

УДК 622:001.57:62-75

В.Е. Миренков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗЦОВ ПОРОД

Проведено математическое моделирование процессов деформирования образцов пород.

Ключевые слова: нормальные и касательные напряжения, массив пород, трещинообразование.

Семинар № 3

V.E. Mirenkov

MODELING OF ROCK SAMPLES DEFORMATION PROCESSES

Mathematical modeling of rock samples deformation processes is carried out

Key words: normal and tangential stresses, mountain mass, formation of cracks.

Управлять деформированием — значит воздействовать на границу изучаемой области через контакт с другими телами, который характеризуется в механике нормальными и касательными напряжениями, смещениями или их комбинацией. Именно поэтому ниже, явно или неявно, говоря о нормальных и касательных напряжениях на контакте тел, будем чисто теоретически подразумевать присутствие крепи, целиков (не обсуждая их вообще), обеспечивающих рассчитанные напряжения.

Геометрия образцов пород существенно влияет на процесс деформирования и разрушения их. Масштабный эффект заключается в том, что разрушающее напряжение для образца малого размера выше, чем для больших, и крупные изделия разрушаются при напряжениях значительно меньших, чем те, которые можно было бы считать допустимыми на основе лабораторных опытов над образцами из того же материала. Так, для образ-

ца диаметром 100 мм предел выносливости оказывается примерно на 40 % ниже, чем для стандартного образца диаметром 10 мм. Дальнейшее увеличение диаметра уже слабо влияет на предел выносливости. Расчеты же для идеального образца естественно не могут объяснить этот эффект, ограничиваясь утверждением, что в большом теле вероятность наличия дефектов больше и разрушающая нагрузка меньше [1].

Необходимо отметить, что чистые условия эксперимента, даже, например, одноосное сжатие образца, достигнуть невозможно. Основная трудность состоит при этом в центровке образцов: незначительный эксцентриситет приложения нагрузки создает напряжения изгиба, не поддающиеся практическому учету.

Из всех явлений в окружающем нас мире разрушение тел есть самое обыденное и распространенное; ни одно действие человека не совершается без разрушения чего-либо. Разрушение сопровождается переходом с одной ветви амплитудно-частотной характеристики материала на другую, т.е. разрушаемое тело колеблется. Исключить колебания, скажем теоретически, можно наложением всестороннего сжатия, но до определенного предела.

Поведение образца за пределом пропорциональности оказывается

практически непредсказуемым из-за того, что особую роль приобретают разнообразные факторы случайной природы, имеющие в исходном состоянии второй порядок малости по сравнению с упругостью. Образец, когда испытания переходят на ниспадающую ветвь, уже не обладает свойством материала в исходном состоянии, а представляет собой конструкцию, которая не может характеризовать материал как таковой. Однако эта конструкция из исходного материала и, конечно же, для него справедлив и принцип Сен-Венана и закон парности касательных напряжений. При этом нужно иметь определенную смелость, чтобы результаты испытания конструкции (с получением ниспадающей ветви) отнести к характеристикам материала в исходном состоянии и априори задать закон распределения напряжений в ней. Поэтому математические упражнения по использованию диаграммы σ - ε с ниспадающей ветвью (жесткий пресс) не имеют отношения к механике: при этом пытаются, по-существу, связать свойства массива пород (например, гранит) с песком (полученным из гранита). Аналогично, описывающая микромир мезомеханика, которую широко используют при обосновании разрушения, есть не более чем набор правил, а не целостная теория. Разрушение частичек, из которых состоит деформируемая область, приводит к разделению ее на части. Для описания этого разрушения нет побудительной причины следить за поведением каждой молекулы, достаточно провести осреднение в рамках теории упругости. Переходя к массиву пород можно утверждать, что наличие любой полости в нем переводит его из состояния устойчивого равновесия в неустойчивое. В процессе функционирования выработок во вмещающем

массиве происходят движения за счет проскальзываний, подвижек по трещинам, по линиям скольжения. Такое «кручение» массива около выработок является закономерностью, которая проявляется повсеместно и никогда не затухает за счет отсутствия симметрии во всем. При таком состоянии проблемы деформирования и разрушения пород и учитывая по возможности экспериментальные данные рассмотрим деформирование прямоугольных пластин сжимаемых прессом.

При сжатии образца центральный элемент его, содержащий в себе ось, проходящую через центр тяжести сечения в ненагруженном состоянии, подкреплен со всех сторон и можно считать что имеет место боковое обжатие и момент разрушения может соответствовать относительной деформации $\approx 9\%$ (опыты Кармана с мрамором) [1]. Переферийные части наоборот не только обжимаются с боков, но и испытывают поперечные усилия изгибающие их. Поэтому они имеют возможность разрушиться при относительной деформации $\approx 1\%$. Другими словами, центральный элемент не разрушится пока не разрушатся переферийные, где и возможно начало разрушения. Пусть краевые элементы в левой части сечения разрушились (вернее, вышли из-под нагрузки) и центр тяжести сечения изменил свое положение, перейдя в точку O_1 . Условие всестороннего сжатия для бывшего центрального элемента, связанного с точкой O , нарушатся и он начнет разгружаться, в чем ему помогает связанный с O_1 новый элемент, который «хочет быть» всесторонне обжатым. Реализуется существенная несимметрия, выделяющая новую область повышенных напряжений и акт разрушения перемещающий точку O_1 влево или вправо. Таким образом, относительно ис-

