УДК 551.49

С.С. Кубрин, Ю.В. Кириченко

ФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ДРЕНИРУЕМОСТИ ПЛАСТОВ

Рассмотрен фрактальный подход к описанию процесса фильтрации жидкости в горных породах. Теоретически обоснована необходимость использования аппарата дробного дифференциального исчисления при решении перкуляционных задач в геологии. Установлены недостатки классического подхода, когда водопроводящий пласт представляется в виде однородного непрерывного (без разрывов) массива и преимущества фрактального подхода, когда водопроводящий пласт представляется в виде губчатого» массива при описании движения жидкости. Впервые получено уравнение дробного порядка, описывающее планово-плоский безнапорный поток.

Ключевые слова: дренажные работы, фрактальная геометрия, планово-плоский безнапорный поток.

Семинар № 1

S.S. Kubrin, Y.V. Kirichenko

THE FRACTAL APPROACH TO CALCULATING THE BANK DRAINABILITY

The fractal approach to the description of the process of liquid filtration in the rock mass is reviewed. The need of fractional differential calculus device for achieving perculational tasks in geology is theoretically justified. The drawbacks of conventional approach (when feeding canal is presented in the model of solid mass) are described along with the advantages of fractal approach (when feeding canal is presented in the model of di-porous mass) when describing the motion processes in the liquid. The fractal equation that describes planned flat gravity flow is developed for the first time.

Key words: fractal approach, equation that describes planned flat gravity flow.

Эффективность дренажных работ определяется достоверностью полученных гидрогеологических параметров, используемых при проектировании. Параметры уточняются опытно-фильтрационными работами и обратными расчетами по фактическим данным в процессе эксплуатации дренажных сооружений [2, 4, 5]. Это вызвано расхождениями проектных и фактических объемов поступающей в горные выработки воды, что, по нашему мнению, свидетельствует о неадекватности процессов, описываемых известным уравнением плоского планово-безнапорного потока фактическим, происходящим в водоносном пласте.

В последнее время идеи фрактальной геометрии все больше используются в современной геологии. Невозможность описания геологических процессов в пространстве целочисленной размерности требуют от исследователей искать адекватное описание таких процессов в пространстве с дробной размерностью. Анализ исследований в этом направлении показал, что работы по выявлению таких описаний связаны с вычислением на основе наблюдений фрактальной размерности рассматриваемого процесса. К сожалению работ по теоретическому обоснования возникающих фрактальных свойств геологических процессов нет. Авторы попыта-

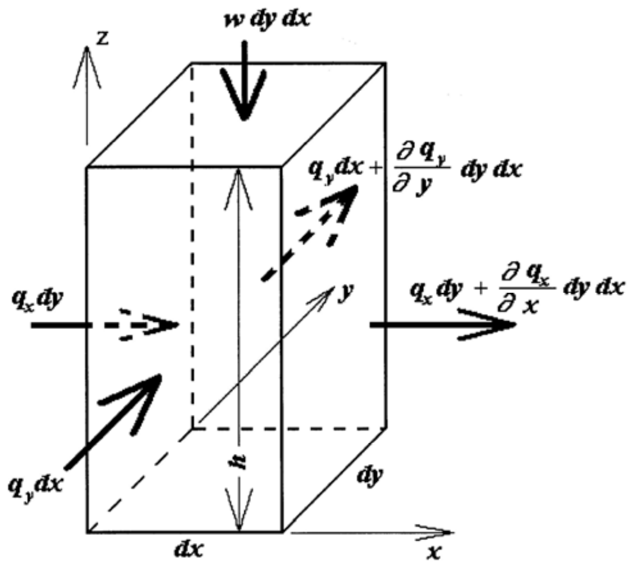

Рис. 1

лись теоретически обосновать проявления фрактальных свойств геологических процессов на примере вывода уравнения планово-плоского безнапорного потока.

Рассмотрим классический подход к выводу уравнения планово-плоского безнапорного потока, который предусматривает изучение баланса бесконечно малого элемента пласта с основанием *dx dy* и высотой *h* на всю мощность пласта [1]. При этом считается, что призма *dx dy·h* является одновременно элементом пласта и потока. Для планово-плоского потока справедлива предпосылка Дюпюи о постоянстве в каждом вертикальном сечении горизонтальных градиентов напора, определяемых через уклоны

$$i_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ и } i_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

(*H* — напор). Удельные расходы в этом случае будут пропорциональны проводимости *T* потоков в соответствующих сечениях. Поскольку элемент пласта мал, проводимость потоков сечений вдоль одной и той же оси как на входе, так и на выходе из элемента будут одинаковые. Поступающие в рассматриваемый элемент объемы воды вдоль оси *x* и оси *y* соответственно равны

$$d_x dy = T_{yz} i_x dy = -T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}dy \text{ и } q_y dx = T_{xz} i_y dx = -T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}dx \text{ (рис. 1).}$$

Здесь *T* — проводимость потоков в сечениях *yz* и *xz* .

