента α, если же получим число меньше 1, то матрицей будет являться компонента β. Основываясь на результатах полученных по данному методу можно будет определить какую из математических моделей механики неоднородных горных пород необходимо применять к каждой из компонент.

5 Средняя величина и дисперсия двугранных углов

Вторым по важности определяющим геометрическим соотношением является средняя величина двугранных углов, показывающая наклон включений одной из компонент в матрицу, что позволяет определить степень корреляции, данных включений. Двугранные углы позволяют определить положение частицы в рассмат-

риваемом объеме, а дисперсия данных углов определить степень корреляции всех частиц одной компоненты.

При пересечении двугранного угла Φ секущей плоскостью могут быть получены плоские углы φ величиной от 0 до π, независимо от величины двугранного угла. Однако средняя величина плоских углов, получаемых при многократных пересечениях плоскостью данного двугранного угла, однозначно обусловлена его величиной. Величина плоского угла, являющегося сечением двугранного угла Φ, определяется выражением:

$$\varphi = arctg(\cos\theta * tg(\psi + \theta)) - arctg(\cos\theta - tg\psi) \quad (6)$$

где φ - плоский угол, являющийся сечением двугранного угла Φ; θ - угол между нормалью к плоскости, пересекающей двугранный угол, и осью z, который может изменяться в пределах от 0 до $\pi/2$; ψ - угол, образуемый проекцией нормали на плоскость xoy с осью x, изменяющийся в пределах от 0 до π при этом необходимо, чтобы угол $arctg(\cos\theta * tg\psi)$ находился в том же квадранте, что и угол ψ.

Из выражения (6) следует, что средняя величина плоских углов $\bar{\varphi}$, получаемых при многократных сечениях плоскостью двугранного угла Φ равна этому углу.

$$\bar{\varphi} = \Phi \quad (7)$$

Кроме того следует отметить, что дисперсия плоских углов, поучаемых при сечении случайной плоскостью двугранного угла Φ и двугранного угла $\pi - \Phi$ равны:

$$D(\varphi/\Phi) = D(\varphi/\pi - \Phi)$$

Исследования, проведенные в работе [1] привели к следующим результатам, показывающим зависимость дисперсии плоских углов $D(\varphi/\Phi)$ от величины двугранного угла Φ.

Исследования, проведенные в работе [1] привели к следующим результатам, показывающим зависимость дисперсии плоских углов $D(\varphi/\Phi)$ от величины двугранного угла Φ.

Теперь рассмотрим множество случайно ориентированных в пространстве двугранных углов, распределение величин которых выражается функцией $f(\Phi)$. Функция распределения величин плоских углов, получаемых при пересечении двугранных углов случайно секущей плоскостью, определяется следующим выражением:

$$f(\varphi) = \int_0^{\pi} f(\varphi/\Phi) f(\Phi) d\Phi \quad (8)$$

Из выражения (8) следует зависимость между средними величинами двугранных углов в пространстве $\bar{\Phi}$ и их сечений случайной плоскостью $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\varphi} = \bar{\Phi}$$

Кроме этого из того же выражения (8) получается зависимость между дисперсией двугранных углов $D(\Phi)$ и дисперсией плоских углов $D(\varphi)$, которые являются их сечениями:

$$D(\Phi) = 1{,}11(D(\varphi) - D(\varphi/\bar{\varphi})), \quad (9)$$

где $D(\Phi)$ - дисперсия двугранных углов; $D(\varphi)$ - дисперсия плоских углов; $D(\varphi/\bar{\varphi})$ - дисперсия плоских углов, являющихся сечением двугранного угла Φ, равного средней величине плоского угла φ. Находится по таблице или по рис. 4, учитывая, что $\bar{\varphi} = \bar{\Phi}$.

Из всего написанного выше следует, что для определения дисперсии двугранных углов достаточно измерить по шлифу среднюю величину и дисперсию плоских углов, являющихся случайным сечением двугранных углов, а для определения величины двугранных углов измерить величины плоских углов на шлифе.

Дисперсия и среднее квадратичное отклонение плоских углов, являющееся случайными сечениями двугранного угла Φ

Двугранный угол Φ, град.	Дисперсия плоских углов $D(\varphi/\Phi)$		Среднее квадратичное отклонение $\sigma(\varphi/\Phi)$, град
	радиан^2	град.^{2}	
0	0	0	0
15	0,119	62	7,9
30	0,060	197	14,0
45	0,107	351	18,7
60	0,148	486	22,0
75	0,175	574	24,0
90	0,185	607	24,6
105	0,175	574	24,0
120	0,148	486	22,0
135	0,107	351	18,7
150	0,060	197	14,0
165	0,019	62	7,9
180	0	0	0

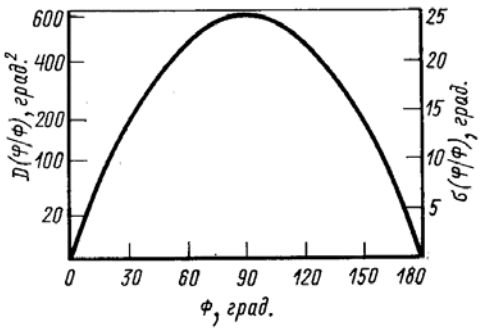

Рис. 4. Дисперсия $D(\varphi/\Phi)$ ***и среднее квадратичное отклонение*** $\sigma(\varphi/\Phi)$ ***плоских углов*** φ***, являющихся случайными сечениями двугранного угла*** Φ***, в зависимости от его величины***

Заключение

В статье описаны методы, основанные на теории вероятности и статистике, позволяющие найти:

- Объемную долю структурных и текстурных составляющих, что позволит исследователю определить какая из присутствующих компонент является основной и применять исходя из этого соответствующие модели механики неоднородных горных пород.
- Рассчитать среднюю величину и дисперсию двугранных углов между элементами различных компонент, что позволит определить степень корреляции ориентации в пространстве структурных и текстурных составляющих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салтыков С.А.* Стереометрический анализ. Москва: Металлургия, 1976 г., 271 с.
2. *Глаголев А.А.,* Способ и прибор для микроскопического анализа горных пород. Авт. свид. № 38066. - "Бюл. изобр.", 1934 г., № 7 - 8.
3. *Глаголев А.А.* Геометрические методы количественного анализа агрегатов под микроскопом. Львов: Госгеолиздат, 1941 г., 264 с.
4. *Proceedings* of the First International Congress for Stereology. Vuenna, 1963. 140 p.
5. *Stereology.* Proceedings of the Second International Congress for Stereology. Springer - Verlag, New York 1967. 337 p. ГИАБ

Коротко об авторе

Томилин А.В. – аспирант кафедры "Высшая математика", e-mail: avtomilin@mail.ru
Московский государственный горный университет,
Moscow State Mining University, Russia, ud@msmu.ru