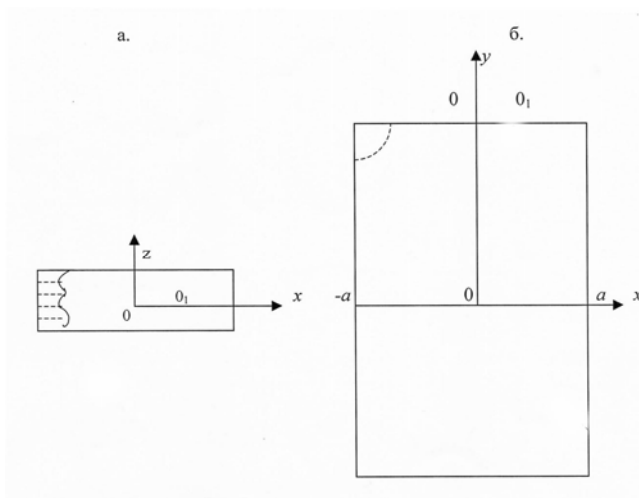


Рис. 1. Схема выхода части контактной области из-под нагрузки: а — площадка контакта; заштрихована область падения напряжения, б — пунктирная линия — возможное начало разрушения приводящее к колебанию образца

ходного состояния 0 появляется момент, который стремится повернуть или плиты пресса (если есть люфт) и (или) образец - т.е. то, что слабее начинает колебаться вызывая начало разрушения (рис. 1).

Будем рассматривать сжатие образца (рис. 1, б) на прессе в предположении, что его пластины, контактирующие с прямоугольником, можно моделировать полуплоскостями. В [2, 3] рассмотрены все три основные задачи теории упругости для формулировки граничных условий на сторонах $y = \pm 0,5h$, на $x = \pm a$ предполагается во всех случаях равенство нулю нормальных и касательных напряжений

$$\sigma_x = \tau = 0 \quad (1)$$

Как и в [2, 3] величины имеющие размерность напряжений отнесем к σ_{y0} , размерность длины — к a . Здесь σ_{y0} — среднее напряжение на контакте, определяемое из

$$\sigma_{y0} = \frac{F}{2a}, \quad (2)$$

где F — сжимающее усилие на любой интересующий момент нагружения.

Определять возникающие $y = \pm 0,5h$ контактные напряжения будем

последовательными приближениями. За первое приближение выберем, например, значения

$$2\mu v_1 = 10A_1, \quad 2\mu u_1 = A_1 x,$$

где μ — упругая постоянная. Используя результаты

[2, 3] для любых граничных условий типа (1), (2) вычисляем напряжения и смещения на контуре образца. В частном случае, полагая в (2) $A_1 = 1$ вычисляем напряжения на $y = \pm 0,5h$.

Из условия

$$\int_{-1}^1 \sigma_{y1} dx = F \quad (3)$$

находим A_1 .

Таким образом, первое приближение, рассчитанное для образца, определяется (2) и значениями

$$\sigma_{y1} \approx A_1, \quad \tau_1 \approx A_1 x, \quad (4)$$

которые в силу непрерывности при переходе через область контакта, реализуются на полуплоскостях, моделирующих плиты пресса, что очень удобно в силу простоты связи компонент напряжений и смещений на границе. Эта зависимость имеет вид [2]

$$u'(x) = -\frac{\kappa-1}{4\mu} \sigma_y(x) + \frac{\kappa+1}{4\mu\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(t)}{t-x} dt, \\ v'(x) = -\frac{\kappa-1}{4\mu} \tau(x) + \frac{\kappa+1}{4\mu\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_y(t)}{t-x} dt \quad (5)$$

где в левых частях стоят производные от компонент смещений; $k = 3-4\nu$, ν — коэффициент Пуассона.

Если первое приближение и все последующие нечетные получаются в результате численной реализации, то из (5), обращая эти интегральные уравнения относительно σ_y и τ соответственно, получим качественный вид решения, что очень важно.

Действительно, из второго уравнения (5) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_y(t) dt}{t-x} = \frac{4\nu v'(x)}{k+1} - \frac{k-1}{k+1} \tau(x) = a(x) \quad (6)$$

Обращая (6) согласно [4], получим

$$\sigma_y(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} \quad (7)$$

при условии

$$\int_{-1}^1 \frac{\alpha(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad (8)$$

которое автоматически выполняется всегда в силу антисимметричности $v'(x)$ и $\tau(x)$.