При прохождении через этот элемент, расходы воды получают приращения вдоль оси *x* — $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ и на выходе составят

$$-T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(-T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}\right)dxdy \text{ и } -T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(-T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}\right)dydx.$$

По оси *z* в элемент поступает инфильтрационный расход *wdxdy.* Разница поступающих и выходящих расходов определяет приращение объема воды $\mu\frac{\partial H}{\partial t}dxdy$ в элементе за период *dt*. Балансовое уравнение элемента определяется равенством входящих и выходящих расходов и изменением объема воды:

$$-T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}dy - T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}dx + wdxdy = -T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(-T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}\right)dxdy - T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}dx +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(-T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}\right)dydx + \mu\frac{\partial H}{\partial t}dxdy.$$

После сокращения на $T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}dy$ и $T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}dx$ в правой и левой частях и деления на $dxdy$ уравнение неразрывного планового потока принимает вид:

$$w = \frac{\partial}{\partial x}\left(-T_{yz}\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-T_{xz}\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

На самом деле движение воды происходит не через все сечение слоя, а только через поры и трещины. Таким образом, слой породы не является сплошным изотропным телом, как его рассматривают при классическом подходе, а является анизотропным телом. Будем моделировать пласт как некоторую пористую фрактальную губку с перкуляционными каналами, по которым и происходит движение воды. В этом случае нельзя рассматривать бесконечно малый элемент пласта, так как среда неоднородная. В дальнейшем будем рассматривать некоторый малый, но конечный элемент, в котором еще наблюдается масштабная инвариация (скейлинг). Не останавливаясь подробно на формализации введенного условия, отметим, что $\Delta > k \max 2\rho$ где Δ — характеристический размер элемента, ρ — радиус перкуляционного канала, k — масштабный множитель ($1<k<10$). Другими словами это условие определяет то что, мы рассматриваем слой как единое целое, а не отдельный канал или трещину, то есть оно определяет «границу» между «макро» и «мини» гидрогеологией.

Пусть размеры элемента — $\Delta x\cdot, \Delta y$ и h, рассмотрим его водный баланс (рис. 2). Вдоль оси x в выбранный элемент расход воды через левую стенку определяется выражением $T_{-yz}i_x\Delta y = -T_{-yz}\frac{\partial H}{\partial x}\Delta y$, а вдоль оси y через переднюю — $T_{-xz}i_y\Delta x = -T_{-xz}\frac{\partial H}{\partial y}\Delta x.$. Особенность рассматриваемой постановки заключается в том, что проводимость потока через левую T_{-vz} и правую T_{+vz} стенки (соответственно через переднюю T_{-vz} и заднюю T_{+vz} стенки) элемента в общем случае не совпадают, так как элемент конечен.

Проводимость потока левой ($-yz$) и передней ($-xz$) стенок выбранного элемента можно определить через площадь перкуляционных

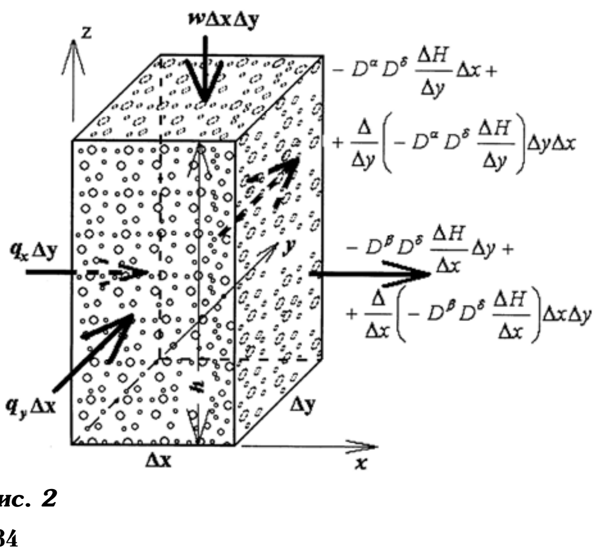

Рис. 2

каналов. Отметим, что их площадь не тождественна пористости породы, она определяет площадь каналов, по которым движется вода. Итак, площадь сечения перкуляционных каналов можно представить в виде:

$S_{-yz} = \int_0^h \left[\int_0^{\Delta y} \phi(\tilde{y}, z) d\tilde{y} \right] dz$, где функция $\phi(\tilde{y}, z)$ определяет пространственное размещение каналов протекания на левой стенке рассматриваемого элемента. Для пласта с однородным строением (скелетом породы) функция пространственного размещения перкуляционных каналов можно представить, как произведение некоторой функции аппликаты на коэффициент протекаемости вдоль оси y — $\phi(\tilde{y}, z) = a_{-y} u(z)$. Тогда

$$S_{-yz} = \int_0^h \left[\int_0^{\Delta y} a_{-y} u(z) d\tilde{y} \right] dz = \int_0^h \left[a_{-y} u(z) \Big|_0^{\Delta y} \right] dz = a_{-y} \Delta y \int_0^h u(z) dz = \int_0^{\Delta y} a_{-y} d\tilde{y} \int_0^h u(z) dz.$$

