

УДК 622

В.Е. Миренков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗЦОВ ПОРОД

Проведено математическое моделирование процессов деформирования образцов пород.

Ключевые слова: нормальные и касательные напряжения, массив пород, трещинообразование.

Семинар № 3

В.Е. Миренков
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗЦОВ ПО-
РОД**

Проведено математическое моделирование процессов деформирования образцов пород.

Ключевые слова: нормальные и касательные напряжения, массив пород, трещинообразование.

Управлять деформированием — значит воздействовать на границу изучаемой области через контакт с другими телами, который характеризуется в механике нормальными и касательными напряжениями, смещениями или их комбинацией. Именно поэтому ниже, явно или неявно, говоря о нормальных и касательных напряжениях на контакте тел, будем чисто теоретически подразумевать присутствие крепи, целиков (не обсуждая их вообще), обеспечивающих рассчитанные напряжения.

Геометрия образцов пород существенно влияет на процесс деформирования и разрушения их. Масштабный эффект заключается в том, что разрушающее напряжение для образца малого размера выше, чем для больших, и крупные изделия разрушаются при напряжениях значительно меньших, чем те, которые можно было бы считать допустимыми на основе

лабораторных опытов над образцами из того же материала. Так, для образца диаметром 100 мм предел выносимости оказывается примерно на 40 % ниже, чем для стандартного образца диаметром 10 мм. Дальнейшее увеличение диаметра уже слабо влияет на предел выносимости. Расчеты же для идеального образца естественно не могут объяснить этот эффект, ограничиваясь утверждением, что в большом теле вероятность наличия дефектов больше и разрушающая нагрузка меньше [1].

Необходимо отметить, что чистые условия эксперимента, даже, например, одноосное сжатие образца, достигнуть невозможно. Основная трудность состоит при этом в центровке образцов: незначительный эксцентриситет приложения нагрузки создает напряжения изгиба, не поддающиеся практическому учету.

Из всех явлений в окружающем нас мире разрушение тел есть самое обыденное и распространенное; ни одно действие человека не совершается без разрушения чего-либо. Разрушение сопровождается переходом с одной ветви амплитудно-частотной характеристики материала на другую, т.е. разрушаемое тело колеблется. Исключить колебания, скажем теоретически, можно наложением всестороннего сжатия, но до определенного предела.

Поведение образца за пределом пропорциональности оказывается практически непредсказуемым из-за того, что особую роль приобретают разнообразные факторы случайной природы, имеющие в исходном состоянии второй порядок малости по сравнению с упругостью. Образец, когда испытания переходят на ниспадающую ветвь, уже не обладает свойством материала в исходном состоянии, а представляет собой конструкцию, которая не может характеризовать материал как таковой. Однако эта конструкция из исходного материала и, конечно же, для него справедлив и принцип Сен-Венана и закон парности касательных напряжений. При этом нужно иметь определенную смелость, чтобы результаты испытания конструкции (с получением ниспадающей ветви) отнести к характеристикам материала в исходном состоянии и априори задать закон распределения напряжений в ней. Поэтому математические упражнения по использованию диаграммы $\sigma - \varepsilon$ с ниспадающей ветвью (жесткий пресс) не имеют отношения к механике: при этом пытаются, по-существу, связать свойства массива пород (например, гранит) с песком (полученным из гранита). Аналогично, описывающая микромир мезомеханика, которую широко используют при обосновании разрушения, есть не более чем набор правил, а не целостная теория. Разрушение частичек, из которых состоит деформируемая область, приводит к разделению ее на части. Для описания этого разрушения нет побудительной причины следить за поведением каждой молекулы, достаточно провести осреднение в рамках теории упругости. Переходя к массиву пород можно утверждать, что наличие любой полости в нем переводит его из состояния устойчивого равновесия в

неустойчивое. В процессе функционирования выработок во вмещающем массиве происходят движения за счет проскальзываний, подвижек по трещинам, по линиям скольжения. Такое «кручение» массива около выработок является закономерностью, которая проявляется повсеместно и никогда не затухает за счет отсутствия симметрии во всем. При таком состоянии проблемы деформирования и разрушения пород и учитывая по возможности экспериментальные данные рассмотрим деформирование прямоугольных пластин сжимаемых прессом.

При сжатии образца центральный элемент его, содержащий в себе ось, проходящую через центр тяжести сечения в ненагруженном состоянии, подкреплен со всех сторон и можно считать что имеет место боковое обжатие и момент разрушения может соответствовать относительной деформации $\approx 9\%$ (опыты Кармана с мрамором) [1]. Перефериные части наоборот не только обжимаются с боков, но и испытывают поперечные усилия изгибающие их. Поэтому они имеют возможность разрушиться при относительной деформации $\approx 1\%$. Другими словами, центральный элемент не разрушится пока не разрушатся перефериные, где и возможно начало разрушения. Пусть краевые элементы в левой части сечения разрушились (вернее, вышли из-под нагрузки) и центр тяжести сечения изменил свое положение, перейдя в точку O_1 . Условие всестороннего сжатия для бывшего центрального элемента, связанного с точкой O , нарушился и он начнет разгружаться, в чем ему помогает связанный с O_1 новый элемент, который «хочет быть» всесторонне обжатым. Реализуется существенная несимметрия, выделяющая новую область повышенных напряжений и акт разрушения пере-