Подставляя первое приближение (2), (4) в первую часть (7) получим второе приближение

$$\sigma_{y2}(x) = A_1 \frac{k-1}{k+1} \sqrt{1-x^2} \quad (9)$$

Постоянную A_1 определим из условия (3) в виде

$$A_1 = \frac{\pi}{2} \frac{k+1}{k-1} F$$

Аналогично, первое уравнение (5) переписем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(t) dt}{t-x} = - \\ = 2A_2 \frac{1}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} \frac{\pi}{2} F \sqrt{1-x^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $\sigma_y(x)$ и $\tau(x)$ в (10) представляют второе приближение, а $\mu(x)$ берется из первого, то в рассмотрение введена новая неизвестная постоянная A_2 , чтобы сгладить это несоответствие. Обращая (10) получим второе приближение

$$\tau_2(x) = -\frac{k-1}{k+1} \frac{F}{2} \sqrt{1-x^2} \ln \frac{1-x}{1+x} \quad (11)$$

при условии типа (8)

$$\int_{-1}^1 \left[-2 \frac{A_2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} \frac{\pi}{2} F \sqrt{1-x^2} \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

1. Последнее уравнение определяет

$$A_2 = \frac{(k+1)}{2} F$$

Подставляя второе приближение (9) и (11) в (5) и интегрируя по x получим второе приближение для смещений, которые используем в качестве граничных условий для образца. Далее процесс вычисления повторяется.

На рис. 2 для сравнения приведены два последовательных приближения для контактных напряжений.

Пунктирной линией обозначено первое приближение, сплошной — второе. Нормальные напряжения σ_y приведены на рис. 1, а, касательные τ — на рис. 2, б. Рассмотрим напряжения $\sigma_x(x)$, терпящие разрыв при переходе из образца к полуплоскости. Из условия непрерывности перемещений на контакте получаем при стремлении из образца

$$\sigma_{x1} = \frac{E_1(1-\nu^2)}{E(1-\nu_1^2)} \sigma_x + \left[\frac{\nu_1}{1-\nu_1} - \frac{E_1 \nu(1+\nu)}{E(1-\nu_1^2)} \right] \sigma_y \quad (12)$$

где E_1, ν_1 — упругие характеристики образца; σ_x, σ_y — напряжения в полуплоскости, связанные уравнением [2]

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau dt}{t-x}$$

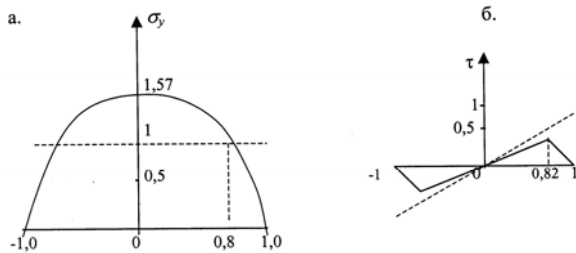


Рис. 2

Подставляя (13) в (12) получим

$$\sigma_{x1} = \left[\frac{E_1}{E} \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} + \frac{\nu_1}{1-\nu_1} - \frac{E_1}{E} \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu_1^2} \right] \sigma_y + \frac{E_1}{E} \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau}{1-x} dt \quad (14)$$

Первое приближение нормальных и касательных напряжений (рис. 2) определяет экстремальное значение сжимающих напряжений σ_{x1} при $x = 0$ и максимальные значения растягивающих при $x = \pm a$. Второе приближение (рис. 2) для σ_y и τ согласно (14) определяет сжатие при $x = 0$ и экстремальные значения σ_{x1} в окрестности $x = \pm a$. Такое поведение σ_{x1} позволяет объяснить наблюдаемое на практике разрушение образцов пород.

Процесс преобразования подводимой к образцу пород энергии от прессы при сжатии происходящий в ограниченных объемах (рис. 1, 2) и сопровождающийся самопроизвольно

возникающими гармоническими пульсациями давления, называется автоколебательным. Должен существовать механизм усиления случайно возникшего возмущения и приводящий к динамическому проявлению в породах иначе процесс колебания затухал бы. Усилители возмущений сопровождающие автоколебательный процесс должны обеспечивать усиление трещинообразования в конечном объеме (на линиях типа Людерса), подготавливая реализацию разрыва сплошности в рассматриваемой области.

При нагружении образцов пород усилителем возмущений выступает эффект отсутствия всякой идеальной симметрии в испытуемом образце, за счет чего происходит движение, скажем плоского образца, в пространстве, обеспечивая рост напряжений в локальной области, сопровождаемый при определенной величине их разрывом сплошности, что еще больше увеличивает несимметрию, т.е. автоколебательный процесс в образце. Другими словами, всегда имеет место (за пределом упругости) сложное нагружение, даже в сжимаемом стержне, и нет оснований переходить на молекулярный уровень для описания разделения образца на части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз. — 1962. — 456с.
2. Миренков В.Е. Определение связи компонент напряжений и смещений на границе массива пород. ФТПРПИ, № 1. 2004. — С. 42—49.
3. Шутов А.В., Красновский А.А., Миренков В.Е. Моделирование контактных условий при деформировании образцов пород. ФТПРПИ. № 2. 2004. — С. 25—32.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука. 1967.— 607 с. **VIAS**

Коротко об авторе

Миренков В.Е. – ИГД СО РАН, yge@ngs.ru