Интеграл $\int_0^{\Delta y} a_{-y} d\tilde{y}$ определяет множество перкуляционных каналов в виде множества Кантора вдоль оси *y*, а интеграл $\int_0^h u(z) dz$ — множество таковое вдоль оси *z*. Данные интегралы — производная дробного порядка < 1 [3]. Порядок производной совпадает с дробной размерностью рассматриваемой фрактальной губки вдоль соответствующих осей указанных стенок элемента. В дальнейшем будем полагать, что фрактальная размерность вдоль каждой оси в пласте не меняется, тогда расход воды через левую стенку $T_{-yz} i_x \Delta y = -D^\beta D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta x} \Delta y$ и через переднюю— $T_{-xz} i_y \Delta x = -D^\alpha D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta y} \Delta x$. Здесь D^α, D^β и D^δ —дробные производные по переменным *x, y* и *z* порядка α, β и δ соответственно $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1 \text{ и } 0 < \delta < 1)$.

На выходе из элемента расход воды составит через правую стенку элемента

$-D^\beta D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta x} \Delta y + \frac{\Delta}{\Delta x} \left(-D^\beta D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y$ соответственно через заднюю

$$-D^\alpha D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta y} \Delta x + \frac{\Delta}{\Delta y} \left(-D^\alpha D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta y} \right) \Delta y \Delta x.$$

По оси *z* в элемент поступает инфильтрационный расход $w \Delta x \Delta y$. Разница поступающих и выходящих расходов определяет приращение объема воды в блоке за период *dt* — $\mu \frac{\partial H}{\partial t} \Delta x \Delta y$. Таким образом, балансовое уравнение принимает следующий вид:

$$-D^\beta D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta x} \Delta y - D^\alpha D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta y} \Delta x + w \Delta x \Delta y = -D^\beta D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta x} \Delta y + \frac{\Delta}{\Delta x} \left(-D^\beta D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y -$$

$$-D^\alpha D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta y} \Delta x + \frac{\Delta}{\Delta y} \left(-D^\alpha D^\delta \frac{\Delta H}{\Delta y} \right) \Delta y \Delta x + \mu \frac{\partial H}{\partial t} \Delta x \Delta y,$$

или

$$w\Delta x\Delta y=\frac{\Delta}{\Delta x}\left(-D^{\beta}D^{\delta}\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)\Delta y+\frac{\Delta}{\Delta y}\left(-D^{\alpha}D^{\delta}\frac{\Delta H}{\Delta y}\right)\Delta x+\mu\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y.$$

После сокращения на $\Delta x\Delta y$ имеем:

$$w=\frac{\Delta}{\Delta x}\left(-D^{\beta}D^{\delta}\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)+\frac{\Delta}{\Delta y}\left(-D^{\alpha}D^{\delta}\frac{\Delta H}{\Delta y}\right)+\mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

По всей видимости, решение уравнения с бесконечно малыми элементами не представляет интереса для инженерной геологии. С учетом того, что рассматриваемый элемент все-таки мал, заменим приращения частными производными, в результате получим уравнение неразрывного планового потока в форме:

$$w=\frac{\partial}{\partial x}\left(-D^{\beta}D^{\delta}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-D^{\alpha}D^{\delta}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Таким образом, проводимость представляется в виде производных дробного порядка по сечению, через которое проходит поток. Такой прием позволяет при полевом подходе к задаче получать действительные скорости потока, а не скорректированные с помощью коэффициента фильтрации. Это дает возможность для составления системы уравнений, описывающих не только поток, но захват, и перенос водой частиц слоя с целью получения математической модели размыва породы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бочевер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М.* Основы гидрогеологических расчетов. – М.: Недра, 1969. 368 с.
2. *Гальперин А.М., Зайцев В.С., Норватов Ю.А.* Гидрогеология и инженерная – М.: Недра, 1989, 610 с.
3. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация. Теоретическая и математическая физика 1992. Т. 90. № 3. С. 354—368.
4. *Справочник:* Открытые горные работы, /Трубецкой К.Н., Потапов М.Г., Виницкий К.Е., и др. - М.: Горное бюро, 1994. 590 с.
5. *Справочник* по осушению горных пород. Под ред. – М.: Недра, 1984. 575. ГИАБ

Коротко об авторах

Кубрин С.С. – доктор технических наук, Гипроуглеавтоматизация, gipr@mail.ru,
Кириченко Ю.В. – доктор технических наук, Московский государственный горный университет, ud@msmu.ru