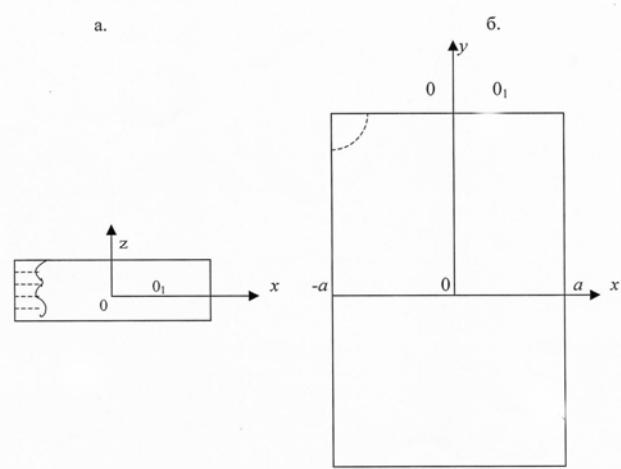


Рис. 1. Схема выхода части контактной области из-под нагрузки: а — площадка контакта; заштрихована область падения напряжения, б — пунктирная линия — возможное начало разрушения приводящее к колебанию образца

мещающей точку 0_1 влево или вправо. Таким образом, относительно исходного состояния 0 появляется момент, который стремится повернуть или плиты пресса (если есть люфт) и (или) образец - т.е. то, что слабее начинает колебаться вызывая начало разрушения (рис. 1).

Будем рассматривать сжатие образца (рис. 1, б) на прессе в предположении, что его пластины, контактирующие с прямоугольником, можно моделировать полуплоскостями. В [2, 3] рассмотрены все три основные задачи теории упругости для формулировки граничных условий на сторонах $y = \pm 0,5h$, на $x = \pm a$ предполагается во всех случаях равенство нулю нормальных и касательных напряжений $\sigma_x = \tau = 0$

Как и в [2, 3] величины имеющие размерность напряжений отнесем к σ_{y0} , размерность длины — к a . Здесь

σ_{y0} — среднее напряжение на контакте, определяемое из

$$\sigma_{y0} = \frac{F}{2a},$$

где F — сжимающее усилие на любой интересующий момент нагружения.

Определять возникающие $y = \pm 0,5h$ контактные напряжения будем последовательными приближениями. За первое приближение выберем, например, значения

$$2\mu v_1 = 10A_1, \quad 2\mu u_1 = A_1 x,$$

где μ — упругая постоянная. Используя результаты [2, 3] для любых граничных условий типа (1), (2) вычисляем напряжения и смещения на контуре образца. В частном случае, полагая в (2) $A_1 = 1$ вычисляем напряжения на $y = \pm 0,5h$. Из условия

$$\int_{-1}^1 \sigma_{y1} dx = F$$

находим A_1 .

Таким образом, первое приближение, рассчитанное для образца, определяется (2) и значениями

$$\sigma_{y1} \approx A_1, \quad \tau_1 \approx A_1 x, \quad (4)$$

которые в силу непрерывности при переходе через область контакта, реализуются на полуплоскостях, моделирующих плиты пресса, что очень удобно в силу простоты связи компонент напряжений и смещений на границе. Эта зависимость имеет вид [2]

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{\kappa-1}{4\mu} \sigma_y(x) + \frac{\kappa+1}{4\mu\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(t)}{t-x} dt, \\ v'(x) &= -\frac{\kappa-1}{4\mu} \tau(x) + \frac{\kappa+1}{4\mu\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_y(t)}{t-x} dt \end{aligned} \quad (5)$$

где в левых частях стоят производные от компонент смещений; $\kappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона.

Если первое приближение и все последующие нечетные получаются в результате численной реализации, то из (5), обращая эти интегральные уравнения относительно σ_y и τ соответственно, получим качественный вид решения, что очень важно.

Действительно, из второго уравнения (5) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_y(t)}{t-x} dt = \frac{4\mu v'(x)}{\kappa+1} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \tau(x) = a(x) \quad (6)$$

Обращая (6) согласно [4], получим

$$\sigma_y(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{a(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} \quad (7)$$

при условии

$$\int_{-1}^1 \frac{a(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (8)$$

которое автоматически выполняется всегда в силу антисимметричности $v'(x)$ и $\tau(x)$.

Подставляя первое приближение (2), (4) в первую часть (7) получим второе приближение

$$\sigma_{y2}(x) = A_1 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \sqrt{1-x^2} \quad (9)$$

Постоянную A_1 определим из условия (3) в виде

$$A_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} F$$

Аналогично, первое уравнение (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(t) dt}{t-x} &= - \\ &= 2A_2 \frac{1}{\kappa+1} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\pi}{2} F \sqrt{1-x^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $\sigma_v(x)$ и $\tau(x)$ в (10) представляют второе приближение, а $a(x)$ берется из первого, то в рассмотрение введена новая неизвестная постоянная A_2 , чтобы сгладить это несоответствие. Обращая (10) получим второе приближение

$$\tau_2(x) = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{F}{2} \sqrt{1-x^2} \ln \frac{1-x}{1+x} \quad (11)$$

при условии типа (8)

$$\int_{-1}^1 \left[-2 \frac{A_2}{\kappa+1} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\pi}{2} F \sqrt{1-x^2} \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

1. Последнее уравнение определяет

$$A_2 = \frac{(\kappa+1)}{2} F$$

Подставляя второе приближение (9) и (11) в (5) и интегрируя по x получим второе приближение для смещений, которые используем в качестве граничных условий для образца. Дальше процесс вычисления повторяется.

На рис. 2 для сравнения приведены два последовательных приближения для контактных напряжений.

Пунктирной линией обозначено первое приближение, сплошной — второе. Нормальные напряжения σ_v приведены на рис. 1, а, касательные τ — на рис. 2, б. Рассмотрим напряжения $\sigma_x(x)$, терпящие разрыв при переходе из образца к полу平面ости. Из условия непрерывности перемещений на контакте получаем при стремлении из образца

$$\sigma_{x1} = \frac{E_1(1-\nu^2)}{E(1-\nu_1^2)} \sigma_x + \left[\frac{\nu_1}{1-\nu_1} - \frac{E_1 \nu(1+\nu)}{E(1-\nu_1^2)} \right] \sigma_y \quad (12)$$

где E_1, ν_1 — упругие характеристики образца; σ_x, σ_y — напряжения в полу平面ости, связанные уравнением [2]

$$\sigma_x = \sigma_y + \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau dt}{t-x}$$

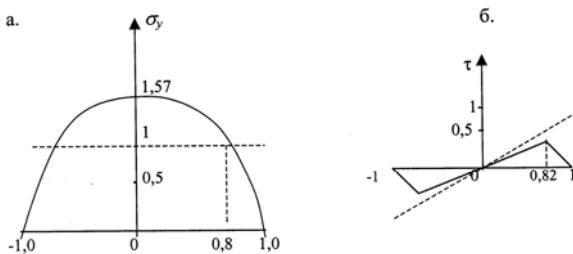


Рис. 2

Подставляя (13) в (12) получим

$$\sigma_{x1} = \left[\frac{E_1}{E} \frac{1-v^2}{1-v_1^2} + \frac{v_1}{1-v_1} - \frac{E_1}{E} \frac{v(1+v)}{1-v_1^2} \right] \sigma_y + \frac{E_1}{E} \frac{1-v^2}{1-v_1^2} \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau}{1-x} dt \quad (14)$$

Первое приближение нормальных и касательных напряжений (рис. 2) определяет экстремальное значение сжимающих напряжений σ_{x1} при $x = 0$ и максимальные значения растягивающих при $x = \pm a$. Второе приближение (рис. 2) для σ_y и τ согласно (14) определяет сжатие при $x = 0$ и экстремальные значения σ_{x1} в окрестности $x = \pm a$. Такое поведение σ_{x1} позволяет объяснить наблюдаемое на практике разрушение образцов пород.

Процесс преобразования подводимой к образцу пород энергии от пресса при сжатии проходящий в ограниченных объемах (рис. 1, 2) и сопровождающийся самопроизвольно

возникающими гармоническими пульсациями давления, называется *автоколебательным*. Должен существовать механизм усиления случайно возникшего возмущения и приводящий к динамическому проявлению в породах иначе процесс колебания затухал бы. Усилии возмущений сопровождающие автоколебательный процесс должны обеспечивать усиление трещинообразования в конечном объеме (на линиях типа Людерса), подготавливая реализацию разрыва сплошности в рассматриваемой области.

При нагружении образцов пород усилителем возмущений выступает эффект отсутствия всякой идеальной симметрии в испытуемом образце, за счет чего происходит движение, скажем плоского образца, в пространстве, обеспечивая рост напряжений в локальной области, сопровождаемый при определенной величине их разрывом сплошности, что еще больше увеличивает несимметрию, т.е. автоколебательный процесс в образце. Другими словами, всегда имеет место (за пределом упругости) сложное нагружение, даже в сжимаемом стержне, и нет оснований переходить на молекулярный уровень для описания разделения образца на части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. — М.: Физматиз. — 1962. — 456с.
2. Миренков В.Е. Определение связи компонент напряжений и смещений на границе массива пород. ФТПРПИ, № 1. 2004. — С. 42—49.
3. Шутов А.В., Красновский А.А., Миренков В.Е. Моделирование контактных условий при деформировании образцов пород. ФТПРПИ, № 2. 2004. — С. 25—32.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука. 1967.— 607 с. ГИАБ

Коротко об авторе

Миренков В.Е.